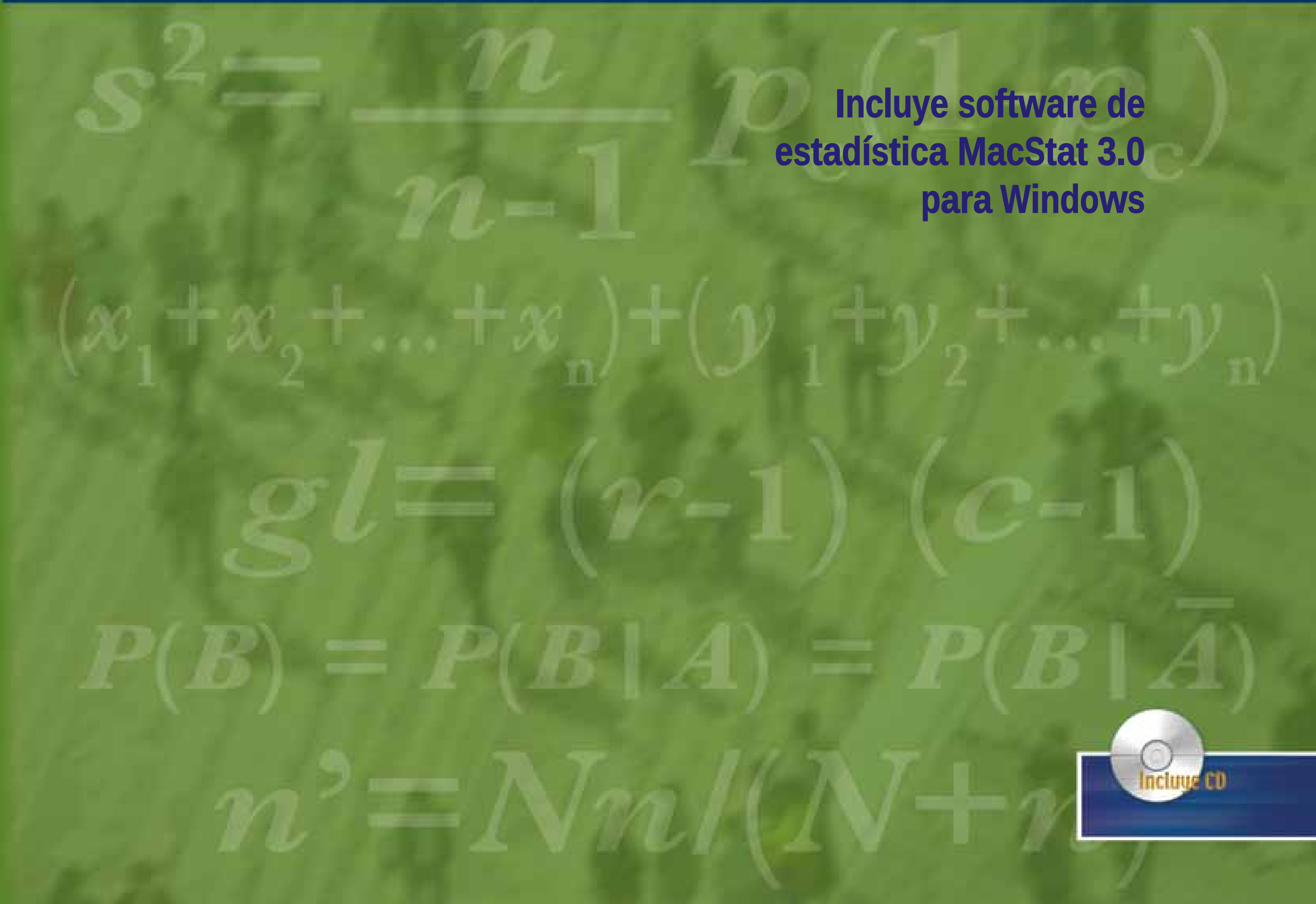
CENGAGE Learning

Haroldo Elorza Pérez-Tejada

Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud

3a. edición



Incluye software de
estadística MacStat 3.0
para Windows

Estadística

para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud

3a. edición

booksmedicos.org

Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud

3a. edición

Haroldo Elorza Pérez-Tejada

booksmedicos.org

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE
Learning™

Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud.
3a. edición
Haroldo Elorza Pérez-Tejada

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Héctor Enrique Galindo Iturribarría

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director editorial:
Lilia Moreno Olvera

Editor:
Felipe de Jesús Castro Pérez

Coordinador de preprensa:
Alejandro A. Gómez Ruiz

Editora de producción:
Abril Vega Orozco

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Supervisor de manufactura:
Israel Robles Martínez

Diseño de portada:
Edith Ramirez Flores

Composición tipográfica:
Foto Grafic & Diseño

© D.R. 2008 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducido, transmitido, almacenado o utilizado en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Datos para catalogación bibliográfica:
Elorza, Haroldo Pérez-Tejada
Estadística para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud. 3a. ed.

ISBN-13: 978-607-481-345-6
ISBN-10: 607-481-345-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

CONTENIDO

PARTE 3 MODELOS NO DETERMINÍSTICOS 179

PARTE 6 INTRODUCCIÓN A LA MEDICIÓN 601

CAPÍTULO 16 TEORÍA DE LA RESPUESTA AL ÍTEM 603

PREFACIO

Esta tercera edición tiene como destinatarios principales a los lectores que estudian por primera vez a la **probabilidad** y la **estadística aplicadas**, ya sea como parte de su formación profesional o porque tienen que realizar un **estudio**, **investigación, experimento,** etc. y editarlo como **tesina, tesis, cartel** o **artículo,** con la finalidad de presentarlo en un congreso, o someterlo a consideración de un comité para su publicación y así obtener el título profesional de licenciatura, el grado de especialidad o el de maestría.

Estructura de la tercera edición

Esta obra se ha reestructurado, actualizado y ampliado.

Se conforma de 16 capítulos, en los que han participado expertos en sus áreas respectivas; por ejemplo, en el capítulo 1, *Aspectos fundamentales de la ciencia*, el autor es Serafín Mercado Domenech, doctor en psicología por la Universidad de Texas; profesor e investigador en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Psicología, en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

En el capítulo 3, *Conjuntos, funciones y matrices*, intervino el actuario Carlos Ávalos Franco, subdirector de Opinión Pública del Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (CONACULTA), organismo oficial de México.

Asimismo, en el capítulo 5, *Muestreo*, la autora es la actuaria Yvón Angulo Reyes, con maestría en demografía por el Colegio de la Frontera Norte, investigadora de la Unidad de Estudios de Opinión del Instituto de Investigaciones Sociales de la UNAM.

En el tema sobre *evaluación*, capítulo 15, participó la maestra Helga Patricia Frola Ruiz, Centro de Investigación Educativa y Profesionalización Institucional.

Por otra parte, el capítulo 16, *Teoría de la respuesta al ítem*, lo desarrolló José Martínez Guerrero, doctor en la Universidad Complutense de Madrid, actualmente profesor e investigador en la Facultad de Psicología de la UNAM.

Los capítulos restantes son de mi autoría.

Los escritos científicos los desarrollaron la maestra Alejandra Terán Álvarez del Rey, académica de la Facultad de Estudios Superiores (FES-Iztacala) de la UNAM y el doctor Serafín Mercado Domenech.

Ejercicios de final de capítulo

Los ejercicios que vienen al final de cada capítulo se presentan con cuatro temáticas; la primera se refiere a problemas matemáticos, mientras que las otras tres se relacionan tanto con las ciencias sociales como con las del comportamiento y de la salud. Cada uno de los problemas acerca de estos tres últimos grupos viene señalado con los siguientes iconos:

Ciencias sociales.

Ciencias de la salud.

Ciencias del comportamiento.

CD con software

La versión **MacStat 3.0**, el software estadístico que viene incluido en este libro, fue actualizado por su autor, Juan Carlos Medina Sandoval, licenciado en matemáticas aplicadas por la FES-Acatlán, de la UNAM y con maestría en administración por la Universidad de Guanajuato; actualmente es director de la firma DataConsult de México.

Revisión final

La revisión final estuvo a cargo de Ignacio Méndez Ramírez, doctor en estadística por la Universidad de Carolina del Norte, ex director del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas, donde actualmente es investigador, así como profesor del diplomado "La estadística VI", en la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), Unidad Xochimilco. El doctor Méndez es autor de nueve libros especializados en estadística; ha colaborado en alrededor de 200 publicaciones entre artículos, capítulos en libros, trabajos de investigación y de divulgación científica. También ha presentado más de 500 trabajos en congresos, simposios y conferencias, cuenta con una amplia experiencia docente, la cual incluye un periodo como rector de la Universidad Autónoma de Chapingo y dos periodos reglamentarios como director del Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, de la UNAM. Respecto de la revisión efectuada en este libro, me permito reproducir sus comentarios:

> *El texto 'Estadística, para las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud' cubre los conceptos básicos de la estadística y de la probabilidad. Esto desde la estadística descriptiva, a los conceptos de inferencia con una y dos poblaciones, y su extensión a varias poblaciones con las pruebas de F, así como los conceptos de regresión simple y múltiple. Además, inicia con una excelente introducción a los aspectos matemáticos que son un auxiliar para la probabilidad y la estadística; asimismo, cubre conjuntos, funciones, matrices, permutaciones y combinaciones. También presenta las pruebas más comunes de la estadística no paramétrica y el análisis de datos categóricos. Finalmente, incluye una breve introducción tanto al tema de la evaluación como a la teoría de respuesta al ítem.*
>
> *El tratamiento es muy adecuado para los lectores de las áreas de ciencias del comportamiento, sociales y de la salud, como se indica en el título. No se presenta de manera rigurosa la demostración de cada técnica estadística, pero sí su motivación, conceptualización y uso. Esto se hace con varios ejemplos en cada caso. Los ejercicios también están bien seleccionados y son un valioso complemento para el estudiante.*
>
> *Este texto constituye un valioso auxiliar para el aprendizaje de la estadística y sus aplicaciones.*

A todos ellos les expreso mi agradecimiento sincero y les ofrezco una disculpa por los posibles errores, tanto sistemáticos como aleatorios, que siempre están al acecho en este tipo de trabajos; me responsabilizo totalmente de los que pudieran ocurrir.

También deseo agradecer a Cengage Learning y al equipo que trabajó en esta edición, en especial a José Tomás Pérez Bonilla, director editorial Iberoamérica; a Abril Vega Orozco, editora de producción, y a los editores de desarrollo que llevaron a buen término este proyecto.

Hay que tener presente en cada proyecto que uno idealiza y pretende realizar que se debe poner en juego toda la voluntad posible, entusiasmo y actitud positiva, no olvidando con ello una genial frase del gran escritor argentino Jorge Luis Borges: "*Qué breves son los años y qué largas son las horas.*"

Acerca del autor

Haroldo Elorza Pérez-Tejada

Obtuvo la licenciatura en física en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y es maestro en ciencias por el Rensselaer Polytechnic Institute (RPI), de Nueva York. Ha desarrollado actividades como docente en diversas instituciones de nivel medio superior, profesional y de posgrado; entre ellas están el Russell Sage College, de Nueva York; la Universidad Tecnológica de México (UNITEC), el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), la Universidad Anáhuac (UA), la Universidad del Valle de México (UVM), el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), el Instituto Nacional de Ciencias Penales (INACIPE), el Colegio de Bachilleres (de la Secretaría de Educación Pública) y el Hospital de Especialidades del Centro Médico La Raza del Instituto Mexicano del Seguro Social. También es académico de posgrado en la Universidad Latinoamericana, donde a la vez forma parte del comité tutoral de la maestría en odontología.

Del mismo modo, ha sido conferencista en la Universidad de Campeche, la Universidad Veracruzana, la Universidad de Sonora, la Universidad del Bajío (en León, Guanajuato), en el Instituto Tecnológico de Villahermosa (Tabasco) y durante la XXVIII Feria Internacional del Libro del Palacio de Minería, 2007 (antigua escuela de ingeniería de la UNAM).

En esta última institución ha sido profesor a nivel bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), en la Facultad de Contaduría y Administración y en la Facultad de Estudios Superiores de Acatlán. Actualmente colabora con la Facultad de Psicología (donde fue coordinador del área de matemáticas y estadística en el periodo que va de 1974 a 1981), también es académico e investigador en la División de Estudios de Posgrado e Investigación de la Facultad de Odontología. Además, es asesor en estadística en el Instituto de Terapia Ocupacional (ITO).

Ha sido miembro de la Asociación Mexicana de Estadística, A.C. (AME), asesor de encuestas del Instituto Mexicano de Opinión Pública (IMOP) y miembro del comité editorial de la Sociedad de Ex Alumnos de la Facultad de Psicología de la UNAM. Realizó la revisión técnica del libro *Fundamentos de estadística en la investigación social*, de J. Levin (Harla, 1979). De igual forma, colaboró en el capítulo 2, del libro *Dolor orofacial y desórdenes de la articulación temporomandibular*, de Ángeles Medina F. y Romero Reyes M., en la editorial Trillas. También participó en estudios que se publicaron en la *Revista Odontológica Mexicana*, órgano oficial de la Facultad de Odontología de la UNAM. Finalmente, formó parte del equipo que realizó un estudio en el Instituto de Terapia Ocupacional, con apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT); los resultados se publicaron en la revista *Acta Pediátrica de México* del año 2006.

Acerca de los colaboradores

Yvón Angulo Reyes

Obtuvo la licenciatura en actuaría en la Facultad de Ciencias de la UNAM y la maestría en demografía en El Colegio de la Frontera Norte. Actualmente cursa el doctorado en sociología en la Facultad de Ciencias Políticas y Sociales de la UNAM. Ha sido investigadora asociada C de tiempo completo en el Instituto de Investigaciones Sociales (IIS, perteneciente a la UNAM), asignada a la Unidad de Estudios sobre la Opinión (UDESO), donde ha laborado como coordinadora técnica en 16 proyectos de investigación solicitados a dicho instituto, por diversos organismos gubernamentales de México. También es profesora de estadística en los niveles de licenciatura y de posgrado en varios institutos.

Helga Patricia Frola Ruiz

Realizó estudios de licenciatura y maestría en psicología en la FES-Zaragoza de la UNAM. Es ex becaria del gobierno de Canadá para el proyecto de evaluación de grupos con necesidades especiales. También se desempeña como Directora del Centro de Investigación Educativa y Profesionalización Institucional (CIEPI) desde 1994. Autora de los libros *Un niño especial en mi aula* y *Problemas de conducta en el aula,* editados en 2005 y 2007, respectivamente, por editorial Trillas, México.

Alejandra Terán Álvarez del Rey

Licenciada en medicina y maestra en medicina nuclear por la Escuela Superior de Medicina (ESM) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), además de ser subdirectora de enseñanza del Hospital General Rubén Leñero del Gobierno del Distrito Federal. Se desempeña también como académica de la ESM del IPN y de la FES-Iztacala de la UNAM.

Carlos Ávalos Franco

Es licenciado en actuaría por la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha participado en investigaciones dentro del ámbito de las ciencias sociales, en los sectores público y privado.

José Martínez Guerrero

Cursó la licenciatura y la maestría en la Facultad de Psicología de la UNAM. Es doctor por la Universidad Complutense de Madrid, donde recibió el Premio Extraordinario de Doctorado de esta universidad española. Actualmente funge como profesor en el Posgrado de la Facultad de Psicología, al igual que como tutor en el Programa de Medicina Conductual. Es, finalmente, investigador nacional nivel I en el Sistema Nacional de Investigadores del CONACYT.

Juan Carlos Medina Sandoval

Obtuvo la licenciatura en matemáticas aplicadas y computación en la FES-Acatlán de la UNAM y la maestría en administración en la Universidad de Guanajuato. Actualmente funge como consultor independiente, es director de DataConsult de México. Asimismo, es autor del software que acompaña a este libro. Para más detalles, véase la presentación de **MacStat 3.0.**

Serafín Mercado Domenech

Licenciado en psicología por la UNAM, doctor en psicología en la Universidad de Texas (Austin, E.U.), profesor e investigador en la División de Estudios de Posgrado además fue fundador de la maestría en psicología ambiental en la Facultad de Psicología de la UNAM.

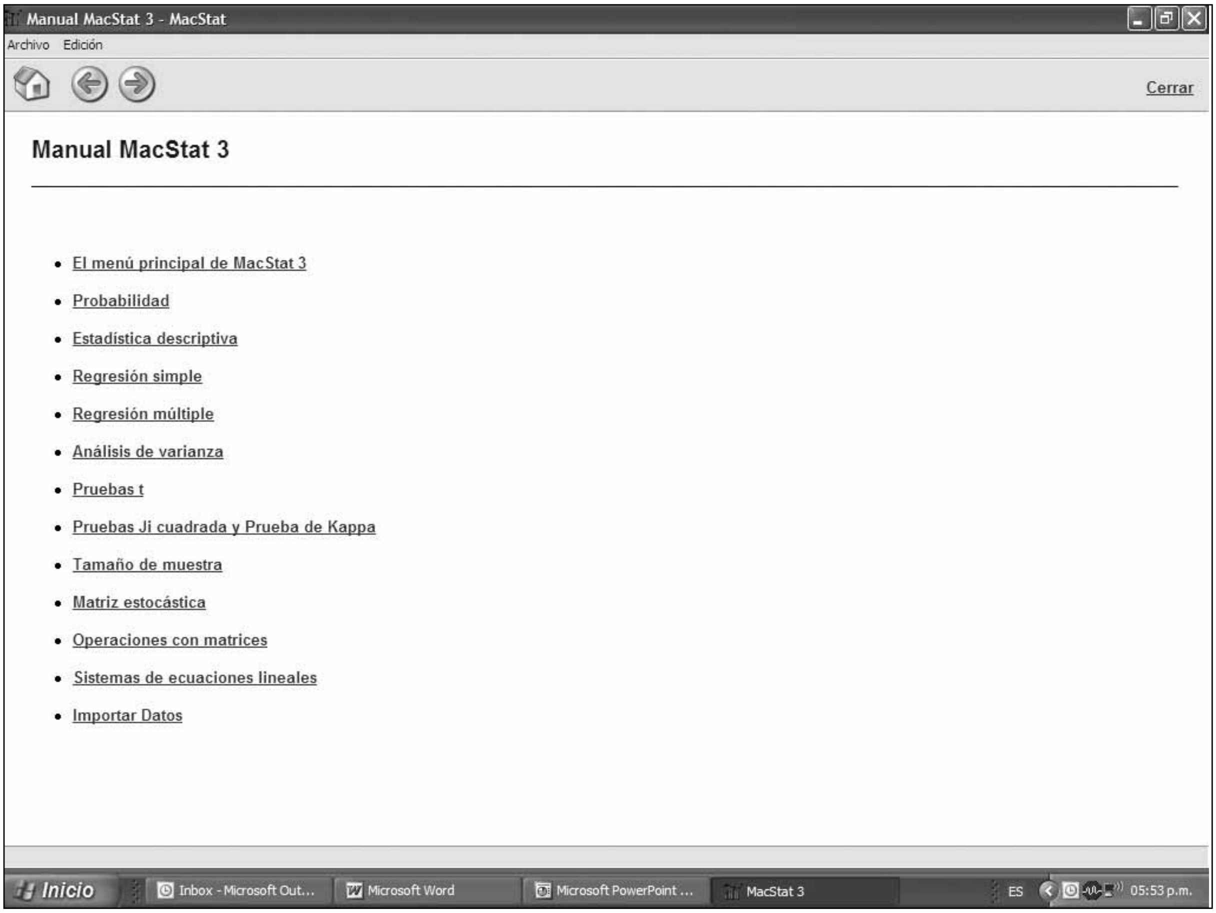
Adip Sabag Sabag

Licenciado en psicología por la UNAM, maestro en sociología en la Universidad de Lovaina, Bélgica, y doctor en prospectiva por la Universidad de París (Sorbona).

ACERCA DE MACSTAT 3.0

Aprender estadística no es sencillo, como estudiante de licenciatura experimenté lo complicado que puede ser preparar tareas y tener que dedicar más tiempo en hacer las operaciones (sumas, multiplicaciones, potencias, etc.) que el que pude dedicar a interpretar los resultados y comprender las aplicaciones. Esta situación ocasiona que muchas personas aprendan más a hacer sumatorias que a interpretar y conocer en qué casos usar cada modelo estadístico y los beneficios que se generan al aplicarlos a las actividades cotidianas de muchas profesiones. Como resultado de lo anterior, muy pocas personas al salir de la universidad recuerdan qué modelos existen y mucho menos para qué se usan.

MacStat será un gran apoyo para todos los estudiantes de licenciatura que estén aprendiendo estadística, aunque puede utilizarse en cualquier nivel, como lo comprobé al estudiar la maestría en administración, donde lo utilizamos en varias clases y proyectos para aplicar modelos estadísticos. El software también es de gran ayuda en investigaciones profesionales, situación que he encontrado en Internet, en diversas menciones del uso de MacStat para procesar información de investigaciones en varios estudios. También he visto con agrado que algunos profesores lo recomiendan a sus alumnos en los planes de estudio para que lo utilicen en proyectos de investigación y tesis.



Manual MacStat 3

- El menú principal de MacStat 3
- Probabilidad
- Estadística descriptiva
- Regresión simple
- Regresión múltiple
- Análisis de varianza
- Pruebas t
- Pruebas Ji cuadrada y Prueba de Kappa
- Tamaño de muestra
- Matriz estocástica
- Operaciones con matrices
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Importar Datos

MacStat fue creado con la idea de que el estudiante de estadística cuente con una herramienta que realice las operaciones, ahorre tiempo y pueda comprender el uso del modelo y su aplicación.

La primera versión se elaboró para un concurso en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) que invitaba a los estudiantes a crear software que sirviera de apoyo para cualquier materia. La estadística es común en muchas áreas, además de que requiere realizar muchas operaciones, por lo que desarrollar un programa para esta disciplina era una opción muy alentadora. Así nació la versión 1 de MacStat; ésta fue programada para correr en sistema operativo MS-DOS que era de uso muy común en esa época. El nombre de MacStat se deriva de la licenciatura que estudiaba, matemáticas aplicadas y computación, conocida como MAC, a este nombre se agregó "Stat", palabra comúnmente utilizada como sufijo en software de estadística. La versión del concurso contenía módulos de análisis de varianza, regresión simple, estadística descriptiva y operaciones de matrices. El resultado fue el primer lugar en el concurso por su calidad y aplicación práctica de apoyo.

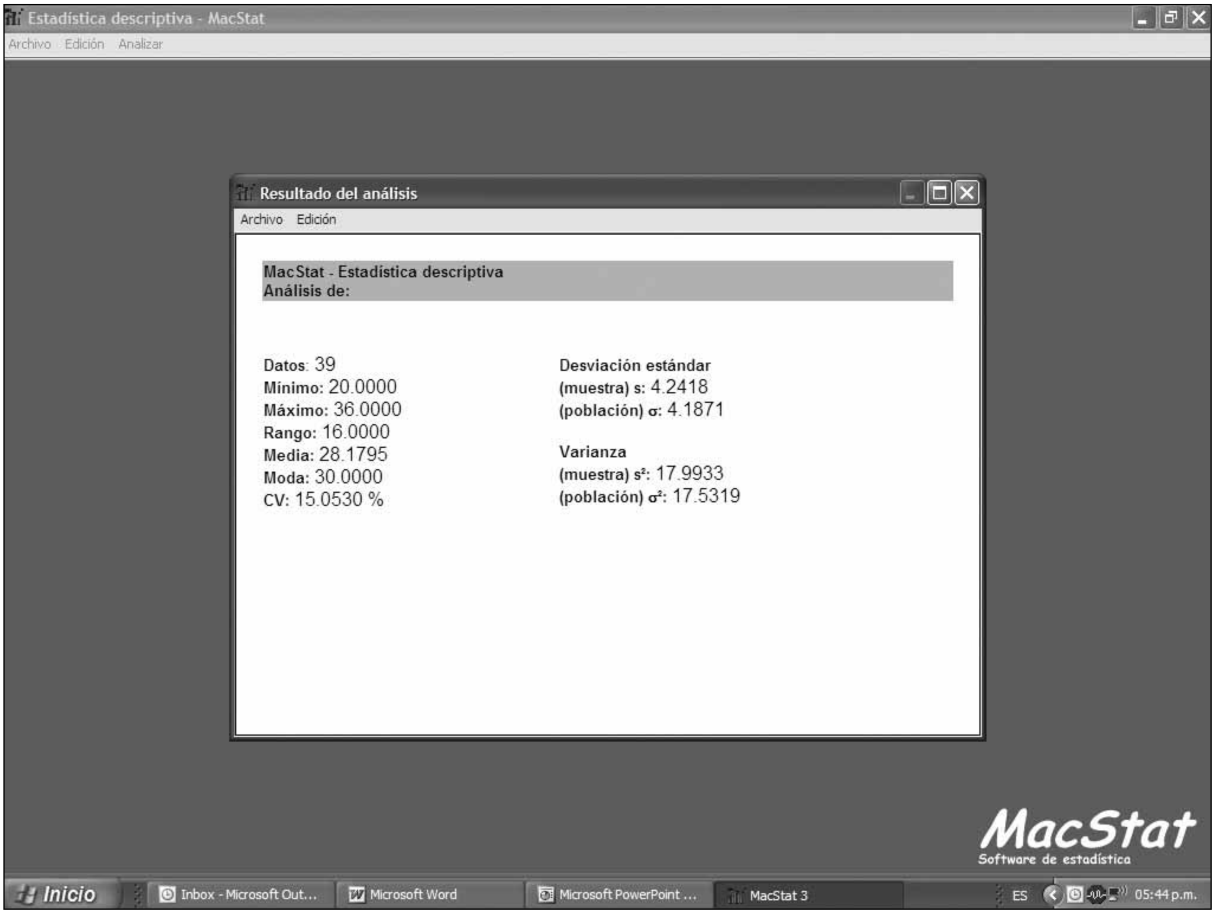
La versión 2 de MacStat fue distribuida junto con la segunda edición de este libro a invitación del maestro Elorza. Esta idea motivó que se actualizara el software para que pudiera utilizarse en Windows. MacStat 2 sólo conserva de la primera versión el nombre y la buena intención con la que se desarrolló originalmente, ya que se reprogramaron los modelos y la interfaz para poder aprovechar las ventajas de Windows. La versión 2.5 tuvo cambios más que nada estéticos y de interfaz, para hacer aún más sencillo su uso.

Dar clic sobre la opción deseada para entrar a un módulo:

Página de MacStat en Internet:

http://www.macstat.org

MacStat 3 fue desarrollado para acompañar a esta edición agregando nuevos modelos que eran muy solicitados como las pruebas "*t*", "*ji*-cuadrada" y de regresión múltiple. Estos modelos pueden resultar en una gran cantidad de operaciones cuando se realizan "a mano" o "a lápiz", pero con MacStat sólo es necesario capturar los datos de entrada y automáticamente se obtienen los resultados.



MacStat - Estadística descriptiva
Análisis de:

Datos: 39
Mínimo: 20.0000
Máximo: 36.0000
Rango: 16.0000
Media: 28.1795
Moda: 30.0000
CV: 15.0530 %

Desviación estándar
(muestra) s: 4.2418
(población) σ: 4.1871

Varianza
(muestra) s²: 17.9933
(población) σ²: 17.5319

Además de estos tres modelos nuevos, se mejoraron notablemente varios aspectos tanto técnicos como de uso. Las operaciones se realizan mucho más rápido en varios modelos, se pueden copiar y pegar datos en las matrices u hojas de datos para poder aprovechar los disponibles en otros programas o en otros módulos.

Las matrices se pueden guardar en archivos para facilitar el trabajo con matrices grandes y no tener que recapturarlas cada vez que se quieran usar.

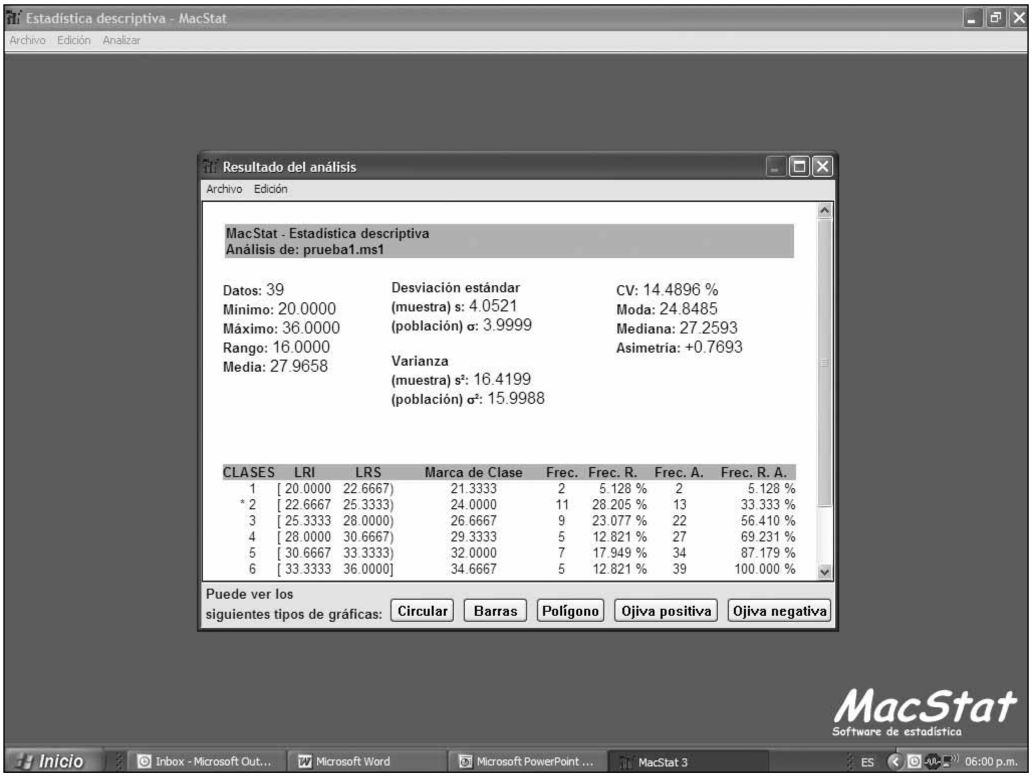
Otro cambio importante en esta versión es que facilita establecer los resultados de las pruebas de hipótesis inherentes a varios modelos estadísticos. Ahora los módulos de análisis de varianza, regresión simple, regresión múltiple, pruebas "*t*" y pruebas "*ji*-cuadrada" incluyen en el reporte de resultados la probabilidad exacta a la que se rechaza la hipótesis nula. Así se ayuda al estudiante a confirmar los resultados obtenidos mediante la consulta de tablas y, cuando ya se comprende bien el modelo, aprovechar rápidamente los resultados sin necesidad de consultar las tablas estadísticas.

Instrucciones para importar datos de Excel®: (También es posible con otras aplicaciones)

Selecciona los datos que deseas importar en Excel® y copialos al portapapeles. Posteriormente en esta ventana haz clic en "Pegar datos". Una vez que "Pegues" los datos haz clic en "Guardar".

Excel® es una marca registrada de Microsoft.

Crear un archivo de tipo: ● Estadística descriptiva ○ Regresión simple



```
MacStat - Estadística descriptiva
Análisis de: prueba1.ms1

Datos: 39              Desviación estándar            CV: 14.4896 %
Mínimo: 20.0000        (muestra) s: 4.0521            Moda: 24.8485
Máximo: 36.0000        (población) σ: 3.9999          Mediana: 27.2593
Rango: 16.0000                                        Asimetría: +0.7693
Media: 27.9658         Varianza
                       (muestra) s²: 16.4199
                       (población) σ²: 15.9988

CLASES   LRI       LRS       Marca de Clase   Frec.   Frec. R.   Frec. A.   Frec. R. A.
    1   [ 20.0000  22.6667)     21.3333         2      5.128 %      2          5.128 %
  * 2   [ 22.6667  25.3333)     24.0000        11     28.205 %     13         33.333 %
    3   [ 25.3333  28.0000)     26.6667         9     23.077 %     22         56.410 %
    4   [ 28.0000  30.6667)     29.3333         5     12.821 %     27         69.231 %
    5   [ 30.6667  33.3333)     32.0000         7     17.949 %     34         87.179 %
    6   [ 33.3333  36.0000]     34.6667         5     12.821 %     39        100.000 %
```

Puede ver los siguientes tipos de gráficas:

La misión de MacStat es apoyar a los estudiantes durante el aprendizaje de la estadística y la aplicación de los modelos, al liberarlos de tener que realizar las operaciones de forma manual para que puedan dedicar más tiempo productivo a comprender y aplicar.

Cuando se aprende a usar un modelo estadístico MacStat puede utilizarse para resolver problemas de muchas áreas, ya que quien aprende a usar un modelo encuentra aplicaciones prácticas en su área profesional, además de que puede estar seguro que MacStat presentará resultados con la calidad y poder de muchos paquetes comerciales, con la ventaja de ser mucho más sencillo de utilizar.

Juan Carlos Medina
Licenciado en matemáticas aplicadas y computación
con maestría en administración.
jcmedina@macstat.org

PARTE 1

Estadística y ciencia

> *Para ser aceptada como conocimiento científico,*
> *una verdad debe ser una deducción de otras verdades.*
>
> Aristóteles

Capítulo 1

Aspectos fundamentales de la ciencia

Dr. Serafín Mercado Domenech
Facultad de Psicología, UNAM

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector sea capaz de ubicar a la estadística dentro del contexto de la ciencia y la investigación.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Reconocer que la ciencia ha facilitado el desarrollo de las teorías que exponen la realidad.
- Comprender la conceptualización del empirismo y del positivismo en el proceso de acumulación del conocimiento.
- Explicar la forma en la que las teorías constituyen simplemente la organización lógica de las leyes empíricas.
- Enunciar la forma que tiene el empirismo de entender la ciencia.
- Reconocer que toda teoría, todo modelo y toda ley científica son una conjetura acerca de cómo es la realidad.
- Relacionar la opinión de Popper de que toda ley, principio, teoría o modelo es una conjetura o suposición.
- Diferenciar el punto de vista de los positivistas y los justificacionistas con relación a la ciencia.
- Considerar el punto de vista de Popper acerca de que: "Lo que caracteriza al hombre de ciencia no es la posesión del conocimiento o de verdades irrefutables, sino la investigación desinteresada e incesante de la verdad"

INTRODUCCIÓN

La ciencia es una de las empresas más humanas y productivas que haya desarrollado el hombre. Si lo que caracteriza al ser humano es su excepcional inteligencia, la cual le ha dotado de lenguaje y le ha permitido servirse de él para crear una singular organización social, de insólita eficacia, para dominar la naturaleza, entonces la ciencia es el logro humano más perfecto y contundente, el cual señala la cúspide de los frutos de su intelecto, único en el Sistema Solar y tal vez en el universo mismo.

La ciencia basada en un proceso analítico y crítico produce el conocimiento que ha permitido una mejor comprensión de la realidad circundante. Asimismo, ha facultado al hombre para penetrar en los secretos más profundos del mundo, incluido el ser del hombre mismo. La ciencia ha facilitado el desarrollo de teorías que exponen la realidad, con base en un examen de la relación entre los intentos de explicación teórica, evidencia empírica y congruencia lógica, tanto interna a la explicación como en lo relativo a otras teorías con las que tienen vínculos conceptuales. Esto ha implicado que el científico pruebe sus teorías confrontándolas con la evidencia existente que, con el objeto de evaluar la teoría de que se trata, se acumula con procedimientos rigurosos. Asimismo, el científico está a la caza de inconsistencias internas en la lógica de las explicaciones, así como de las contradicciones entre las diversas teorías vinculadas.

Aquí se hace relevante la discusión acerca de la naturaleza de las teorías y su desarrollo en Popper (1959, 1963, 1970, 1974 *a*, 1974 *b)* y Kuhn (1963, 1970 *a*, 1970 *b*, 1971, 1974), y las posteriores elaboradas por Kneller (1978); Lakatos (1964, 1968 *a*, 1968 *b*, 1970, 1971, 1974, 1975); Feyerabend (1962, 1965 *a*, 1965 *b*, 1970 *a*, 1970 *b*, 1970 *c*), Maxwell (1974) y Weimer (1979).

La conceptualización del empirismo y del positivismo acerca de la naturaleza del proceso de acumulación de conocimiento se ha sustentado siempre en el proceso de inducción. Este principio señala, tal como lo plantea Hume, que si observa una cierta regularidad en los procesos naturales (incluida la naturaleza humana), entonces es posible generalizar a partir del establecimiento de una ley. De acuerdo con esta visión, el problema de la ciencia es observar cuidadosamente la naturaleza, evitando caer en errores debidos a la posible confusión de causas. El mejor modo de evitar el error es realizar una cuidadosa observación y medición del fenómeno y utilizar el método experimental para no confundir la verdadera causa de los fenómenos con otras que en apariencia los producen. De acuerdo con ellos, los hechos observados y establecidos *prueban* una cierta concepción de la realidad. Al ser entonces el proceso científico un proceso lineal y acumulativo, las teorías constituirían simplemente la organización lógica de las leyes empíricas y la explicación de varias de ellas por principios más generales, surgidos de la inducción. Esta es la forma que tiene el empirismo de entender la ciencia y, con ciertas modificaciones, el positivismo.

Hume ya había planteado la naturaleza de las limitaciones lógicas del conocimiento inductivo: independientemente de cuántas observaciones se hayan hecho de una regularidad, esto no da ninguna "garantía lógica" de que volverá a ocurrir del mismo modo en la siguiente ocasión. La solución planteada por Popper (1972) a este dilema se hizo en términos de postular que nunca se puede partir de ninguna certidumbre acerca de nada de lo que se cree. De acuerdo con él, toda teoría, todo modelo o toda ley científica, es una conjetura de cómo es la realidad; no importa que su origen sea la *inducción*, un conocimiento tácito, tal vez de carácter personal, o una especulación; la teoría es una conjetura, una suposición, una hipótesis acerca de la realidad.

Las teorías, dice este autor, basan su desarrollo en la confrontación crítica con los hechos y con la lógica. En sus palabras, "... ningún conjunto de enunciados contrastadores verdaderos podrá justificar la pretensión de que una teoría explicativa universal es verdadera".[†] Sin embargo, afirma que: "suponiendo que los enunciados contrastadores sean verdaderos, con base en ellos a veces podemos justificar la pretensión de que una teoría explicativa universal es falsa".[††] Esto desplaza el énfasis de la investigación al sentido contrario de como lo plantea el punto de vista tradicional científico: no es posible probar que las teorías sean verdaderas, sólo es factible eliminar las falsas. Por ello, Popper dice: "el método de la ciencia es el método de las conjeturas audaces e ingeniosas seguidas por intentos rigurosos de refutarlas".[†††]

Esto hace de la ciencia una aventura fascinante, donde las teorías se tienen que *construir*; hay que inventarlas sobre la base de lo que ya se comprende del fenómeno en cuestión. No obstante, lo que hace a la ciencia más emocionante aún, es la posibilidad de someter las teorías a rigurosas pruebas de evidencia. Por un lado, esto otorga un grado mucho mayor de libertad, pero también un enorme sentido de responsabilidad.

De acuerdo con la opinión de Popper, toda ley, todo principio, toda teoría o todo modelo es una conjetura, una suposición. Las teorías no surgen, como supondrían los positivistas, mediante el proceso de inducción a partir de los datos, que, en todo caso, tan sólo proporcionan una *inspiración* inicial para la concepción de una teoría y no son una base empírica para el proceso lógico de la generalización por inducción. Los datos, cuando se generan *a posteriori*, sirven también para poner a prueba la elaboración de una ley o teoría, y si ésta resulta rechazada, es precisamente la naturaleza de las fallas la que podría servir de inspiración para el posterior planteamiento.

Las teorías se valoran por su poder explicativo y heurístico. Por tanto, son mejores las teorías que explican más hechos conocidos, las que tienen menos hechos que las contradicen y, sobre todo, las que permiten internarse en lo desconocido haciendo pronósticos no triviales y novedosos, sobre cuya base se les somete a pruebas rigurosas. El carácter riguroso de la contrastación hace que las teorías cuantitativas sean mejores, permiten mayor precisión en la elaboración del pronóstico y, por tanto, en la prueba de ellas, ya que permite señalar con toda exactitud el grado de error de pronóstico y decidir si éste sólo se debe a un error de medición, o si se debe a una falla de la teoría.

Explicación y teoría

El papel de la teoría es explicar, proporcionar una comprensión de fenómenos, leyes, principios y cualquier otro tipo de *hecho* por medio de postulados generales, mecanismos internos, entes hipotéticos, procesos subyacentes o cualquier otro artificio intelectual; los que se combinan para proporcionar una estructura que dé cuenta racional de aquello que se pretende explicar. Es decir, las teorías tratan de dar sentido a aquello que explican, ubicándolo en la naturaleza y haciendo explícitas sus propiedades y relaciones con otros entes.

El propósito de la explicación es profundizar en la comprensión de los fenómenos. Por ejemplo, en el área de la química, Robert Boyle había desarrollado la distinción taxonómica entre elementos y compuestos. A partir de esa base, Proust elaboró la ley empírica de las proporciones constantes, la cual sostiene que los elementos tienen que combinarse en una determinada proporción de peso, para producir

---

[†] K. R. Popper, *Conocimiento objetivo*, Tecnos, Madrid, 1974, p. 20.

[††] *Ibid*., p. 20.

[†††] *Ibid*., p. 83.

una reacción que genere un compuesto específico, sin que ninguno de los elementos que participaron en la reacción sobre, de modo que se requiere que estos elementos guarden una relación que se pueda expresar por medio de números enteros. Cuando esta proporción no se cumplía, la reacción no era completa y sobraban los elementos que tenían una proporción mayor a la estipulada. Esta ley empírica era suficiente para manejar coherentemente los fenómenos de la química que influían en las reacciones entre sustancias. Sin embargo, Dalton, un inglés, modesto profesor de primaria, introdujo una de las especulaciones más fructíferas en la historia de la humanidad: explicó esas regularidades numéricas suponiendo que la materia es discontinua y, retomando la idea de Leucipo y Demócrito, postuló la existencia de átomos para explicar esos hechos. De acuerdo con Dalton, los átomos de cada elemento se unen en combinaciones determinadas para formar moléculas de compuestos, las cuales son apiñamientos de átomos en estructuras determinadas. Es entonces el número de átomos de cada clase, que existe en cada molécula de un compuesto específico, lo que define la proporción de los elementos que deben entrar en la reacción para que no sobren átomos de un tipo u otro.

No ha existido una propuesta más fértil que ésta (Mercado, 1978). Al poco tiempo, no sólo daba cuenta de los fenómenos conocidos de la química, sino que asimiló la ley de Boyle-Mariott de los gases a la explicación atómica, mediante la teoría cinética de los gases, que se basó en una aplicación de la mecánica newtoniana al movimiento de los átomos y las moléculas.

Como puede observar ahora, las teorías son instrumentos intelectuales muy poderosos que permiten dar sentido a la apabullante complejidad de la experiencia fenoménica, así como lidiar con la realidad por medio de la creación de un esquema conceptual de ésta, el que supone que es así en verdad. En este sentido, la ciencia es el instrumento intelectual más importante logrado por la humanidad, después de la invención de la escritura. La ciencia permite al hombre entender y anticipar el mundo que lo rodea, gracias al desarrollo de teorías que se asemejan cada vez más a la realidad, ya que, como lo señala Popper, las teorías van siendo, por selección natural, cada vez mejores mapas conceptuales de la realidad y cada vez más exactos y precisos. Las teorías se transforman en las mejores guías para la praxis humana, permitiendo el desarrollo de las poderosas tecnologías que caracterizan a la época moderna y haciendo factible el enorme éxito de la especie, por el que la humanidad ha logrado la población con la que actualmente cuenta.

Naturaleza de la investigación

La investigación se considera no sólo la parte creativa de la ciencia con la que se busca expandir el conocimiento y comprensión de la realidad, sino también la base que permitirá construir un mapa de ésta capaz de guiar al hombre en su búsqueda. Los mapas que proporciona la ciencia no son únicamente esquemas descriptivos sino conceptuales-causales del mundo circundante; es decir, son guías en relación con las clases de objetos y eventos y sus conexiones causales recíprocas. Así, en función de esta situación el hombre avanza en su dominio cognoscitivo de la realidad.

La naturaleza de la ciencia y, por ende, de la investigación, han sido explicadas a través de la rama de la filosofía denominada *Filosofía de la ciencia*.[†] Esta disciplina es un esfuerzo del razonamiento

---

[†] Se ha llegado al estudio de la naturaleza del conocimiento por una variedad de ramas de la filosofía y de las ciencias particulares, denominadas *epistemología*, *filosofía de la ciencia* y *metodología*. El carácter va de lo más general, en la epistemología, a lo más específico, en la metodología.

humano por comprender cuál es el fundamento de esa actividad tan exitosa llamada *ciencia*. La filosofía, entendida como la reflexión sobre la naturaleza última de la realidad y de la existencia humana, lleva a un razonamiento acerca de la relación cognoscitiva existente entre el hombre y la realidad, que es la rama denominada *epistemología*. Dentro de esa reflexión se encuentra ubicado un análisis más específico del proceso de adquisición de conocimiento por medio de la ciencia.

La ciencia, como tal, surge en forma sistemática y organizada entre los griegos. La ciencia se desarrolló en el año 600 a.C. en las mentes inquietas e inquisitivas de investigadores de la naturaleza y de filósofos que buscaban la esencia de la realidad, incluida la naturaleza del conocimiento; desde la filosofía de la ciencia de Aristóteles, Platón, Demócrito, etc., hasta las contribuciones empíricas y teóricas concretas de Anaxágoras, Aristarco, Arquímedes, entre otros.

Sin embargo, no fue sino hasta que se inicia el Renacimiento cuando surge de nuevo un concepto sistemático del proceder científico para el avance del conocimiento, es decir, una búsqueda activa de la verdad a través de la experiencia y la puesta a prueba empírica de las hipótesis, siendo un hecho que casi todo lo que distingue al mundo moderno de los siglos anteriores es atribuible a la ciencia. Ésta, como práctica, surge al lado y bajo el cobijo de la *filosofía empirista*. Cuatro astrónomos preeminentes en la creación de la ciencia: Copérnico, Kepler, Galileo y Newton, físicos además los dos últimos, impulsaron el surgimiento de ésta, al ayudar a abrir el camino a la investigación crítica como medio para avanzar en el conocimiento, lo que obtuvo sus logros más espectaculares en el siglo XVII (Russell, 1967).

Junto a quienes practicaban la ciencia como método empírico para abordar el conocimiento, surgían los filósofos empiristas, que fundamentaban el nuevo método de obtener conocimiento. Bacon, Hobbes, Locke, Berkeley y Hume instituyen el empirismo como el único camino al conocimiento, al establecer la experiencia empírica como la única posibilidad para conocer la verdad y la inducción como el método lógico que hacía posible esto al usar la inferencia como medio para el logro de conocimientos generales a partir de experiencias particulares. Ellos establecieron el conocimiento científico como un camino seguro a la verdad. Intentaban desarrollar un sistema de inferencia racional que hiciera posible la generalización a partir de experiencias particulares y concretas. Suponían también un carácter acumulativo de la ciencia; para ellos, los hechos son contactos objetivos con el mundo que, una vez establecidos, quedan de manera perenne en el acervo de conocimiento verdadero, siendo la ciencia un proceso de acumulación de hechos. En pocas palabras, con ellos, la concepción de la ciencia se desarrolla como la búsqueda en la experiencia empírica de un camino para una seguridad absoluta que justifique los conocimientos así desarrollados como productos permanentes de un método fehaciente.

Comte dio el siguiente paso en el desarrollo de una concepción de la ciencia. El desarrollo del *positivismo clásico* fue un avance en la concepción de la ciencia empírica y de un sistema metodológico para su ejercicio concreto.[†] El positivismo considera a la experiencia como fuente de conocimiento, y los hechos generales o leyes son la única fuente de *certidumbre*. Encontramos a pensadores como Mach, Avenarius, Poincaré y Pearson, entre otros, como estructuradores de una filosofía que establecía a la ciencia sobre una base empírica que se proponía como guía pragmática para enfrentar la vida. El Universo, incluyendo al hombre, estaría constituido por fenómenos que se conectan causalmente entre sí, conexiones que se podrían descubrir por medio de la inducción, controlada, en la medida de lo posible, por el método experimental. Las leyes y las teorías serían símbolos convencionales que reflejarían el orden en las relaciones dentro de la naturaleza.

[†] Comte fue, además, padre de la sociología, que desarrolla dentro del marco filosófico de su *método positivista* de hacer ciencia.

Tanto el positivismo clásico como el empirismo mantienen una posición radical acerca del conocimiento. El conocimiento putativo no pude considerarse como verdadero a menos que se le pruebe, y la prueba consiste en ponerlo bajo la hegemonía de la autoridad epistemológica pertinente, en este caso, la experiencia empírica (Weimer, 1979).

En la actualidad, el trabajo de filósofos con enfoques diferentes, aunque con un núcleo central de acuerdo fundamental, culmina el desarrollo de una filosofía de la ciencia empírica. Todos ellos usan la lógica y la lingüística como instrumentos para el desarrollo de una relación entre teoría y realidad, aunque el fundamento de la verdad empírica sigue siendo el criterio epistemológico último. Wittgenstein, Ayer, Carnap, Tarsky y Feigel, desde el positivismo lógico; Russell y Whitehead, desde una combinación de realismo crítico y filosofía analítica y Moore, Wittgenstein y Wisdom, desde la filosofía analítica, abordan la búsqueda de la verdad mediante variantes de un mismo esquema fundamental. Si la inferencia no puede demostrar su validez *absoluta* como método lógico para establecer conocimiento verdadero, es decir, no se le puede probar, el concepto de inducción se sustituye por uno de inducción probabilística. Se fusionan los conceptos de inducción y probabilidad, y es necesario probar el conocimiento en términos de probabilidades.

Este punto de vista de la ciencia prevaleció sin desafío hasta el siglo pasado, pero en la actualidad ha surgido con gran vigor la perspectiva de la ciencia, ya mencionada, llamada *no justificacionista*, que analiza el proceso de conocimiento científico sin recurrir al de la *justificación empírica* como base para el establecimiento de éste. Como ya se vio, autores como Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend y Weimer han jugado un papel muy importante para dar esa visión alternativa de la ciencia.

La visión de la investigación científica desarrollada por las filosofías empírica y positivista fue relativamente clara. Existen dos tipos de entes: los hechos y las teorías. Los primeros provienen del ingreso sensorial, mientras que las segundas son conjuntos de proposiciones que surgen de los hechos a partir de la inducción. El problema es sencillo: hay que probar las teorías asegurando que sus conceptos tengan una relación unívoca con los hechos establecidos por inducción.

Weimer (1979) llama *justificacionismo*[†] al denominador común de todas estas aproximaciones porque encuentra a la “metateoría” como la concepción de que hay una fuente de autoridad que produce una justificación incontrovertible para un método. En esto, afirma que tanto el racionalismo como el empirismo-positivismo parten de una misma posición fundamental; de lo que Dewey llamó *búsqueda de la certeza*. El racionalismo lo hace apelando a la autoridad del intelecto, mientras que el empirismo-positivismo a la del ingreso sensorial.

Popper (1974) señala que es precisamente esa búsqueda de una base firme e incontrovertible la fuente de los problemas. Hace un análisis sobre la reflexión de Hume (1927, 1960) acerca de la inducción y coincide con él en que no es posible que partiendo de la observación de una serie de casos reiterados de una relación determinada se llegue a una conclusión válida acerca de casos aún no observados; es decir, no se justifica desde el punto de vista lógico la inferencia. La solución que ofrece para no caer en un solipsismo estéril es que, si bien no es posible de modo alguno comprobar teorías, sí es factible refutarlas. Su solución para el funcionamiento de la ciencia puede resumirse en la idea de que la ciencia opera sobre la base de conjeturas que se someten a una prueba rigurosa ante la evidencia empírica y ante el análisis de la consistencia lógica. En esta perspectiva *no justificacionista*, la teoría no surge directa-

---

[†] El *no justificacionismo* se inicia propiamente a partir del trabajo seminal de Popper y Kuhn, quienes hacen una crítica devastadora del positivismo lógico desde el interior de éste.

mente de los datos a partir de un proceso de inducción, ya que cualquier proposición teórica, desde una simple ley empírica hasta un modelo teórico o una teoría, proviene de *una conjetura*. El origen puede ser, como se señaló anteriormente, cualquier posible fuente: la observación de una o varias regularidades, una especulación teórica, una analogía o algún otro proceso. Lo importante es, como ya se ha dicho, que las conjeturas científicas se ponen a prueba por medio de la crítica lógica y empírica (a diferencia de las conjeturas puramente especulativas en otros ámbitos). No obstante, si los hechos apoyan la teoría, no cabe pensar que la justifican, sólo que hasta ahora no la han refutado.

Justificación frente a confrontación

De acuerdo con Lakatos (1970), un programa de investigación se juzga a partir de su comportamiento comparado con programas rivales. La conciencia de nuevas variables extrañas generalmente se da en torno a la competencia entre teorías rivales; el investigador no se percata de qué variables debe controlar hasta que otra explicación sugiere los aspectos que debe considerar con más cuidado para decidir cuál explicación es la que mejor da cuenta de los hechos. Lakatos (1968*b*) asevera que no es tan importante el choque entre teoría y datos como la competencia entre las teorías rivales. La actitud rigurosa no implica la supresión instantánea de una teoría, sino la exploración seria y crítica de sus posibilidades frente a otras opciones de explicación. Tal como señala Weimer, “en la mayoría de los casos en la práctica científica actual, el medio más efectivo de crítica disponible para un investigador es permanecer comprometido con una posición para poder articularla plenamente y explorar sus consecuencias” (Weimer, 1979, p. 49).

¿De dónde surgen las teorías?

Como se ha visto, las teorías científicas son intentos de explicación de la realidad, confrontadas con los hechos de manera rigurosa, que compiten entre sí para tratar de encontrar la mejor manera de dar cuenta de los hechos. Son sistemas de creencias acerca del mundo, más explícitos, claros y precisos que otros conjuntos de creencias (la religión, el sentido común, las seudociencias, etc.), y que son sometidos a una rigurosa prueba sistemática. Las teorías pueden tener una génesis muy diversa. Por una parte, se encuentra el conocimiento tácito de muchos aspectos de la realidad, donde el sentido común y el conocimiento personal son una fuente muy importante de hipótesis científicas (Polanyi, 1958). En la vida cotidiana observa casualmente muchos hechos que después lleva al laboratorio y examina con más cuidado. Con frecuencia, esas mismas observaciones inspiran los primeros intentos de explicación, que al desarrollarse pueden ser la base de una teoría. Otra fuente común son los accidentes en el proceso de investigación, que llevan a encontrar lo que no busca y se le ha denominado *serendipia*. En otras ocasiones, las teorías surgen de una observación cuidadosa de los hechos, tal vez experimentales, y el desarrollo de una *inferencia* a partir de ellos, entendiendo que lo observado da claves para la construcción de la explicación. Otro origen frecuente de teorías es la observación de una discrepancia entre algunos hechos y una teoría. Esto puede llevar a una reflexión que dé lugar al desarrollo de una teoría alterna y resuelva el conflicto.

RELACIONES ENTRE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN

El tema de este capítulo es examinar el papel que tiene la estadística en la investigación científica. La estadística es una rama de las matemáticas que se dedica a entender los fenómenos que tienen un cierto grado de azar. En la ciencia se enfrenta el problema de que los fenómenos son multicausales y existe una diversidad de aspectos de los que sólo se tiene un grado de control relativo. Frente a esta problemática, resulta útil emplear un método que permita lidiar con datos con una cierta dosis de incertidumbre. En realidad la estadística es un instrumento muy valioso para organizar la información científica y para tomar decisiones acerca de ella; sería imposible concebir la investigación científica moderna sin dicha estadística.

La investigación, con muy raras excepciones, se refiere a grupos de datos e incluso a grupos de objetos, plantas, animales o personas. Un investigador en astronomía puede tomar varios registros de la distancia a la que se encuentra la Luna o algún objeto lejano con una técnica específica (por ejemplo, usando un radar) para controlar el error de medida, y luego usar la estadística para decidir si su nueva medición es igual o diferente a la que tuvo usando un método más primitivo. Un psicólogo, puede medir la ejecución de una tarea por tres grupos de sujetos en un experimento que difieran en la cantidad de alcohol que han ingerido, para ver el efecto sobre una tarea consistente en colocar palitos en agujeros hechos en una tabla. En este caso, es posible usar la estadística para establecer si hay diferencias entre estos grupos de sujetos.

Error de medida y error experimental

Existen dos conceptos de gran importancia en los que la estadística tiene un papel preponderante: los errores de medida y los experimentales. Ambos son importantes fuentes de problemas para el investigador y poderosas razones para usar la estadística en la investigación.

El error de medida es el que se comete al medir cualquier cosa a pesar del cuidado que se tenga. Por una variedad de razones es posible cometer dos tipos de error: el sistemático, que implica una falla regular en una dirección (por ejemplo, un metro un poco más grande de lo debido) o el aleatorio, que se refiere a inexactitudes de un instrumento al medir con él. El primero produce distorsiones de nuestros datos, que a la vez implican un error en nuestras conclusiones.

Los errores sistemáticos pueden radicar en fallas de calibración de los instrumentos. Los instrumentos de medición deben ser comparados con un estándar, el cual determina que el instrumento efectivamente arroja los valores adecuados a la escala que está usándose. Por ejemplo, el metro tiene como estándar de calibración una varilla de vanadio-iridio, colocada sobre un soporte especial en una cámara con temperatura y ambiente controlados que se encuentra en la Oficina de Pesos y Medidas en París, Francia. Los estándares de calibración de los diversos países se obtienen marcando otra varilla similar en sitios análogos a los de la varilla estándar y conservándolos en condiciones similares. Los instrumentos psicométricos (*tests*) se estandarizan (una forma de calibración) aplicándolos a una gran muestra de la población donde van a usarse (por ejemplo, la ciudad de La Plata o México), y luego se establecen las calificaciones estándar. Es decir, si se usa una prueba de inteligencia en México y se emplean estándares ingleses o argentinos, se estaría produciendo un error sistemático de medida.

Los errores sistemáticos también pueden ser causados por la influencia de alguna variable ajena que afecta el proceso de medición, por ejemplo, la presencia de un campo electromagnético cerca de un instrumento de medición con una aguja de bobina, como lo pudiera ser un sonómetro, o un efecto de una variable no adecuadamente controlada como el sexo o la clase social del encuestador en una prueba de personalidad.

Los errores aleatorios (de azar) son aquellos que se cometen por aspectos accidentales, tales como limitaciones perceptuales o inexactitud al momento de tomar una medida, como pudiera ser el caso de un error al leer una escala de manera distraída. Asimismo, los errores aleatorios también se deben a la influencia accidental, de carácter temporal, de otras variables, como el estado de ánimo de un sujeto al someterse a una prueba, las variaciones accidentales de la corriente eléctrica al medir con equipo electrónico que use la energía de la red eléctrica, o el efecto de la temperatura en el funcionamiento de un equipo.

La estadística permite lidiar con ambos tipos de error. El error sistemático se establece viendo si un grupo de medidas difiere de un estándar bien establecido; por ejemplo, verificar si los metros que se usan en Polonia difieren del metro en la Oficina de Pesos y Medidas en París. Para esto se usan ciertas formas de estadística inferencial.

El error aleatorio se anula a través de la estadística. Es posible comparar medidas con error y estimar el valor casi exacto de cierta medida gracias a la estadística.

MEDICIÓN Y ESTADÍSTICA

La estadística se aplica sobre medidas obtenidas de los diversos objetos de estudio en diferentes condiciones. Por ejemplo, si desea verificar si un curso de capacitación para soluciones de problemas, mejora la inteligencia de quienes lo cursaron, puede tener un grupo al cual le mide la inteligencia antes y después de llevar el citado curso; es decir, aplica la estadística sobre medidas tomadas de los casos, antes y después de la intervención.

Medir, según Torgerson (1958), es asignar números a una propiedad de acuerdo con una regla.[†] Es decir, medir es una forma particular de observación en la cual se asignan números a las propiedades observadas. Es de notar que esta asignación no es del todo arbitraria, ya que usa una regla de asignación de números a los valores de la propiedad. Algo que es necesario comprender, es que debe abstraer la dimensión, lo cual es más difícil si se trata de aspectos no observables directamente, como el nivel del metabolismo basal, el peso de los átomos o la inteligencia.

En la vida cotidiana, sin duda, aparecen numerosas formas de medir, como usar una báscula para pesar. El peso se refiere a estándares, como el gramo, que es el peso de un centímetro cúbico de agua a nivel del mar. La regla para pesar consiste en comparar el peso del objeto de interés con el de un estándar. El número (valor) es asignado de acuerdo con la regla de que el peso del objeto sea igual o un múltiplo del peso del estándar.

Las balanzas son, tal vez, las que permiten ver esto de modo más directo; porque una varilla suspendida horizontalmente por el centro de un postecillo indica que se encuentra equilibrada y, si cuelga en los extremos unos platillos de igual peso, el equilibrio no se altera. En esta balanza pone el objeto que quiere pesar (harina) y se asegura de que tiene un kilogramo colocando en uno de los platillos el estándar de un kilogramo y en el otro la harina. Si el equilibrio se mantiene, entonces tiene el peso deseado. Si no fuese así, tendría que agregar o quitar harina hasta lograr el equilibrio, o puede cambiar o combinar estándares.

Las básculas modernas tienen un plato de un lado, suspendido sobre el brazo de la báscula, y del otro lado, un brazo sobre el cual corre un peso estándar; el efecto del peso varía al correr el estándar sobre el brazo de la palanca.

Otro uso de la estadística en psicología y ciencias afines es el desarrollo de modelos psicométricos. Estos modelos se basan en una teoría que plantea que la respuesta a un problema, pregunta o algo similar, depende de diversas variables. Si selecciona una de esas variables para medirla, también puede

---

[†] Medición numérica.
Medición categórica: nominal y ordinal.

escoger varios reactivos que supuestamente la midan, constituyendo una prueba o *test* con ellos. Usando estadísticas como la correlación y el análisis factorial, es posible ver qué tan efectivamente funciona cada reactivo (pregunta) en relación con la prueba e ir mejorándola de modo que obtenga una medida precisa, y que en efecto mida dicho atributo.

Si bien entrar en detalles en cuanto a la teoría psicométrica está fuera del alcance de este libro, esto da idea de la importancia de aprender estadística para poder después usar la psicometría.

Escalas de medición

Como ya se mencionó, medir es asignar números a propiedades de un objeto de acuerdo con reglas, pero las reglas que es posible usar son de muy diferentes tipos. Al asignar números aproveche las propiedades de los sistemas numéricos. Stevens (1951) definió cuatro tipos de escalas, de acuerdo con las propiedades del sistema numérico que se aprovechan por la regla que se usa para la asignación.

El primer tipo, llamado *escala nominal*, emplea nombres para los objetos. Éste sería el caso de usar el 0 para sexo femenino y el 1 para masculino (o viceversa) o usar números diferentes para las personas que escogen distintos tipos de cereal: 1 para los de “Corn flakes”, 2 para “Dulcereal”, etcétera.

El segundo tipo, denominado *escala ordinal*, asigna los números de acuerdo con la propiedad ordinal del sistema numérico: los valores están ordenados de menos a más, pero no hay una idea de igualdad en las distancias entre los números. La regla de correspondencia permite entonces asignar los valores numéricos a una propiedad del objeto de estudio, de modo que reflejen niveles crecientes de esa propiedad, sin que haya un compromiso de que las distancias en esa propiedad sean iguales. Por ejemplo, en una escala de actitudes puede asignar números: 1, 2, 3,..., etc., a los valores de una actitud. Es decir: “Indique el aprecio que tiene por el presidente de la República: 1. ninguno; 2. poco; 3. regular; 4. mucho”. En esta escala no es fácil decir que la distancia en aprecio entre el que responde 1 y el que responde 2 es igual a la que hay entre 3 y 4, pero sí apreciar que el valor 4 es mayor que el 3 en esa dimensión.

En el tercer tipo, la *escala de intervalo*, no sólo se usa en el ordenamiento, sino que establece que las distancias que hay entre número y número son iguales. Por ejemplo, las temperaturas medidas por los termómetros permiten aseverar que la cantidad de incremento de temperatura es igual para distancias iguales en la escala. Por ejemplo, un incremento de 5 ºC es igual, ya sea cuando se pasa de 0 a 5 ºC o cuando se pasa de 10 a 15 ºC.

En el último nivel de escala, la de *razón*, se usan las propiedades anteriores, pero, además, se tiene un cero que refleja la ausencia de la cualidad. Por ejemplo, en el caso anterior de la temperatura visto, las escalas hacen referencia a un cero que es arbitrario y no refleja la ausencia de la propiedad que se mide. El cero, en la escala Celsius, es el punto en que el hielo se derrite (o el agua se congela). En la escala Fahrenheit, la referencia es el alcohol en vez del agua. Ambos son ceros arbitrarios y por eso las escalas generan números negativos, es decir, hay temperaturas bajo cero. Por lo contrario, la escala Kelvin, sí hace referencia a un cero absoluto que implica al ausencia total de movimiento molecular y, por tanto, de temperatura.

Así, los diferentes tipos de escalas usan ciertas propiedades de los sistemas numéricos para generar un tipo de medidas que reflejen ciertas propiedades de la dimensión que se pretende reflejar con esa medida. Las escalas nominales, por ejemplo, sirven para medir cosas que tienen que ver con la pertenencia a grupos u otras formas de clasificar cosas o personas. En este caso, los números sólo sirven como nombres y es indistinto el orden que se use. Aquí sólo se utiliza la propiedad de identidad de los números.

Las escalas ordinales usan la propiedad ordinal, es decir, el hecho de que se siga una secuencia. De este modo, sabe que el 2 es mayor que el 1 o que el 11 es mayor que el 9, sin que eso implique que la distancia entre 9 y 11 tenga que ser mayor que entre 1 y 2, sólo se toma en cuenta el orden.

Las escalas intervalares usan la distancia entre números como algo válido, de manera que la distancia entre 3 y 5 es igual a la distancia entre 7 y 9, pero no hacen referencia a un cero absoluto, de modo que no puede decir que 8 es el doble de 4.

Las escalas de razón usan todas las propiedades de los números: identidad, orden, igualdad de las distancias y referencia al cero.

Limitaciones de las estadísticas por nivel de medida

El uso de la estadística se ve limitado por el tipo de medidas que usa. Por ejemplo, las medidas de razón y de intervalo utilizan los procedimientos más poderosos, llamados *paramétricos*. Existen otros procedimientos que se aplican a los casos de las medidas ordinales y nominales y se les denomina *no paramétricos*. Algunos de ellos utilizan las propiedades de orden como Kolmogorov-Smirnov o la U de Mann-Whitney y otras como la *ji-cuadrada*, que se utilizan para analizar términos de la probabilidad de clases de eventos. Estos procedimientos se verán más adelante con todo detalle; lo importante ahora es percatarse que el tipo de medidas determina el tipo de estadística.

INFERENCIA ESTADÍSTICA Y CIENTÍFICA

La estadística funciona para hacer inferencias de las distribuciones de las medidas de los fenómenos; partiendo de la suposición de que varias muestras pertenecen a la misma población; y cuando la población a la que pertenecen difiere de ellas, esto se refleja en las muestras.

Para entender mejor esto es preciso decir qué se entiende por población y por muestra. La población es la totalidad de sujetos de una condición que se está observando; es difícil de abarcar y a veces incluye sujetos inaccesibles, como los muertos. Pero incluso los vivos son difíciles de incluir en su totalidad, por ejemplo todos los seres humanos (mayores de 18 años) en el planeta Tierra. Ni siquiera todos los niños menores de 12 años con síndrome de Down. Lo más frecuente es no referirse a sujetos u objetos en sí, sino a alguna dimensión o variable de éstos, como puede ser la estatura, la inteligencia, etcétera.

Una muestra es un subconjunto de la población; seleccionado al azar (esto es lo ideal), donde todos los miembros de la población tienen la misma probabilidad de formar parte de ella. Esto en la práctica es muy difícil y costoso, cuando no imposible.

La estadística usa la distribución de probabilidad de los estadísticos muestrales (media, desviación estándar, varianza, etc.). Por ejemplo, la media aritmética, que se verá en el capítulo 2 es una medida global que identifica a un grupo de medidas. Es el valor en el punto central o de equilibrio y que, por tanto, representa al grupo. Las medias aritméticas de muestras aun del mismo tamaño varían entre sí, no siendo exactamente iguales. La frecuencia de estas medias se distribuye de acuerdo con una forma (función de probabilidad) por ejemplo la *t* de Student). Esta distribución es más alta donde se encuentra la verdadera media aritmética de la población y disminuye a medida que se aleja. Esto implica que cuando toma una muestra aleatoria, la media de ésta tiene una mayor probabilidad de ser igual a la de la población, pero hay una probabilidad pequeña de que difieran.

La inferencia estadística se basa en llegar a una conclusión a partir de una probabilidad de que las medias de dos grupos pertenezcan a la misma población. Si la probabilidad es lo bastante baja se concluye que las muestras no pertenecen a dicha población y que por tanto la razón por la cual los grupos difieren (por ejemplo, una manipulación experimental o la procedencia de grupos con características distintas) genera diferentes poblaciones en esa medida.

Por ejemplo, si supone que el alcohol afecta la comprensión de un texto puede usar una medida del grado de comprensión que tiene un lector. Esta medida puede ser una serie de preguntas acerca del texto (que deberán ser tratadas psicométricamente). Ahora, suponga que forma tres grupos de estudiantes de psicología: al primer grupo le da una bebida sin alcohol, al segundo le da una copa de tequila y al tercero dos copas a cada uno de ellos. Les sugiere leer el texto (cada uno tiene una copia del mismo) a continuación les aplica un cuestionario que mide comprensión de lectura. Si los tres grupos provienen de la misma población (de comprensión de dicho texto) por probabilidad las medias aritméticas serían todas parecidas; pero si el consumo de alcohol tuvo un efecto en la comprensión de la lectura, estas medias diferirán. La diferencia (obtenida mediante un análisis de varianza) determina la probabilidad de que éstos pertenezcan a una población homogénea; y cuando la probabilidad es lo suficientemente baja implica que la hipótesis alterna, esto es que los grupos difieren entre sí, no se rechaza.

Este tipo de inferencia, al igual que la inferencia no estadística que se mencionó anteriormente, se debe tomar con la reserva debida. Por experiencia profesional, tal vez, surgió la hipótesis de que el consumo de alcohol afecta la comprensión de textos. Esta hipótesis se pone a prueba en dicha investigación y deberá seguirse contrastando con diferentes muestras, condiciones, sujetos y lecturas.

Diseño experimental

El diseño experimental es simplemente el plan de investigación. Se trata de un plan para hacer que varíe de la manera más amplia posible la variable, o las variables (variables independientes), de la cual interesa ver su efecto sobre otra u otras variables (variables dependientes) para establecer relaciones causales o, al menos, funcionales. Los experimentos están diseñados para poner a prueba rigurosa las hipótesis de investigación, las cuales se derivan de los diferentes planteamientos teóricos. De esta manera, varía aquello de lo que quiere observar su efecto sobre algo más.

En las ciencias del comportamiento, lo que interesa en la población son los estímulos, la situación, las variables de la conducta y las relacionadas con los procesos internos.

El desarrollo actual de la tecnología ha hecho posible medir y controlar aspectos muy complejos de los objetos de estudio. Aunque en la época de Galileo, por ejemplo, ya se tenían estas nociones acerca del diseño, no se podían observar muchas cosas porque no se contaba con el desarrollo científico y la consecuente tecnología para observar, medir y controlar muchos de ellos. De esta manera, la ciencia, mediante su propio desarrollo, genera métodos para producir y controlar los diferentes aspectos (variables) que son de su interés, potenciándose a sí misma.

En general un experimento trata de:

- Observar y medir lo más exactamente posible las variables dependientes, es decir, aquellas sobre las cuales quiere ver si hay un efecto causal de las independientes.
- Modificar amplia y sistemáticamente las variables independientes o causales, para ver si éstas afectan el fenómeno tal como se hipotetiza.
- Controlar las variables extrañas, es decir, aquellas que no entran en la hipótesis de investigación, pero que de algún modo podrían influir en los resultados, distorsionándolos. Estas variables son de tres tipos: *a*) la variación de error, debida a una falla en las medidas, la cual se corrige mejorando el proceso de medición; *b*) las que se controlan llevando a las variables a un estado constante que

no afecte al fenómeno, y *c*) las intrínsecas al sujeto, que se controlan asignando a los sujetos al azar a cada situación o usándolos como su propio control, es decir, que el mismo sujeto pase por todas las condiciones experimentales.

Existen diseños más o menos estándar, producto del ingenio y dedicación de muchas generaciones de investigadores, lo que hace que generalmente no tenga que inventar nuevos diseños para lograr control y buenos efectos en las investigaciones. Aquí sólo se menciona el hecho, pero el lector tendrá que consultar un texto sobre diseño experimental, para mayores detalles.

Sin embargo, se señalan algunos de los diseños experimentales más comunes que tendrán características diferentes, según el nivel de medición a aplicar, tanto a las variables dependientes como a las independientes. El más simple y básico sería el diseño de dos grupos: experimental y control. Este diseño tiene en un grupo, el experimental, una condición que se supone afecta al proceso, y el segundo grupo, el control, carece de esa condición para dar un parámetro de comparación.

Otro diseño que es más refinado sería el llamado de *k grupos*. En este caso, en vez de manejar sólo dos condiciones, hay un número k de condiciones, tal que $k > 2$. Por lo general, una de las condiciones muestra la ausencia de la variable, sirviendo de grupo control.

Otro diseño muy popular es el *factorial*, ahí el sujeto es sometido a condiciones con más de una variable. En este caso, en lugar de un vector (una hilera de condiciones) con k grupos, hay una matriz, es decir, un cuadro, un cubo, etc., donde cada dimensión corresponde a una variable y cada cruce equivale a una cierta combinación de variables. En realidad, el diseño factorial es tan sólo un plan sistemático para producir todas las combinaciones posibles de una serie de factores.

La estadística permitirá obtener resultados en todos los casos, ayuda a discernir si las diferencias encontradas se deben al azar, causadas por variaciones naturales de los grupos, o son debidas al efecto de la variable de interés, la que está manipulando.

Diseño cuasiexperimental

Hay ocasiones en que no es posible controlar adecuadamente algunas variables. Por ejemplo, en un estudio sobre educación se deben tomar los grupos naturales y esto impide la asignación al azar. En estos casos, la estadística viene al rescate, permite tomar en cuenta el posible efecto de esas variables no controladas. Existen dos métodos experimentales: uno es el de análisis de covarianza, que requiere la medición de las variables extrañas potenciales y su introducción al modelo estadístico (en capítulos posteriores se verá cómo se logra esto). El otro método se refiere al uso de series temporales para extraer la varianza y las relaciones de los fenómenos en el tiempo. Éstos son métodos estadísticos que van más allá del alcance de este libro, pero son mencionados para dar una idea general.

Entonces, en los métodos cuasiexperimentales se tienen los mismos elementos que en los experimentales, es decir, maximizar la variación de la variable o variables independientes y controlar las extrañas, pero sólo una parte del control es experimental; la otra es estadística de las variables extrañas. Estos métodos son más adecuados para estudios en condiciones naturales.

Métodos cualitativos

En muchas ocasiones no hay manera de abstraer dimensiones y generar procedimientos para medirlas. En estos casos, los investigadores sólo clasifican los fenómenos y los atributos de éstos y tratan de establecer relaciones causales. Cuando alguien únicamente clasifica, está usando un método cualitativo y el nivel de medición es nominal.

La estadística es igualmente útil en este caso, ya que permite observar las frecuencias de cada clase y establecer relaciones entre éstas.

ESTADÍSTICA E INFORME CIENTÍFICO

El informe es el acto de escribir los resultados de una investigación con el objeto de darlos a conocer, para que se publiquen. Incluye estándares técnicos para su organización y existen manuales de redacción, normativos tanto en su estructura como en su estilo. Uno muy conocido es el *Manual* de la *APA* (American Psychological Association), que es ya considerado un estándar internacional. Se trata de lograr que el informe sea ordenado, completo y bien organizado para que el lector no sólo se dé cuenta de los resultados, sino de sus implicaciones, del modo como se hicieron las cosas y qué se tendría que hacer para reproducir el estudio.

La estadística desempeña un papel al informar los resultados. Allí deberán mostrarse cuadros y gráficas, así como describir verbalmente lo que se obtuvo (sin interpretar los resultados, lo que viene más adelante en la discusión y las conclusiones). Es importante mostrar los datos y señalar qué diferencias fueron significativas estadísticamente.

Si no quiere leer sólo la información repetida en los libros de texto, sino también las investigaciones originales, debe consultar los artículos de las revistas especializadas. Esto es muy importante si uno quiere mantenerse al día en un campo, la información tarda entre 3 y 10 años en llegar a los libros. Para poder leer estos reportes y entenderlos, debe entender la estadística que usó el autor y qué significa; sólo así podrá seguir sus argumentos.

Gráficas

Las gráficas son un modo muy eficiente de mostrar resultados. Por lo general, los datos se muestran tanto en tablas (donde aparecen los números exactos), como en gráficas, las cuales permiten visualizar mejor la forma de los datos y el patrón que se da en ellos.

Resumen

La ciencia es una actividad muy compleja, por medio de la cual se busca entender la realidad. El objetivo de la ciencia es lograr teorías poderosas que le den sentido a esa realidad y la expliquen, lo que, a veces, lleva a mejorar la capacidad para anticipar y controlar los eventos en ella.

La ciencia busca establecer hechos para determinar qué tan verdaderas son las teorías, es decir, para ponerlas a prueba. Por lo común, esto se da en el contexto de la competencia entre teorías explicativas de un ámbito de la realidad. La coherencia lógica de las teorías, así como su congruencia con otras y con los hechos, es lo que determina su utilidad. La capacidad de las teorías para permitir la aventura en zonas desconocidas de la realidad es otro factor importante para su evaluación.

Los experimentos son una manera rigurosa de establecer los hechos. La estadística ayuda a la experimentación a obtener conclusiones útiles, claras y válidas; por tanto, existe una relación íntima entre estadística e investigación, la estadística permite lograr dichas conclusiones. Incluso, para entender los informes de investigación, es indispensable saber estadística.

En este capítulo se muestra la importancia de la estadística para el desarrollo científico y profesional de los psicólogos, pedagogos, sociólogos, antropólogos y otros especialistas en las áreas de ciencias del comportamiento.

PARTE 2

Modelos determinísticos

> *La naturaleza ha dado a nuestro espíritu*
> *una sed insaciable de verdad.*
>
> Cicerón

Capítulo 2

Descripción de datos

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector sea capaz de explicar y realizar las diferentes representaciones gráficas, distribuciones de frecuencia con sus respectivas curvas y aplicar los procedimientos para calcular las medidas de tendencia central y dispersión, tanto para datos agrupados como no agrupados.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Diseñar y construir una distribución de frecuencias
- Interpretar la información que se representa en las siguientes gráficas: de barras, circulares, polígonos de frecuencias, histogramas, ojivas, diagramas de tallo y hojas, diagramas de Pareto y graficas de cajas.
- Diferenciar los procedimientos para el cálculo de las medidas de tendencia central y de dispersión, tanto para datos agrupados como para los no agrupados.
- Interpretar el significado de la media aritmética, de la mediana, moda, rango, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, de asimetría y de curtosis.
- Reconocer la importancia de la obtención de la desviación estándar además de la media aritmética.
- Utilizar adecuadamente la media aritmética, geométrica y armónica.
- Explicar el uso de los siguientes estadísticos: cuartil, decil, percentil o centil y el intervalo percentil o rango intercuartílico.
- Diferenciar la notación y simbología poblacional con la muestral.
- Identificar las distribuciones de frecuencia para variables continuas y discretas, con sus respectivos estadísticos, graficas y aplicaciones.
- Reconocer la utilidad de los contenidos del capítulo en la resolución de problemas relacionados con la descripción de los datos en las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud.
- Obtener los estadísticos anteriores, utilizando las formulas adecuadas y una calculadora de bolsillo.
- Realizar un análisis estadístico descriptivo, utilizando MacStat.

INTRODUCCIÓN

La estadística se considera un método utilizado para recoger, organizar, concentrar, reducir, presentar, analizar, generalizar y contrastar los resultados numéricos (datos) de observaciones directas o indirectas de fenómenos reales, así como de la información obtenida a partir de la experimentación, para estar en condiciones de llevar a cabo tanto evaluaciones como conclusiones adecuadas, y tomar decisiones acertadas y confiables. En este capítulo se realiza un análisis estadístico que consistirá en organizar, concentrar, reducir y presentar en forma gráfica la información contenida en una muestra representativa de una población. Dicho análisis estadístico es de una sola variable, entendiendo por variable aquella característica susceptible de medirse, como la temperatura, el coeficiente de inteligencia, etcétera.

Una variable se clasifica como *continua* cuando la medición de una característica no presenta saltos ni rupturas, como la edad cronológica de una persona, la cual varía en años, meses, semanas, días, horas, minutos, segundos, décimas de segundo, etc. En cambio, en la variable *discreta*, aunque puede seguir una razón de cambio, no hay continuidad, en otras palabras, existe una ruptura. Por ejemplo, el número de hijos que tienen las personas de un grupo, que puede ser cero hijos, uno, dos, etcétera.

DATOS AGRUPADOS

GRÁFICAS Y DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA

Para la mayoría de las personas cuando los datos se presentan en forma numérica, tienen poco significado o carecen de él. En cambio, si se representan gráficamente, resultan muy eficaces para facilitar la comprensión y permiten extraer conclusiones acerca del comportamiento real de la variable. Pero es necesario que el impacto visual de la representación gráfica resuma la información, en forma clara, concisa y atractiva.

Gráfica circular (o de sectores)

Este método gráfico es uno de los más simples y usuales, y un instrumento auxiliar de análisis y presentación de la información, que resulta muy valioso para el investigador. Éste, como un diagrama en forma de círculo, es particularmente útil para visualizar las diferencias de frecuencia entre algunas categorías de nivel nominal.

■ Ejemplo 1

En la figura 2.1 se representa una población (en determinado año) de 5000 estudiantes de la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), considerando únicamente la variable *sexo*.

En esta gráfica se representa la correspondencia entre los 360 grados de circunferencia, es decir, el círculo completo, con 100% de las observaciones, por tanto, para hacer esta gráfica es necesario tener los datos en porcentajes.

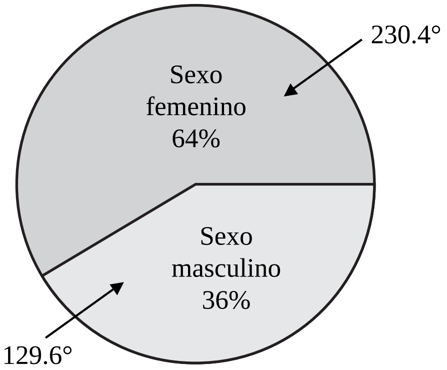
En los 5000 estudiantes, 64% está constituido por mujeres y 36% por hombres; para obtener la proporción de grados (el círculo tiene 360º), aplique una regla de tres en la siguiente forma, tomando, en este caso, el dato del porcentaje de las mujeres

$\frac{360º}{100\%} = \frac{x}{64\%}$ despejando x la cantidad de grados correspondientes al 64% es igual a 230.4º.

Se ubica esta cantidad en un círculo y obtiene lo siguiente:

Sexo	**Frecuencia (*f*)**	**Porcentaje (%)**	**Grados º**
Femenino	3200	64	230.4
Masculino	1800	36	129.6
Total	5000	100	360

Figura 2.1 Gráfica circular

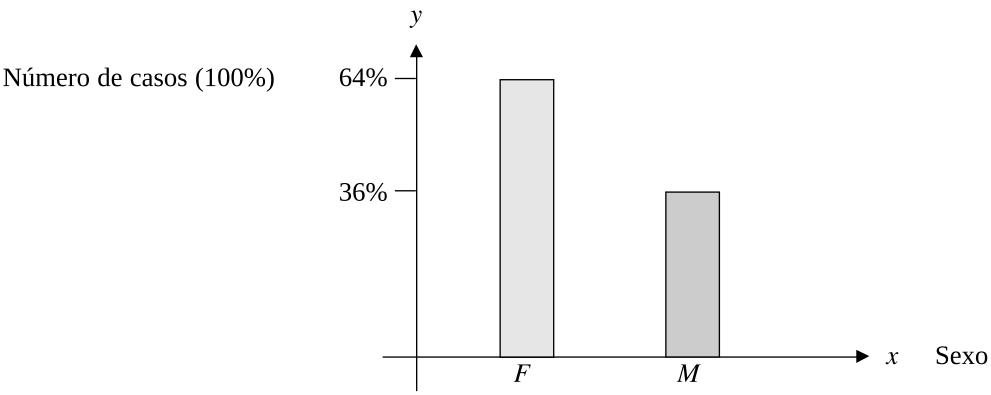


Gráfica de barras

Consiste en un conjunto de columnas separadas que representan la frecuencia o el porcentaje de cada uno de los valores o categorías de la variable de interés.

Según el caso anterior, donde 64% son mujeres y 36% hombres, la gráfica de barras sería la que se muestra en la figura 2.2, donde el eje horizontal (x) representa la variable de interés (sexo) y el eje vertical (y) representa la frecuencia (número de casos).

Figura 2.2 Gráfica de barras 1



■ Ejemplo 2

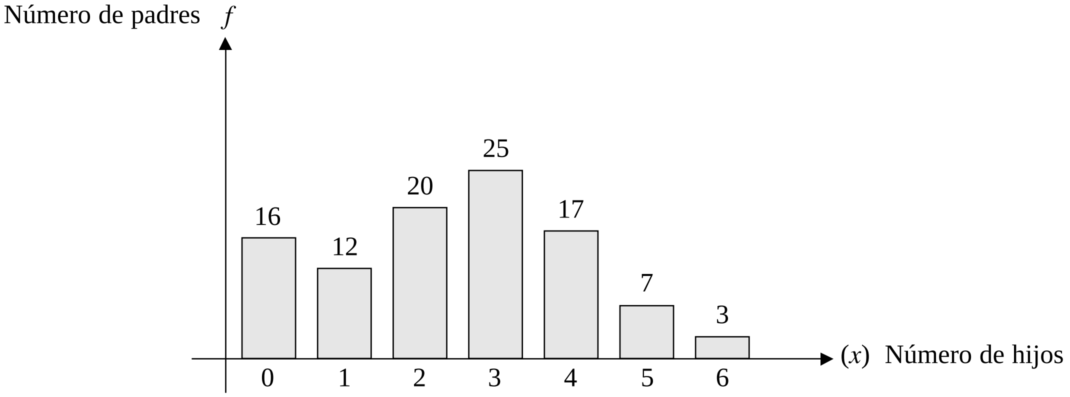
En una empresa se entrevistó a todos los empleados que estaban por cumplir 20 años de servicio; entre las preguntas de dicha entrevista, considere únicamente la que hace referencia el número de hijos que tienen.

A continuación, aparecen los datos obtenidos, organizados en una tabla de distribución de frecuencias. Una forma común de organizar un conjunto de datos, es agrupándolos en intervalos, categorías o clases, indicando la frecuencia o número de casos de cada uno de ellos. Con estos datos, se ha construido una gráfica de barras (figura 2.3).

x	***f***
Número de hijos	**Frecuencia**[†]
0	16
1	12
2	20
3	**25**
4	17
5	7
6	3
	100

Cuando la variable de interés es *discreta*, como en este ejemplo, una primera medida de tendencia central que puede analizarse es la moda, en otras palabras, el dato que tiene la mayor frecuencia de ocurrencia. En este caso, la frecuencia mayor es 25 y la moda 3, que representa 25% de casos.

Figura 2.3 Gráfica de barras 2



Nota: El número de padres equivale a la frecuencia de los niveles de la variable (número de hijos).

[†] Es el número de veces (casos) que ocurre un evento, que pueden ser calificaciones, observaciones, mediciones, etcétera.

Diagrama de tallo y hojas

Los diagramas de tallo y hojas fueron desarrollados por primera vez en 1977. Representan una alternativa sencilla para el histograma, y son más útiles para resumir y describir datos cuando éstos no rebasan los cien. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con un histograma, un diagrama de tallo y hojas no pierde los datos originales.

Este tipo es una gráfica donde se presenta un conjunto de datos. Las decenas se consideran de diagrama el tallo y las unidades las hojas, las cuales deben siempre ubicarse a la derecha de éste. Así, el tallo se convierte en el eje principal y las hojas en los ejes secundarios. Una de las ventajas del diagrama es que permite visualizar si los datos se distribuyen en forma simétrica.

■ Ejemplo 3

Al iniciar el torneo todos los miembros del equipo universitario de futbol, integrado por 35 jugadores, se pesan. Al terminar, se obtienen los siguientes valores en kilogramos:

50	52	61	64	67	70	82
65	73	66	79	65	73	75
51	63	75	80	62	68	84
58	67	70	85	64	66	80
91	89	73	65	66	67	79

Para hacer un diagrama de tallo y hojas, deben seguirse los siguientes pasos:

Paso 1. Para cada uno de los valores, el primer dígito se convierte en el tallo y el segundo en la hoja.

Paso 2. Se ubican los tallos en orden ascendente a la izquierda de una línea vertical.

Paso 3. Se coloca el segundo dígito a la derecha de dicha línea, enfrente de su dígito principal (tallo).

Paso 4. En el ejemplo, para la construcción de la gráfica, el número más pequeño es 50. Entonces el tallo es 5 y la hoja 0.

Paso 5. A continuación se localizan todas las decenas 5, el orden no importa.

Paso 6. Los dígitos 2, 1 y 8, son las hojas y el diagrama queda en la siguiente forma:

5	0 2 1 8
6	1 4 7 5 6 5 3 2 8 7 4 6 5 6 7
7	0 3 9 3 5 0 3 5 9
8	0 5 9 2 4 0
9	1

Se observa que la mayoría de los pesos, 15 (43%), se encuentra en la decena 6.

Existe otra opción para integrar un diagrama de tallo y hojas. En lugar de distribuirlos en decenas, pueden hacerse intervalos de tamaño (dos, tres, ..., diez, etc.). Si se hace un diagrama con intervalos de tamaño cinco, se tiene:

50-54	0 2 1
55-59	8
60-64	1 4 3 2 4
65-69	7 5 6 5 8 7 6 5 6 7
70-74	0 3 3 0 3
75-79	9 5 5 9
80-84	2 0 4 0
85-89	5 9
90-94	1

La mayoría de los dígitos se ubican en la decena 6, pero con mayor precisión en el intervalo 65-69.

Histograma

Este diagrama es útil cuando se trata de representar distribuciones de frecuencia cuya variable es continua, y viene dada en intervalos o clases; dicha gráfica se define y construye como la gráfica de barras, con la diferencia de que las columnas no están separadas, sino unidas, lo que le da continuidad.

Figura 2.4 Modelo de histograma

Polígono de frecuencias

Es una gráfica lineal y se construye uniendo, por medio de segmentos, los puntos medios superiores (marcas de clase) de cada una de las columnas que forman el histograma.[†] El polígono de frecuencias puede contener una amplia variedad de categorías o intervalos y tiende a destacar la continuidad a lo largo de una escala; por tanto, es útil para representar puntuaciones[††] ordinales y de intervalos.

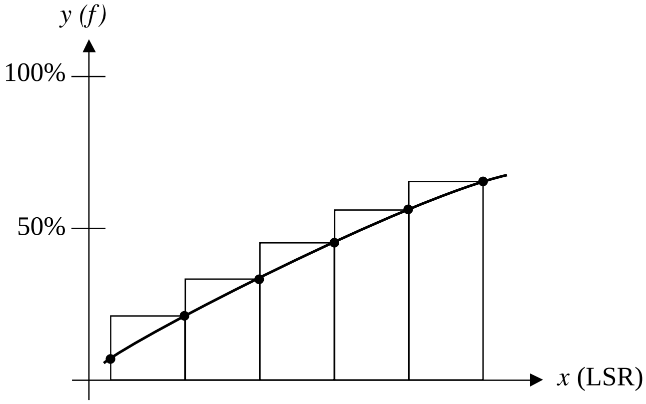
[†] En este tipo de representación se asume que las frecuencias se ubican en las marcas de clase.

[††] Puntuaciones, datos, calificaciones, observaciones, mediciones, etcétera.

Polígono de frecuencias acumuladas u ojiva

La representación gráfica de frecuencias acumuladas (sumadas progresivamente) se denomina *polígono de frecuencias acumuladas* y también recibe el nombre de *ojiva* o *diagrama de Galton*. Se obtiene uniendo, mediante una línea continua, los puntos cuyas ordenadas representan las frecuencias acumuladas de los intervalos y su abcisa, el límite superior real (LSR) de cada uno de ellos. La frecuencia acumulada de cada intervalo representa el número total de casos, dentro y debajo de un intervalo de clase en particular, como se muestra en la figura 2.5.

Figura 2.5 Representación de un polígono de frecuencias acumuladas



TABLAS DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Construcción y representación gráfica

El procedimiento para elaborar una distribución de frecuencias, y su tabla respectiva, se describirá con base en un ejemplo. En un programa de autocontrol personal del peso, aplicado a 90 personas, los kilogramos que éstas perdieron al terminar dicho programa se muestran a continuación:

Pérdida de peso (kg)									
15	8	12	18	44	30	15	18	23	6
23	16	20	17	21	12	12	23	25	13
19	17	17	28	13	17	17	28	18	16
20	7	14	8	15	27	10	19	13	15
18	10	8	11	16	40	18	21	14	27
15	32	28	22	10	9	18	12	25	25
18	20	21	18	18	16	9	8	21	17
29	23	14	14	25	15	12	10	20	16
24	19	15	11	21	12	15	8	17	19

Paso 1. ***Agrupamiento u ordenación***. Se forma una tabla ordenando progresivamente los datos, aunque se repitan:

6	10	12	14	16	17	18	20	23	27
7	10	12	15	16	17	18	20	23	28
8	10	12	15	16	17	18	21	23	28
8	10	13	15	16	18	19	21	24	28
8	11	13	15	16	18	19	21	25	29
8	11	13	15	17	18	19	21	25	30
8	12	14	15	17	18	19	21	25	32
9	12	14	15	17	18	20	22	25	40
9	12	14	15	17	18	20	23	27	44

Paso 2. ***Marcas de repetición***. Después de ordenar los datos, se forma otra tabla en la que se indican con rayas (/) las veces que se repite cada dato:

6	/	19	////	32	/
7	/	20	////	33	
8	/////	21	/////	34	
9	//	22	/	35	
10	////	23	////	36	
11	//	24	/	37	
12	//////	25	////	38	
13	///	26		39	
14	////	27	//	40	/
15	////////	28	///	41	
16	/////	29	/	42	
17	///////	30	/	43	
18	/////////	31		44	/

Paso 3. ***Frecuencias***. La siguiente tabla que se forma será similar a la anterior, pero en lugar de rayas o marcas, se pondrá el número de ellas. Los números obtenidos se llaman *frecuencias*, puesto que indican las veces que se repite un dato. En esta tabla, *x* representa los datos (kilogramos perdidos) y *f* su frecuencia.

x	***f***	***x***	***f***	***x***	***f***
6	1	19	4	32	1
7	1	20	4	33	0
8	5	21	5	34	0
9	2	22	1	35	0
10	4	23	4	36	0
11	2	24	1	37	0
12	6	25	4	38	0
13	3	26	0	39	0
14	4	27	2	40	1
15	8	28	3	41	0
16	5	29	1	42	0
17	7	30	1	43	0
18	9	31	0	44	1

Paso 4a. ***Clasificación en forma práctica***. Los datos se agrupan en intervalos o clases, que pueden ser de longitudes: 2, 3, 5, etc. A continuación se muestra para cada una de ellas:

Clases de tamaño 2					
x	*f*	*x*	*f*	*x*	*f*
6–7	2	20–21	9	34–35	0
8–9	7	22–23	5	36–37	0
10–11	6	24–25	5	38–39	0
12–13	9	26–27	2	40–41	1
14–15	12	28–29	4	42–43	0
16–17	12	30–31	1	44–45	1
18–19	13	32–33	1		

Clases de tamaño 3			
x	*f*	*x*	*f*
6–8	7	27–29	6
9–11	8	30–32	2
12–14	13	33–35	0
15–17	20	36–38	0
18–20	17	39–41	1
21–23	10	42–44	1
24–26	5		

Clases de tamaño 5			
x	*f*	*x*	*f*
6–10	13	26–30	7
11–15	23	31–35	1
16–20	29	36–40	1
21–25	15	41–44	1

Es recomendable que los datos se distribuyan entre 5 y 20 clases; esto es, que haya 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 clases o intervalos. En el paquete MacStat se brinda la opción de 3 a 25 intervalos.

Paso 4b. ***Clasificación en forma analítica***. En el ejemplo, el tamaño de clase será 5 y la serie de datos irá en forma creciente, es decir, de 6 a 44 (aunque puede agruparse también en forma decreciente, de 44 a 6). Ahora se determina la amplitud de variación de la siguiente manera:

$$\text{Amplitud } (A) = \text{Puntuación máxima} - \text{Puntuación mínima}$$

De modo que

$$A = 44 - 6 = 38$$

Por tanto,

Número de intervalos o clases = $\frac{38}{5}$ = 7.6, en este texto se denotará por k ($k = 7.6$). Y este valor se redondea al entero próximo ($k = 8$).

En este caso, para tratar de aproximar lo más posible y obtener el intervalo más exacto, se lleva a cabo el siguiente procedimiento: se aumenta un punto en el extremo superior y se disminuye un punto en el extremo inferior de los datos de la tabla (la frecuencia para estos datos agregados es de 0).

Por tanto, la amplitud queda como

$$A = 45 - 5 = 40$$

Por consiguiente:

Tamaño del intervalo $= \frac{40}{8} = 5,$ donde $k = 8$ y el tamaño del intervalo se denotará por a,

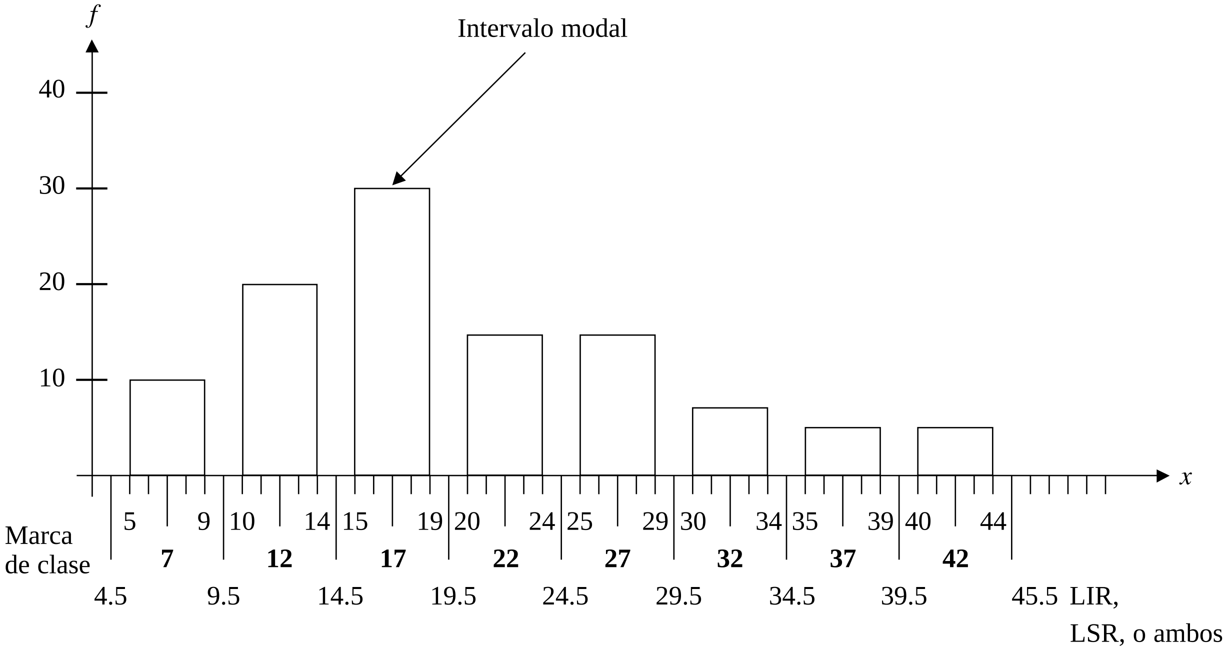
$$a = 5$$

De este modo, la tabla quedará finalmente así:

x	***f***
5–9	9
10–14	19
15–19	33
20–24	15
25–29	10
30–34	2
35–39	0
40–44	2

Y su presentación gráfica será la figura 2.6.

Figura 2.6 Representación gráfica del tamaño de clase



Paso 5. ***Marcas de clase (MC) e intervalo modal (IM)***. La marca de clase, o punto medio de clase, (promedio del intervalo) se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{LI + LS}{2}$$

donde:

x = Marca de clase

LI = Límite inferior de clase (o intervalo)

LS = Límite superior de clase

■ Ejemplo 4

En el intervalo 5 – 9:

$$LI = 5,\ LS = 9$$

$$\therefore\ x = \frac{5+9}{2} = 7$$

La marca de clase suele llamarse *punto medio* y en los datos agrupados se considerará como x.

En el intervalo 10 – 14: $LI = 10$, $LS = 14$

o sea, $x = 12$.

Para la totalidad de las clases resulta, entonces:

LI – LS	***f***	***x***
5–9	9	7
10–14	19	12
15–19	33	17
20–24	15	22
25–29	10	27
30–34	2	32
35–39	0	37
40–44	2	42

Ahora, se señalan en negritas las marcas de clase en la gráfica anterior (figura 2.6).

El intervalo modal (*IM*) es el que contiene la mayor frecuencia. En consecuencia:

	LI – LS	***f***
	LI–LS	*F*
	5–9	9
	10–14	19
IM →	15–19	33
	20–24	15
	25–29	10
	30–34	2
	35–39	0
	40–44	2

En la gráfica se señala tambíen el intervalo modal (*IM*).

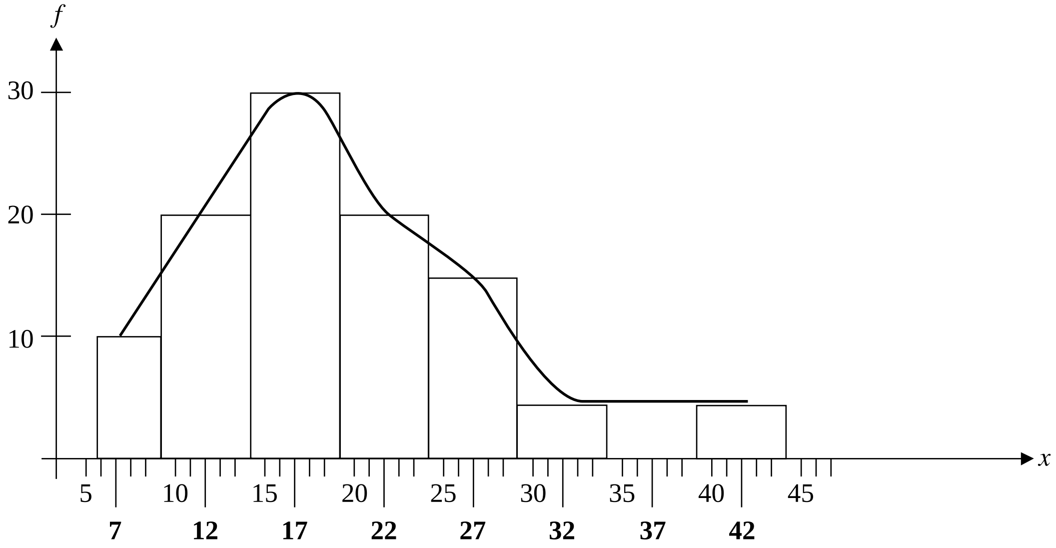
Paso 6 ***Límites inferior y superior reales***. Como se observa, hay puntuaciones que no están comprendidas. En los intervalos determinados en los pasos 4a y b, por ejemplo, si un dato cayera en 9, 4, o 14.3, no habría clase dónde ubicarlo, por lo que es necesario tomar límites más amplios para cada intervalo. Tales valores son el límite inferior real (*LIR*) y el límite superior real (*LSR*), y se obtienen de la manera siguiente:

a) Como la marca de clase es el punto medio de cada intervalo y la mitad de 5 es 2.5, entonces se tomará la *MC* de cada intervalo y se le restará 2.5, lo cual dará el *LIR*; si se le suma 2.5 se obtiene el *LSR*. Por consiguiente:

LI–LS	***f***	***x***	***LIR–LSR***
5–9	9	7	4.5–9.5
10–14	19	12	9.5–14.5
15–19	33	17	14.5–19.5
20–24	15	22	19.5–24.5
25–29	10	27	24.5–29.5
30–34	2	32	29.5–34.5
35–39	0	37	34.5–39.5
40–44	2	42	39.5–44.5

b) Una vez obtenidos el *LIR* y el *LSR*, se marcarán en la gráfica. Al señalarlos, el diagrama se convierte en una gráfica de barras y se observa que las mismas ya están unidas, lo que da un histograma. Tomando el punto medio en la parte superior de cada una de las barras y uniéndolas por líneas, se obtiene un *polígono de frecuencias* (figura 2.7).

Figura 2.7 Histograma y polígono de frecuencias



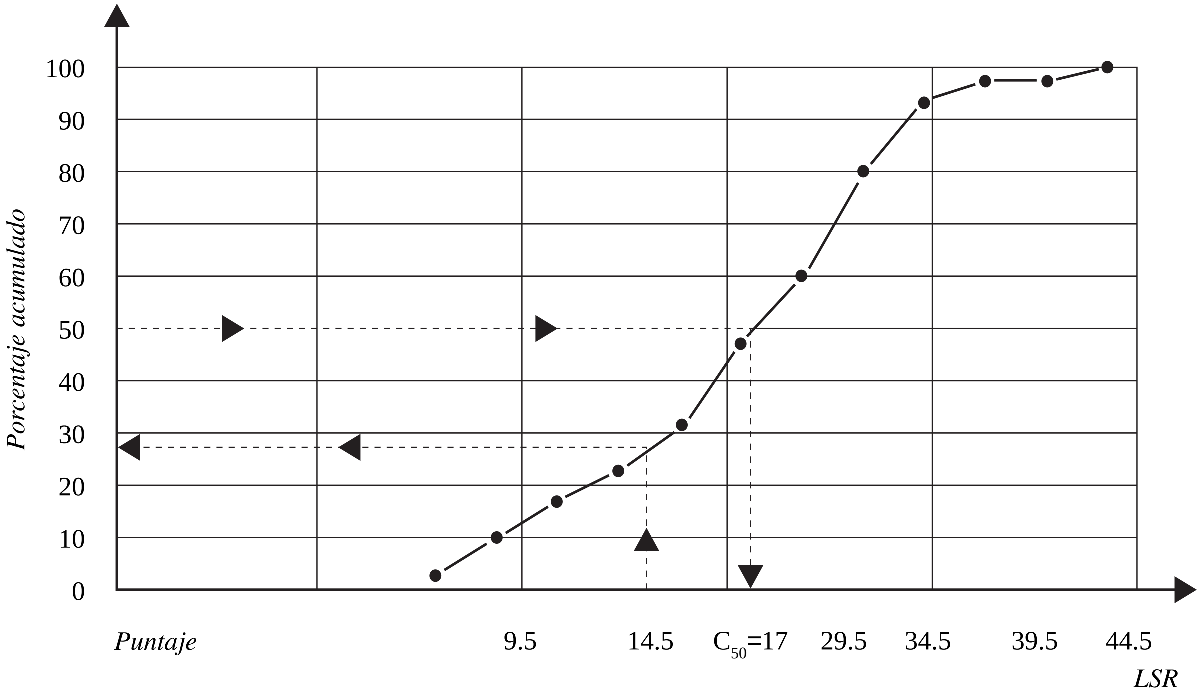
Paso 7. ***Frecuencia relativa*** **y** ***frecuencia relativa acumulada***. Se ordenan todas las columnas obtenidas anteriormente, y se agregan dos más, que son las de *frecuencia relativa* (f_r) y de *frecuencia relativa acumulada* (f_{ra}).

La columna de f_r se obtiene tomando el porcentaje de la frecuencia de cada intervalo y asignando 100% al número total de frecuencias (en este caso, 90 es 100%). La f_{ra} se obtiene sumando la frecuencia relativa de un intervalo a la del anterior (en el último intervalo siempre será 100%):

LIR–LSR	*LI–LS*	*f*	*x*	f_r%	f_{ra}%
4.5–9.5	5–9	9	7	10	10
9.5–14.5	10–14	19	12	21.11	31.11
14.5–19.5	15–19	33	17	36.66	67.77
19.5–24.5	20–24	15	22	16.66	84.43
24.5–29.5	25–29	10	27	11.11	95.54
29.5–34.5	30–34	2	32	2.22	97.76
34.5–39.5	35–39	0	37	0	97.76
39.5–44.5	40–44	2	42	2.22	100
		90		100	

Paso 8. ***Ojiva o diagrama de Galton***. Obtenidas las columnas de f_r y de f_{ra}, éstas se utilizarán para trazar la curva llamada *ojiva*, lo que se logra situando cada f_{ra} y uniendo con líneas todos los *LSR* de la gráfica. Resulta así el diagrama que se muestra en la figura 2.8.

Figura 2.8 Ojiva o diagrama de Galton



La ojiva obtenida es creciente (o positiva), debido a que los datos fueron dispuestos en forma ascendente. Si a partir de la tabla que a venido trabajando, se distribuyen los datos en forma descendente, se tendría:

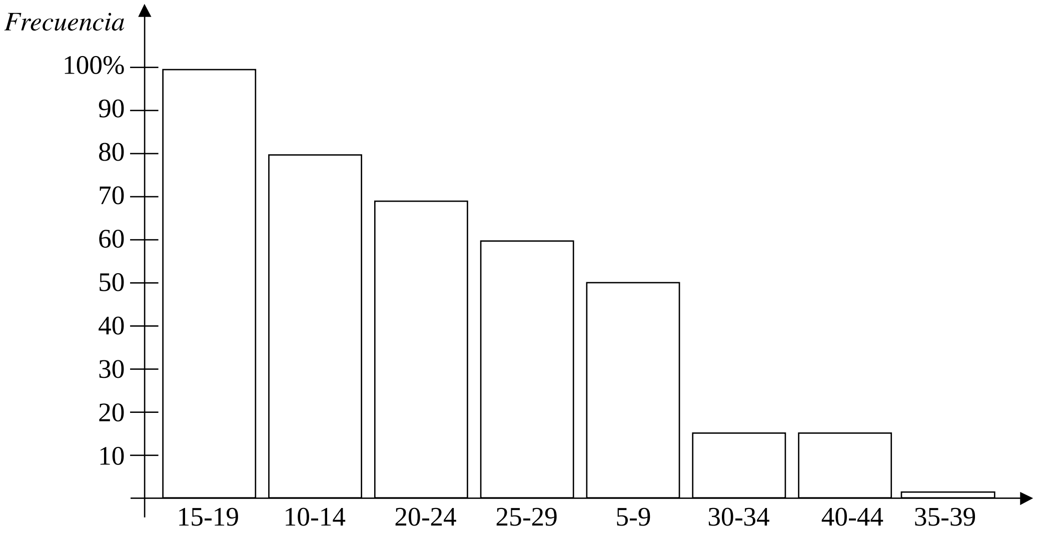
LIR–LSR	*LI–LS*	*f*	*x*	f_r%	f_{ra}%
39.5–44.5	40–44	2	42	2.22	2.22
34.5–39.5	35–39	0	37	0.0	2.22
29.5–34.5	30–34	2	32	2.22	4.44
24.5–29.5	25–29	10	27	11.11	15.55
19.5–24.5	20–24	15	22	16.66	32.21
14.5–19.5	15–19	33	17	36.66	68.87
9.5–14.5	10–14	19	12	21.11	89.98
4.5–9.5	5–9	9	7	10.0	100

La ojiva resultante sería decreciente (o negativa).

Diagrama de Pareto

Es una gráfica de barras, donde cada una de ellas representa un intervalo. Las barras se ordenan considerando la frecuencia absoluta de la más grande a la más pequeña. Con la distribución de los datos del ejemplo de pérdida de peso de las 90 personas, si construye un diagrama de Pareto.

Figura 2.9 Diagrama de Pareto



Cantidad	33	19	15	10				
Porcentaje	36.66	21.11	16.66	11.11	10	2.22	2.22	0
Porcentaje acumulado	36.66	57.77	74.43	85.54	95.54	97.77	100	

Agrupamiento de los datos

La información aportada por los datos (puntuaciones, calificaciones, etc.) se puede agrupar o concentrar en pequeños grupos (intervalos o clases); como ya se explicó en el ejemplo anterior, es recomendable que dichas clases sean del mismo tamaño, aunque en algunas no se tenga ningún dato (frecuencia cero). También es recomendable seleccionar una cantidad adecuada de intervalos (entre 5 y 20).

El tamaño y el número de clases se determina en forma empírica, dividiendo la amplitud (A = Valor o puntuación más alto – Valor o puntuación más bajo) entre el número de intervalos que desee tener; el cociente será el tamaño de los grupos. Suele ocurrir que a la amplitud se le tenga que aumentar una cantidad determinada con fines de redondeo, lo cual de ninguna manera afecta los datos originales y, por consiguiente, tampoco altera la información original.

El procedimiento para elaborar una distribución de frecuencias, concentrarla en una tabla o cuadro y representarla gráficamente, se describirá con base en este ejemplo: un psicólogo realiza un estudio para conocer el tiempo de reacción ante un estímulo visual (una luz roja) que se encienda en un momento determinado, como si fuera un semáforo. A cada uno de los participantes se le pide que accione un pedal, como si frenara un automóvil; al estar en un modelo de comportamiento de conductor de un vehículo, el tiempo de reacción es el que transcurre entre el encendido de la luz y el *frenado*, que se mide en segundos. En este estudio participan 270 personas, de un total de 300 que figuraban en la lista, o sea 90%.

0.20	0.74	1.10	1.34	1.48	1.64	1.90	1.94	2.13	2.22	2.26	2.44	2.62	2.81	2.95	3.23	3.60
0.22	0.75	1.11	1.34	1.50	1.65	1.90	1.95	2.13	2.22	2.26	2.44	2.63	2.83	2.96	3.24	3.61
0.30	0.77	1.13	1.34	1.50	1.65	1.90	1.95	2.15	2.23	2.28	2.45	2.64	2.82	2.97	3.25	3.62
0.31	0.80	1.20	1.35	1.50	1.65	1.90	1.95	2.16	2.23	2.28	2.46	2.65	2.82	3.00	3.28	3.70
0.40	0.81	1.22	1.36	1.53	1.66	1.90	1.96	2.16	2.23	2.29	2.48	2.70	2.83	3.02	3.29	3.74
0.44	0.82	1.23	1.38	1.54	1.70	1.90	1.98	2.17	2.23	2.31	2.49	2.71	2.83	3.05	3.31	3.75
0.50	0.87	1.25	1.38	1.56	1.71	1.91	1.99	2.18	2.23	2.32	2.50	2.71	2.83	3.05	3.33	3.76
0.53	0.88	1.28	1.39	1.57	1.72	1.91	2.01	2.18	2.24	2.32	2.50	2.72	2.84	3.06	3.39	3.78
0.54	0.93	1.30	1.39	1.57	1.74	1.92	2.02	2.18	2.24	2.32	2.51	2.78	2.84	3.08	3.40	3.81
0.60	0.95	1.30	1.41	1.57	1.80	1.93	2.05	2.19	2.24	2.36	2.52	2.78	2.84	3.10	3.40	3.90
0.63	0.98	1.32	1.42	1.58	1.80	1.93	2.06	2.19	2.25	2.36	2.53	2.79	2.85	3.12	3.41	3.95
0.68	1.00	1.32	1.44	1.59	1.81	1.93	2.07	2.19	2.25	2.37	2.54	2.80	2.85	3.13	3.43	4.00
0.70	1.01	1.33	1.45	1.60	1.83	1.93	2.07	2.20	2.25	2.38	2.56	2.80	2.85	3.14	3.45	2.24
0.70	1.03	1.33	1.46	1.62	1.85	1.94	2.07	2.20	2.25	2.39	2.56	2.80	2.85	3.16	3.50	1.64
0.72	1.03	1.33	1.46	1.63	1.86	1.94	2.10	2.21	2.25	2.40	2.60	2.81	2.90	3.20	3.51	
0.73	1.06	1.34	1.46	1.63	1.87	1.94	2.11	2.22	2.26	2.42	2.62	2.81	2.91	3.21	3.55	

Paso 1. Se busca el valor más grande y el más pequeño.

Se observa que el valor más grande es igual a 4.00; éste suele denominarse *valor máximo* o *límite superior*, y el más pequeño es 0.20, que suele llamarse *valor mínimo* o *límite inferior*.

Paso 2. Se obtiene la amplitud A, que usualmente se llama *rango* (R).

$$A = Rango = 4.0 - 0.2 = 3.8$$

$$\boxed{R = 3.8}$$

Paso 3. Se obtiene el rango incluyente R'(*es* R aumentado un cierto valor, de tal forma que sea divisible entre el número de clases deseado. En este caso se puede utilizar el 4 o 3.9, ya que 4 puede dividirse entre 5, 8, 10, y 3.9 entre 13. Aquí se dividirá entre 13 (lo deseable es tener el mínimo de decimales posible).

Paso 4. Se calcula el tamaño del intervalo a:

$$a = \frac{R'}{k} \text{ y como } R' = 3.9 \text{ y } \boxed{k = 13}\text{, entonces}$$

$$\boxed{a = 0.3}$$

Paso 5. Se calcula el límite inferior real (*LIR*) y el límite superior real (*LSR*).

Se obtiene la diferencia entre R' y R

$$R - R = 3.9 = 3.8 = 0.1$$

A esto suele llamársele *incremento* y se denota por $\Delta = 0.1$. Este incremento se divide entre dos, ya que en cualquier conjunto de datos hay dos extremos: el superior e inferior.

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

Calculando el LIR, en la siguiente forma, debido a que LI es 0.20:

$$LIR = 0.20 - 0.05 = 0.15 \quad \boxed{LIR = 0.15}$$

y como $LS = 4.00$, entonces:

$$LSR = 4.00 + 0.05 = 4.05 \quad \boxed{LSR = 4.05}$$

Paso 6. Se forma la tabla de distribución de frecuencias con los datos obtenidos y se asigna la frecuencia correspondiente para cada intervalo o clase.

Una vez establecido el $LIR = 0.15$ se le suma la constante $a = 0.3$, por lo que el LSR de esa primera clase es 0.45, el límite inferior real de la segunda clase es también 0.45, y así sucesivamente, hasta cumplir el número de intervalos propuesto ($k = 13$) y obtener el último LSR.

LIR–LSR	***f***
0.15–0.45	6
0.45–0.75	11
0.75–1.05	14
1.05–1.35	20
1.35–1.65	31
1.65–1.95	32
1.95–2.25	42
2.25–2.55	34
2.55–2.85	30
2.85–3.15	19
3.15–3.45	15
3.45–3.75	9
3.75–4.05	7

Otra forma de obtener el número de intervalos (k) es aplicando la ley de Sturges, que es una regla empírica determinada con base en la siguiente expresión:

$$k = 1 + 3.3\, Log_{10} n$$

para el ejemplo $n = 270$, $Log_{10}\, 270 = 2.4314$

$$k = 1 + 3.3\,(2.4314) = 9.02362$$

y como k debe ser un número entero, se redondea

$$\boxed{k = 9}$$

SUMATORIAS

Con el objeto de describir las propiedades y características de un conjunto de datos, el investigador utiliza ciertos modelos estadísticos, y debido a que muchas fórmulas contienen en forma exhaustiva las sumatorias, es necesario conocer las propiedades del operador suma (Σ).

Definición 1
Dado *n*, un entero positivo, y sean *x*, *y* dos variables

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

■ Ejemplo 5

a) $$\sum_{j=1}^{3} \left(x_j - y_j\right) = \left(x_1 - y_1\right) + \left(x_2 - y_2\right) + \left(x_3 - y_3\right)$$

b) $$\sum_{i=1}^{3} 2x_i^3 = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 2x_3^3$$

c) $$\sum_{k=3}^{4} \left(x_k - 5\right) = \left(x_3 - 5\right) + \left(x_4 - 5\right)$$

Propiedades más importantes del operador (Σ)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_1}$$

Esto es debido a:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right) = \left(x_1 + y_1\right) + \left(x_2 + y_2\right) + \ldots + \left(x_n + y_n\right)$$

agrupando las variables *x*, *y* por separado:

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) + \left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)$$

y por definición lo anterior es:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right)$$

■ Ejemplo 6

$$\sum_{i=1}^{4} \left(x_i^2 - x_i\right)$$

$$\text{Si} \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 60 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i = 12$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(x_i^2 - x_i\right) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i$$

sustituyendo lo anterior se tiene:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(x_i^2 - x_i\right) = 60 - 12 = 48$$

Si k es una constante:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} kx_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Si desarrolla el primer miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} kx_i &= kx_1 + kx_2 + \ldots + kx_n \\ &= k\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \\ &= k\sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

■ Ejemplo 7

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} 13 = 3(13) = 39}$$

Si k es una constante:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} k = nk}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = k + k \ldots + k = nk$$

"n" veces

■ Ejemplo 8

Si $k = 11$ y $n = 4$:

$$\sum_{i=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{4} 11 = 4(11) = 44$$

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

En ocasiones es necesario considerar o disponer de valores que sean representativos de la distribución del conjunto de datos que forman las puntuaciones, a fin de poder contestar preguntas como las siguientes:

- ¿En qué forma es posible dividir en dos intervalos un conjunto de mediciones de valores, de manera que un grupo contenga la mitad superior del intervalo (50%) y el otro la mitad inferior (el restante 50%)?
- ¿Cuál sería la puntuación promedio de dichos datos (los dos grupos o el total de la muestra)?
- ¿Cuál es la puntuación más común (la que ocurre con más frecuencia en los datos)?

Las preguntas anteriores pueden ser contestadas utilizando las medidas de tendencia central. Estos valores estadísticos, por lo general, se encuentran en el centro de la distribución, cuando se observa una concentración de casos en el centro. Las tres medidas de tendencia central utilizadas principalmente, y que responden a las tres preguntas anteriores son la mediana (*Me*), la moda (*Mo*) y la media aritmética $(\bar{x})$.

Mediana (Me)

Se define como el punto medio geométrico de la distribución de datos agrupados, o sea, el punto que divide a dicha distribución en dos mitades respecto de las frecuencias. Esta medida de tendencia central es de gran utilidad cuando se desconocen las puntuaciones extremas, y se considera la forma de la distribución de frecuencias. Su fórmula de cálculo es la siguiente:

$$Me = LIR + \left[\left(\frac{\frac{n}{2} - f_{aa}}{f}\right) a\right]$$

donde:

LIR = Límite inferior real del intervalo, donde f_{ra} está cerca del 50%.
n = Número de casos.
f_{aa} = Frecuencia acumulada anterior al intervalo, donde cae la mediana (50%).
f = Frecuencia absoluta donde cae la mediana.
a = Tamaño del intervalo.

Moda (Mo)

Es el dato que ocurre más veces (que tiene la mayor frecuencia de ocurrencia). Para datos agrupados se obtiene utilizando la siguiente fórmula:

$$Mo = LIR + \left[\left(\frac{f_p}{f_a + f_p}\right) a\right]$$

donde:

LIR = Límite inferior real del intervalo modal.
f_p = Frecuencia absoluta posterior a la frecuencia del intervalo modal.
f_a = Frecuencia absoluta anterior a la frecuencia del intervalo modal.
a = Tamaño del intervalo.

Media aritmética ($\bar{x}$)

Esta medida suele recibir también el nombre de *media* o *promedio*, y es el valor estadístico de tendencia central más utilizado, su confiabilidad depende de la forma de su distribución y de la existencia o no de valores extremos. Por lo general, es una buena representación de un conjunto de datos y se le puede considerar como el punto de equilibrio (o "centro de gravedad") de un conjunto de mediciones o puntuaciones; en el caso de que no se encuentren agrupadas en intervalos, se define como la suma de todas ellas, dividida entre el total de casos.

La fórmula para datos no agrupados es: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

En el caso de los datos agrupados, la definición varía, ya que intervienen conceptos nuevos como marca de clase y frecuencia, pero el concepto de media prevalece. La marca de clase se obtiene sumando el límite inferior y el límite superior de cada intervalo y dividiendo dicha suma entre 2 (se obtiene así un promedio por cada clase). Tal promedio es multiplicado por su frecuencia correspondiente. Una vez que se obtiene esto para cada intervalo o clase, se suman todos los resultados y se divide la suma entre el número total de casos, que equivale a la suma de las frecuencias. Es decir:

Marca de clase $= \dfrac{LI + LS}{2} = x = \dfrac{LIR + LSR}{2}$

Sucesivamente tiene:

$$xf, \quad \sum(fx)$$

$$\sum_{i=1}^{q} f_i = n \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{q}(f_i\, x_i)}{\sum_{i=1}^{q} f_i}$$

donde:

q = número de clases
$\bar{x}$ = media aritmética para datos agrupados

■ Ejemplo 9

Considerando los datos del ejercicio del programa de autocontrol para pérdida de peso, aplicado a 90 personas, calcule a continuación tanto media como mediana y moda, cuando $a = 5$.

a) Cálculo de la media aritmética.

Paso 1. Se calcula la marca de clase para cada uno de los intervalos:

$$\frac{5+9}{2}=7$$

$$\vdots$$

$$\frac{40+44}{2}=42$$

Paso 2. Se hacen las operaciones para obtener la columna *fx*:

LIR–LSR	***f***	***x***	***fx***
4.5–9.5	9	7	63
9.5–14.5	19	12	228
14.5–19.5	33	17	561
19.5–24.5	15	22	330
24.5–29.5	10	27	270
29.5–34.5	2	32	64
34.5–39.5	0	37	0
39.5–44.5	2	42	84

Paso 3. Se determina Σf y $\Sigma (fx)$ con los resultados anteriores:

$$\sum f=9+19+\ldots+2=90,\qquad n=\sum f=90$$

$$\sum(fx)=63+228+\ldots+84=1600$$

Paso 4. Se sustituye en la fórmula de la media aritmética y se obtiene así:

$$\bar{x}=\frac{1600}{90}=17.7778$$

b) Para calcular las otras medidas de tendencia central, la mediana y moda, aplique, respectivamente, las siguientes fórmulas a la tabla que se presenta después:

$$Me=LIR+\left(\frac{\frac{N}{2}-f_{aa}}{f}\right)a;\text{ asimismo,}$$

$$Mo = LIR + \left(\frac{f_p}{f_a + f_p}\right) a$$

LIR (*IM*) →

LIR*–*LSR	***f***	***f_a***	***x***
4.5–9.5	9	9	7
9.5–14.5	19*	28^{++}	12
14.5–19.5	33^{+}	61	17
19.5–24.5	15**	76	22
24.5–29.5	10	86	27
29.5–34.5	2	88	32
34.5–39.5	0	88	37
39.5–44.5	2	90	42
	$n = 90$		

← Valor de
la moda en
el análisis
exploratorio

* Frecuencia anterior f_a.
** Frecuencia posterior f_p.
\+ Frecuencia absoluta donde cae la mediana.
\+\+ Frecuencia acumulada anterior a f.

LIR*–*LSR	***x***	***f***	***f_a***	***f_r(%)***	***f_{ra}(%)***
4.5–9.5	7	9	9	10	10
9.5–14.5	12	19	28	21.11	31.11
14.5–19.5	17	33	61	36.66	67.77
19.5–24.5	22	15	76	16.66	84.43
24.5–29.5	27	10	86	11.11	95.54
29.5–34.5	32	2	88	2.22	97.76
34.5–39.5	37	0	88	0	97.76
39.5–44.5	42	2	90	2.22	100
				100%	

En la tabla anterior se localizan todos los elementos que se requieren para calcular tanto la mediana (*Me*) como la moda (*Mo*).

Para obtener la mediana:

$LIR = 14.5$, ya que 50% está contenido en la $f_{ra} = 67.77\%$

donde:

$$n = 90,\ \frac{n}{2} = 45,\ \ a = 5$$

$$f_{aa} = 28$$

$$f = 33$$

Sustituya en la fórmula:

$$Me = 14.5 + \left(\frac{45 - 28}{33}\right) 5 = 17.076$$

Para obtener la moda:
LIR = 14.5, ya que 33 es la frecuencia más alta.

$$f_p = 15$$

$$f_a = 19$$

$$a = 5$$

Sustituya en la fórmula:

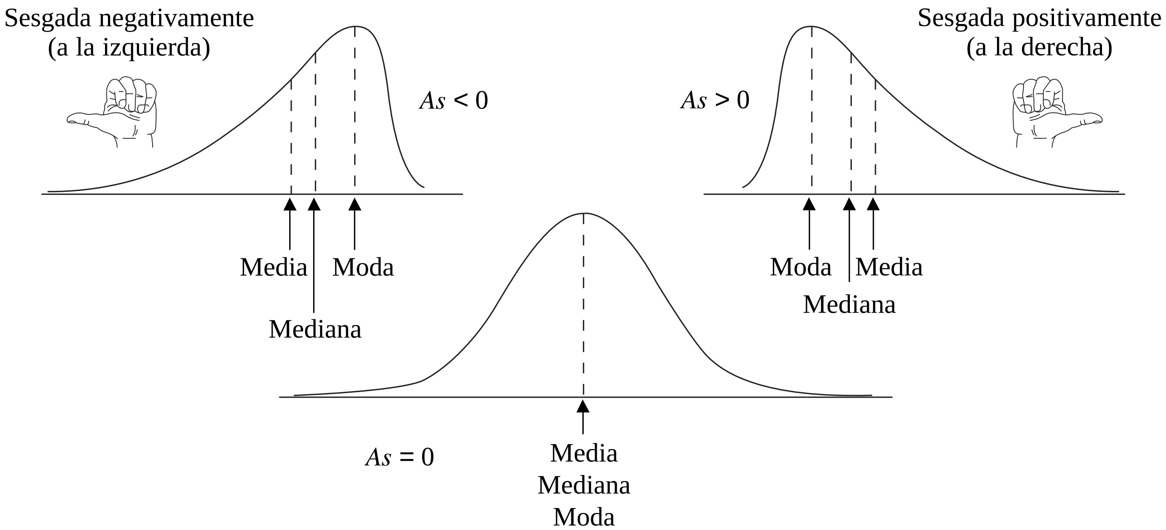
$$Mo = 14.5 + \left(\frac{15}{19 + 15}\right) 5 = 16.706$$

Asimetría (*As*)

En el caso de que la distribución esté sesgada, se dice que es asimétrica $As \neq 0$, o sea que una cola está más extendida que la otra.

La relación existente entre las tres medidas de tendencia central se muestra en forma gráfica:

Figura 2.10 Cuando una distribución es simétrica, su media, mediana y moda son iguales. De otra manera, la media y la mediana se cargan hacia los valores extremos, la media más que la mediana.



En el caso de que la distribución no esté sesgada, $As = 0$, existe una relación aproximada entre las tres medidas de tendencia central:

Media – moda = 3 (media – mediana)

y para obtener el coeficiente de asimetría se aplica $As = \frac{\bar{x} - Mo}{S}$

Es interesante destacar que en el caso de distribuciones asimétricas con pico muy agudo (curtosis alta, o sea, una curva leptocúrtica), la mediana constituye la medida de tendencia central más útil y representativa.

CUANTILAS

Un conjunto de puntuaciones o mediciones puede dividirse en cierto número de partes iguales mediante la selección de valores que correspondan a una posición determinada en dicho conjunto. Por ejemplo, la *mediana* divide un conjunto de valores dados en dos partes iguales, y su posición es, en consecuencia, a la mitad del mismo, de manera que 50% de las puntuaciones quedan a uno u otro lado de dicho valor estadístico.

En general, se les llama *cuantiles* (*cuantilas*) a estos valores con esa posición divisoria determinada. Pueden considerarse los siguientes cuantiles, además de la mediana:

a) cuartil (*cuartila*)
b) decil (decila)
c) centil (centila), percentil (porcentil)

que son, respectivamente, los cuantiles que corresponden a la división entre 4, 10 y 100 partes iguales del conjunto dado.

A continuación se describen estos valores característicos.

En forma gráfica

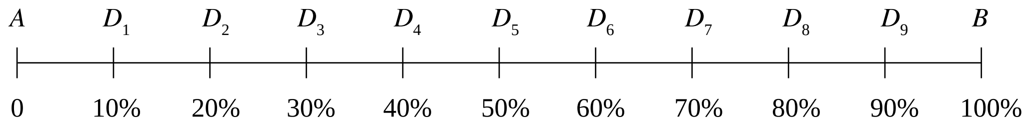
Centiles o *percentiles*.[†] Por lo general, las puntuaciones no elaboradas o crudas (las que se obtienen en forma directa al aplicar una *prueba psicológica* o, en general, cualquier medición) no indican nada en lo relativo al desempeño de las personas y del lugar que ocupan respecto del resultado de dicha prueba (o bien, de la medición de que se trate) respecto del grupo al que pertenecen. Por consiguiente, es necesario utilizar varios procedimientos estadísticos, los cuales serán útiles para describir la puntuación o calificación de un individuo particular en relación con otros valores.

Un procedimiento muy adecuado para la comprensión global de los datos obtenidos en un *test* psicológico o en una prueba de conocimientos, comprensión, etc., es determinar los denominados *centiles*. El *centil* de una distribución es el valor dado abajo del cual queda el porcentaje indicado de los valores del conjunto. Indica, entonces, la posición de una puntuación en una distribución porcentual (o en términos de porcentajes). Por ejemplo, si un estudiante obtuvo una calificación que fue más alta que 70% de las puntuaciones en la distribución de estas calificaciones, pero no superior a 71%, el centil correspondiente será el de 70. En otras palabras a tal estudiante le corresponde 70º (septuagésimo) centil.

Cuando se emplea el término *centil*, siempre se refiere a un punto en una distribución de puntuaciones o valores, por abajo del cual queda un porcentaje dado de los casos; así, el centil 45 de un conjunto total de 100 puntos es un valor o punto por debajo del cual quedan 45 calificaciones. Asimismo, un centil se representa por C_n (o por P_n, si se utiliza el término porcentil).

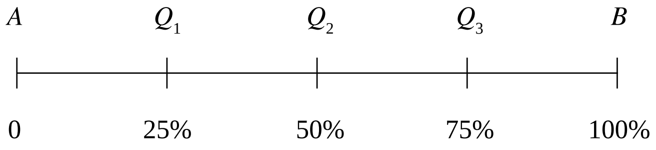
Deciles. Son los cuantiles que dividen una distribución en 10 tantos a intervalos, por lo que se tienen nueve puntos de división, los *deciles*, que originan los 10 intervalos.

Los deciles, representados por D_n, pueden marcarse en una gráfica como la siguiente:



[†] Aunque es de uso común el término *percentil*, es preferible emplear el de *centil*, que concuerda con el nombre de los otros cuantiles.

Cuartiles. Son los puntos que dividen a una distribución de valores en cuatro porciones iguales o intervalos. Se representan por Q_1, Q_2, Q_3 y se ilustran en el esquema siguiente:



Debe considerarse la relación que existe entre los centiles, deciles, cuartiles y la mediana; su relación en forma sinóptica se representa de la manera siguiente:

Cuartil 1: $Q_1 = C_{25}$ (centil 25).

Cuartil 2: $Q_2 = D_5 = Me$ (centil 50, decil 5 o mediana).

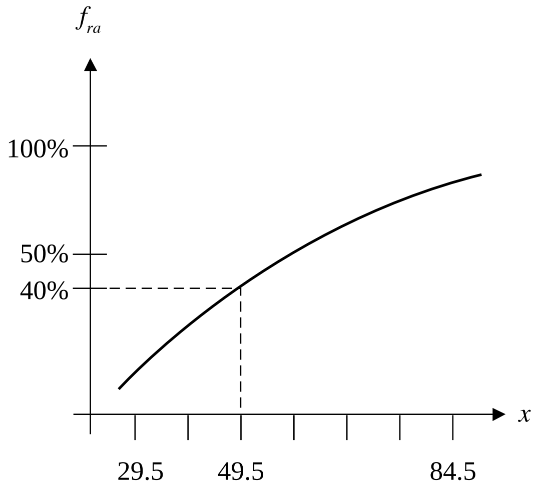
Cuartil 3: $Q_3 = C_{75}$ (centil 75).

La *ojiva de Galton* (el polígono de frecuencias relativas acumuladas) puede utilizarse en un análisis exploratorio, para ubicar cualquier *cuantil* (cuartiles, deciles, centiles o la mediana) en una distribución dada.

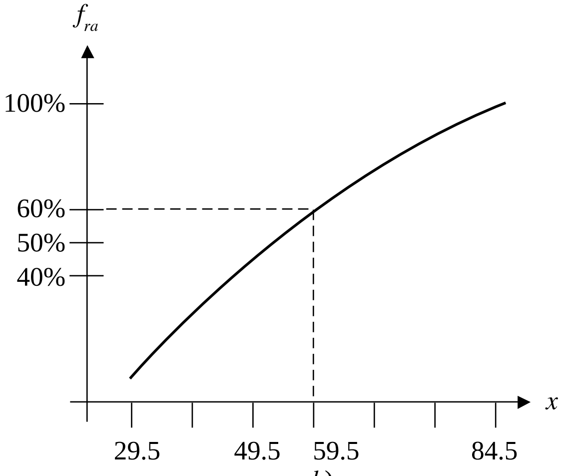
■ Ejemplo 10

En el caso de las siguientes ojivas se encuentra:

a) El centil de la puntuación 49.5.
b) La puntuación correspondiente a D_6 o C_{60}.
c) La mediana.



a)

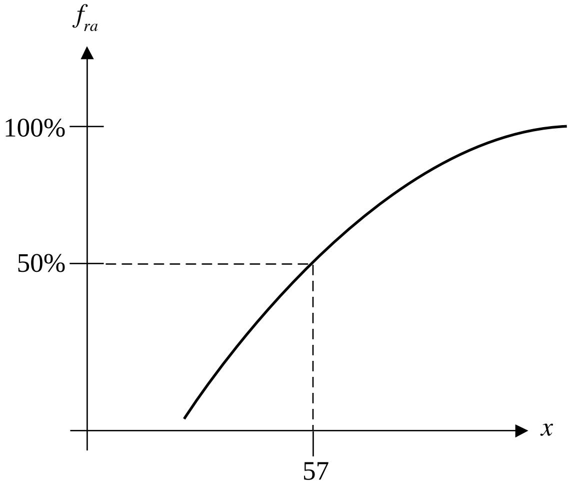


b)

a) Se localiza la calificación en el eje horizontal x (puntuaciones) y luego se levanta una línea vertical desde dicho eje hasta encontrar la ojiva; a partir del punto de intersección, se traza una línea horizontal hasta llegar al eje vertical f_{ra} (frecuencia relativa acumulada), donde se lee el centil (que es un valor porcentual) correspondiente a la puntuación buscada. Así, se tiene el centil 40.

b) En este caso, se invierte el proceso anterior, o sea, en el eje vertical (f_{ra}) se ubica el cuantil deseado, en este ejemplo, C_{60} o D_6; se traza luego una horizontal hasta la ojiva y, a partir del punto determinado, se lleva una vertical hasta el eje horizontal y se lee a continuación la puntuación o calificación correspondiente al cuantil anterior. En este caso, $C_{60} = 59.5$ (aproximadamente 60 puntos).

c) Se procede como en el inciso anterior, pero buscando en el eje vertical el valor 50% que, como se ha visto con anterioridad, corresponde al C_{50} o D_5 o Q_2, que equivalen a la mediana.



c)

Con este método, la mediana vale aproximadamente 57 puntos.

En forma analítica

Se utiliza el modelo para calcular la mediana en datos agrupados, donde $r = 1$

$$Me = LIR + \left(\frac{\frac{rn}{2} - f_{aa}}{f} \right) a$$

O el modelo de cuartiles (Q)

$$Q_r = LIR + \left(\frac{\frac{rn}{4} - f_{aa}}{f} \right) a$$

donde r = cuartil que se desea calcular, siendo 1, 2 o 3.

■ Ejemplo 11

Calcular el cuartil 1, $r = 1$ (o sea, el primer 25%).

$LIR = 9.5$ Debido a que el 25% está en la f_{ra}
$n = 90$ Es igual a 31.11%
$f_{aa} = 9$ $f = 19$
$a = 5$

Se ubica el 25% en la f_{ra} y está contenido en el 31.11%, la frecuencia absoluta $f = 19$ y como el tamaño del intervalo es 5.

Se sustituyen los valores y se obtiene:

$$Q_1 = 9.5 + \left(\frac{\frac{90}{4} - 9}{19} \right) 5 = 9.5 + \left(\frac{13.5}{19} \right) 5$$

$$Q_1 = 9.5 + 3.5526$$

$$Q_1 = 13.05$$

Deciles (D)

$$Dr = LIR + \left(\frac{\frac{rn}{10} - f_{aa}}{f} \right) a$$

donde $r = 1, 2, ..., 9$.

■ Ejemplo 12

Calcular el decil 8, es decir, el 80%.

$LIR = 19.5$
$r = 8$
$n = 90$
$f_{aa} = 61$
$f = 15$
$a = 5$

Sustituya los valores y obtiene:

$$D_8 = 19.5 + \left(\frac{\frac{8(90)}{10} - 61}{15} \right) 5 = 19.5 + \left(\frac{11}{15} \right) 5$$

$$D_8 = 19.5 + 3.666$$

$$D_8 = 23.17$$

Centiles (C)

$$C_r = LIR + \left(\frac{\frac{rn}{100} - f_{aa}}{f} \right) a$$

donde $r = 1, 2, ..., 99$.

■ Ejemplo 13

Calcular el centil 90, es decir, el 90%

$LIR = 24.5$
$r = 90$
$n = 90$
$f_{aa} = 76$
$f = 10$
$a = 5$

Sustituiya los valores y obtiene:

$$C_{90} = 24.5 + \left(\frac{\frac{90\ (90)}{100} - 76}{10} \right) 5 = 24.5 + 2.5$$

$$C_{90} = 27$$

RELACIÓN DE LA CURVA DE PORCENTAJES ACUMULADOS (OJIVA) Y LAS CUANTILAS

Cuando busca elaborar una tabla de normas centiles (o porcentiles), la manera más sencilla es utilizar la ojiva. Para ejemplificarlo, utilice los datos de la siguiente tabla, donde se muestran los intervalos en forma decreciente que en ocasiones se presentan de esta manera. Las mediciones son calificaciones de una prueba que mide capacidad de raciocinio.

1a	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
LI–LS	*LIR–LSR*	f	f_a	f_{ra}	f_{ra}%
60–64	59.5–64.5	2	376	1.000	100
55–59	54.5–59.512	12	374	0.995	99.5
50–54	49.5–54.5	20	362	0.963	96.3
45–49	44.5–49.5	32	342	0.907	90.7
40–44	39.5–44.5	46	310	0.824	82.4
35–39	34.5–39.5	58	264	0.702	70.2
30–34	29.5–34.5	64	206	0.548	54.8
25–29	24.5–29.5	58	142	0.377	37.7
20–24	19.5–24.5	42	84	0.223	22.3
15–19	14.5–19.5	23	42	0.112	11.2
10–14	9.5–14.5	15	19	0.050	5.0
5–9	4.5–9.54	4	4	0.011	1.1
		$N = 376$			

La construcción de las normas centiles, se desarrollará de la siguiente manera:

Paso 1. Se forma la columna (3) y se encabeza con la letra f_a. Esto se hace escribiendo el número total de casos que están por debajo del extremo superior de cada intervalo. Bajo la parte superior del intervalo 5-9 hay 4 casos. Por debajo del extremo superior del intervalo 10-14 hay 19 casos, 4 + 15. Siguiendo este proceso, se obtienen así todos los valores anotados en la columna (3).

Paso 2. Cada uno de los valores de f_a se convierte luego en fracción acumulada f_{ra}. Esto se hace multiplicando cada valor de la columna (3) por el recíproco de 376, o sea 0.00266. Cada producto se redondea al milésimo y se anota en la columna (4).

Paso 3. Cada uno de los valores de la columna (4) se multiplica luego por 100, para obtener los porcentajes acumulados que aparecen en la columna (5).

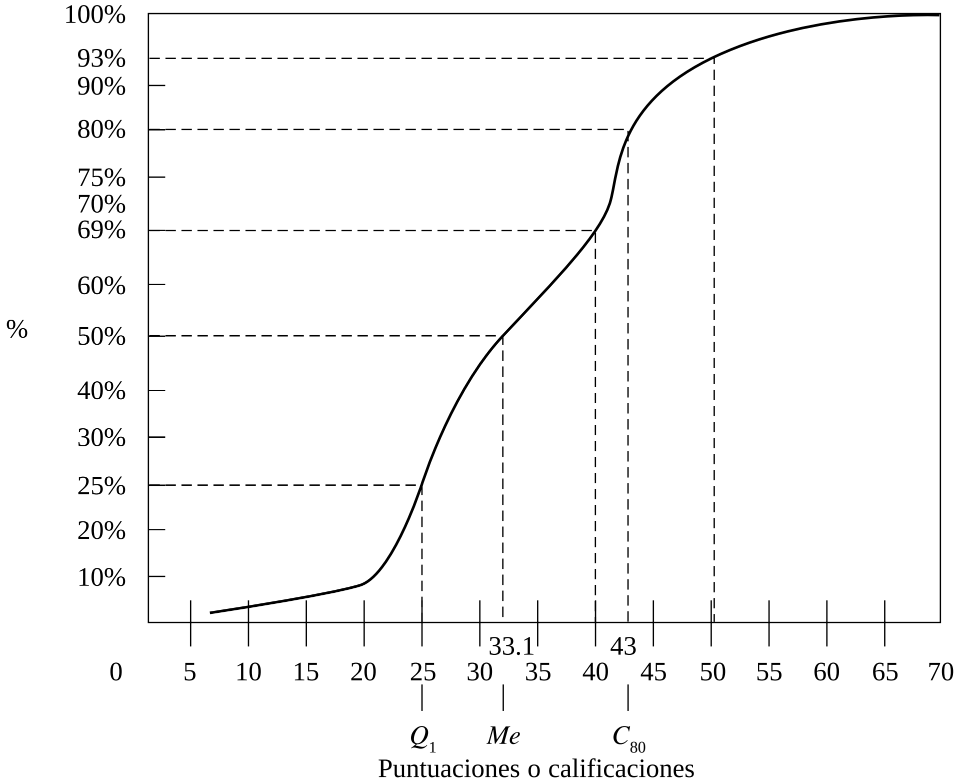
Paso 4. Los datos de la columna (4) se grafican en la figura. En primer lugar, se trazan los ejes coordenados de la manera usual: los porcentajes acumulados se sitúan en el eje y, y las puntuaciones sobre el eje x. Para este caso, en el eje y, los valores variarán entre 0 y 100. Al trazar la gráfica de ojiva, el porcentaje acumulado para cada intervalo se marca en el *límite superior real* de la columna (1), a diferencia del punto medio que se utilizó en la construcción del polígono de frecuencias. El límite superior del intervalo más bajo es de 9.5.

Por tanto, por arriba de 9.5, sobre el eje *x*, se hace una marca en 1.1, el f_{ra} para este intervalo. Por encima de 14.5, que es el límite superior del siguiente intervalo, se coloca una marca 5 unidades más adelante en el eje *y*. Este proceso se continúa hasta que se grafican todos los valores f_{ra}.

Paso 5. A continuación, se dibuja una curva alisada. Tales curvas toman la forma que se muestra en la figura 2.11, y con frecuencia se conocen también como *curvas en S*. La curva se lleva a la línea base, extendiéndose al siguiente intervalo inferior y dándole a dicho intervalo un f_{ra} de 0.

Paso 6. Los centiles siguientes se leen a partir de la figura 2.11. Esto se ilustrará obteniendo el quincuagésimo centil (C_{50}) o mediana (*Me*); ya que, por definición, la mediana es el punto en el cual 50% de los casos quedan por debajo de él. Se traza una línea desde el f_{ra} de 50, ubicado sobre el eje *y*, a la ojiva. Desde este punto de intersección, se traza otra recta en ángulo recto hasta el eje *x*. El punto en el que esta recta corta dicho eje *x* es el valor del centil deseado, en este caso C_{50} o *Me*. En la figura 2.11 se han trazado rectas que muestran el valor para C_{80}, C_{50} y C_{25}. Estos valores son aproximadamente 43, 33 y 25, respectivamente. Se observa que estos valores están muy cercanos a los calculados para los mismos valores estadísticos, los cuales son 43.5, 33.1 y 25.4.

Figura 2.11 Ojiva o curva de porcentajes acumulados



En este caso particular para calcular los centiles, cuando se tienen los intervalos en forma decreciente, por ejemplo, para calcular el centil 50 que, por definición, tendrá 50% de los casos por encima y 50% por debajo de él, se divide entre 2 el total *N* de 376 o, tomando 50% del mismo, se obtienen 188 casos. Por tanto, interesa determinar ese punto de la distribución respecto al cual hay 188 casos por encima de 50%.

Se comienza por contar, en sentido creciente desde abajo, hasta acercarse lo más posible a los 188 casos, sin sobrepasar este punto. Esto lleva al punto situado en la parte superior del intervalo 25-29, o al extremo inferior del intervalo 30-34, siendo dicho punto el de 29.5. Debajo de este punto hay 142 casos y, como se requieren 46 casos más, se tomarán de los 64 que hay en el siguiente intervalo. En otras palabras, es necesario avanzar 46/64avos de la distancia a través del tamaño del intervalo, que en este caso es 5. Esto puede expresarse así:

$$C_{50} = 29.5 + \frac{46}{64}\left(5\right)$$

$$= 29.5 + \frac{230}{64}$$

$$= 29.5 + 3.59$$

$$= 33.1$$

Lo anterior se comprueba procediendo hacia abajo:

$$C_{50} = 34.5 - \frac{18}{64}\left(5\right)$$

$$= 34.5 - \frac{90}{64}$$

$$= 34.5 - 1.4$$

$$= 33.1$$

Si desea calcular C_{12} para los mismos datos, en primer lugar tome 12% de 376, lo que es igual a 45.12 casos. Es posible contar 42 casos a partir de abajo, lo cual le lleva a la parte superior del intervalo 19.5. En este punto, se debe interpolar:

$$C_{12} = 19.5 + \frac{45.12 - 42}{42}\left(5\right)$$

$$= 19.5 + \frac{3.12}{42}\left(5\right)$$

$$= 19.5 + \frac{15.60}{42}$$

$$= 19.5 + 0.37$$

$$= 19.9$$

Posteriormente, debe calcular C_{88}. Podría empezar tomando 88% de N y contando en sentido ascendente, como hizo para el caso de C_{12}. No obstante, la tarea se facilita tomando 12% de N y procediendo de arriba hacia abajo.

Por ejemplo:

$$12\% \text{ de } N = 45.12$$

$$C_{88} = 49.5 - \frac{45.12 - 34}{32}\,(5)$$

$$= 49.5 - \frac{11.12}{32} = (5)$$

$$= 49.5 - \frac{55.60}{32}$$

$$= 49.5 - 1.74$$

$$= 47.8$$

Rangos centílicos

Los rangos centílicos son semejantes a los centiles, y a menudo se confunden con ellos. Un *rango centílico* designa el porcentaje de *puntuaciones* que caen debajo de una puntuación específica en una distribución. Así, en la figura 2.11 los rangos centílicos se obtienen leyendo la gráfica de manera inversa. Por ejemplo, para obtener el rango centílico de una calificación de 50, a partir de 50 sobre el eje x, se levanta una perpendicular a la ojiva. Desde este punto de intersección se traza una perpendicular al eje y. Este punto de intersección sobre el eje y es el rango centílico. En la figura vemos que una puntuación de 50 tiene un rango centílico de 93. De manera similar, una puntuación de 40 tiene un rango centílico de 69.

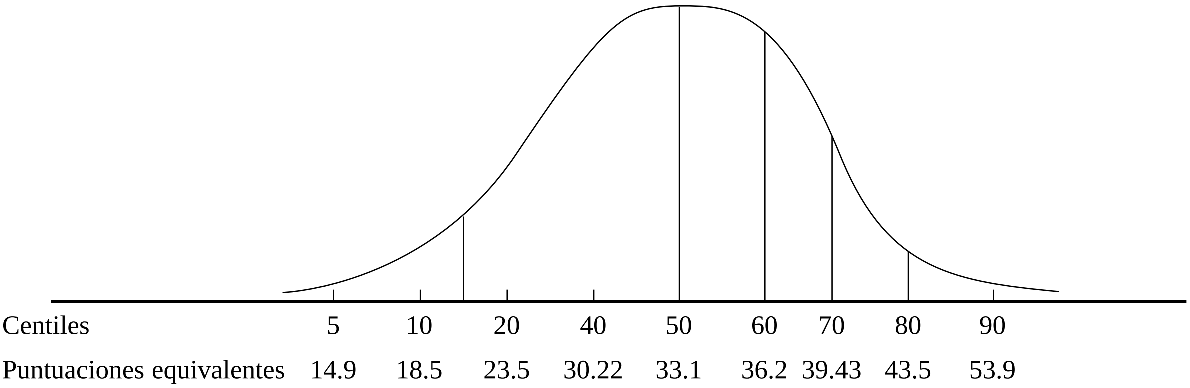
Empleo de centiles

Los centiles se utilizan mucho en las escuelas para informar los resultados de las pruebas estandarizadas. En su favor, puede decirse que son muy fáciles de entender. Aun si se desconoce que una persona que tiene una calificación centil de 77 está en un punto por encima de 77% respecto de aquellos para los que el examen fue estandarizado, por lo menos el 77avo centil parece corresponder a 77%; incluso, el profesor menos informado puede comprender qué quiere decir esto. Puesto que los centiles se parecen a los porcentajes, no hay gran dificultad para comprender su significado. Asimismo, proporcionan una indicación adecuada del rango o la jerarquía de un individuo en un grupo.

Sin embargo, los centiles tienen severas limitaciones, y muchos de los que elaboran y hacen uso de pruebas ya no se molestan por ellas. Si examinamos un conjunto de normas centílicas, o un perfil basado en éstas, observaremos que las normas centílicas se acumulan a la mitad de la distribución. La puntuación (no elaborada) de 33 es equivalente a C_{50}; una puntuación de 36, a un centil 60, y una puntuación de 30, a un centil 40. Un cambio en seis unidades de puntuación es equivalente a un cambio en 20 unidades de centiles. Hay, entonces, una acumulación de centiles en el centro de distribución, y las diferencias entre ellos en esta parte de la curva tienen poco significado.

Establecer que una persona situada en C_{47}, según una prueba, difiere del individuo situado en C_{51}, según la misma evaluación, es darle demasiada importancia a algo que no vale la pena. En el centro de la distribución el uso de puntuaciones centiles tiende a exagerar diferencias realmente inexistentes. Los centiles son unidades desiguales de medición y no pueden ser tratados aritméticamente. Esto es, no hay justificación para promediarlos, combinarlos o tratarlos de modo matemático. En lo que se refiere a la estadística, los centiles apenas tienen utilidad. No puede hacerse nada más con ellos. Si se desea manejar datos que se han reducido a centiles, deberán convertirse de nuevo en puntuaciones no elaboradas, y operar luego con éstas. Puesto que los centiles son unidades de medida desiguales, algunos estadísticos consideran que es mejor descartarlos. En el caso de pruebas estandarizadas, los centiles se utilizan cada vez menos como método de información. Sin embargo, en ciertos círculos se seguirán usando durante mucho tiempo.

Figura 2.12 Centiles y puntuaciones equivalentes para una serie de datos



Ahora vea por qué los centiles se acumulan en el centro de la distribución. Si recuerda la definición de centil como un punto en una distribución con cierto porcentaje de los casos por debajo de él, deducirá que C_{10} es el punto de la distribución que deja 10% de los casos debajo de él. Decir que 10% del área bajo de una gráfica cae por debajo de C_{10}, sería otra forma de expresar esto (figura 2.12).

Si considera ahora C_{20}, por definición, es el punto con 20% de los casos situados por debajo de él. En la figura agregue otro 10% al área situada por debajo (o antes) de C_{20}. Esto puede continuarse hasta que toda el área, o todos los casos de la distribución, sean incluidos. La distribución resultante queda ilustrada en la figura 2.13, la que en lugar de ser una gráfica común es un rectángulo. La distribución de centiles se describe como rectangular. Por otra parte, las mediciones realizadas en ciencias sociales y biológicas tienden a tomar la forma de la curva normal. Las distorsiones surgen cuando dichos datos se convierten a centiles, que tienen una distribución diferente.

Figura 2.13 Distribución rectangular de centiles

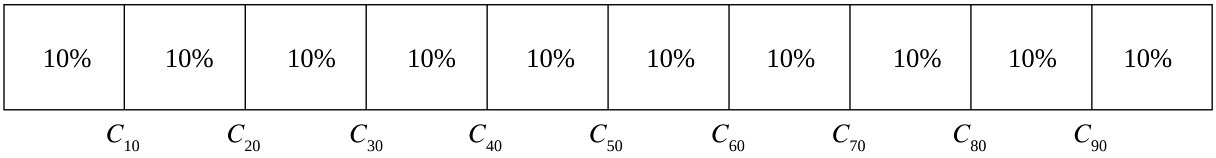


Diagrama de caja

Una forma de representar gráficamente los cuantiles, así como los valores extremos (el mínimo y el máximo) de un conjunto de datos, es una caja rectangular ubicada en un eje, vertical u horizontal.

En este texto se representan únicamente los valores mínimo, máximo y los tres cuartiles Q_1, Q_2, Q_3 (el Q_2 = mediana).

Considere el ejemplo de autocontrol de peso donde participan 90 personas ($n = 90$), cuyas cuantilas son:

$$Q_1 = 13.05$$

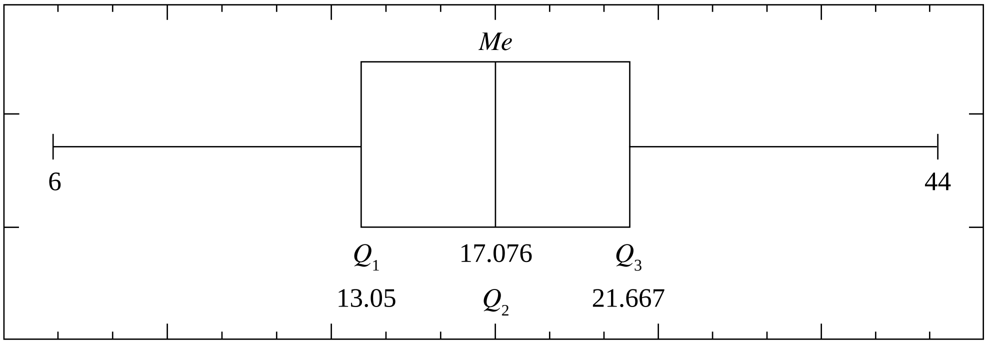
$$Q_2 = Me = 17.076$$

$$Q_3 = 21.667$$

Valor mínimo = 6
Valor máximo = 44

Una vez que obtiene los valores anteriores, elabore el diagrama que se muestra en la figura 2.14.

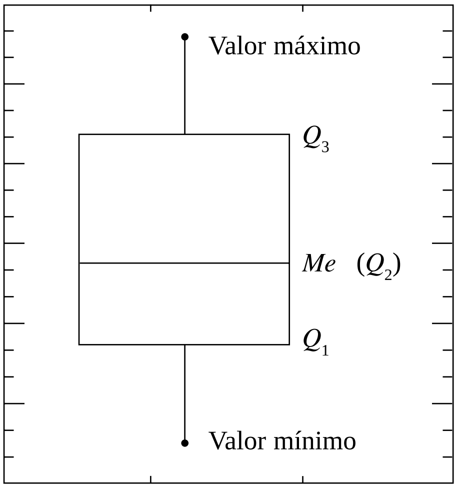
Figura 2.14 Diagrama de caja



Este diagrama (figura 2.14) muestra que la distribución de kilogramos perdidos en el programa de autocontrol de peso es simétrico alrededor del valor central, debido a que la longitud izquierda y derecha de la caja respecto de la mediana Q_2 es casi igual. Otra propiedad de esta gráfica es que ayuda a identificar los valores extremos, también llamados atípicos (*outliers*).

El diagrama de caja es útil para la comparación de dos o más muestras, incluso, poblaciones o grupos.

Figura 2.15 Diagrama de caja



■ Ejemplo 14

Suponga que tiene tres tratamientos cuyos resultados son los siguientes:

Tratamiento 1: 4.79, 3.62, 3.42, 2.38, 2.15, 4.65, 3.33
Tratamiento 2: 0.05, 0.57, 0.05, 0.10, 0.63
Tratamiento 3: 6.61, 3.45, 2.17, 2.27

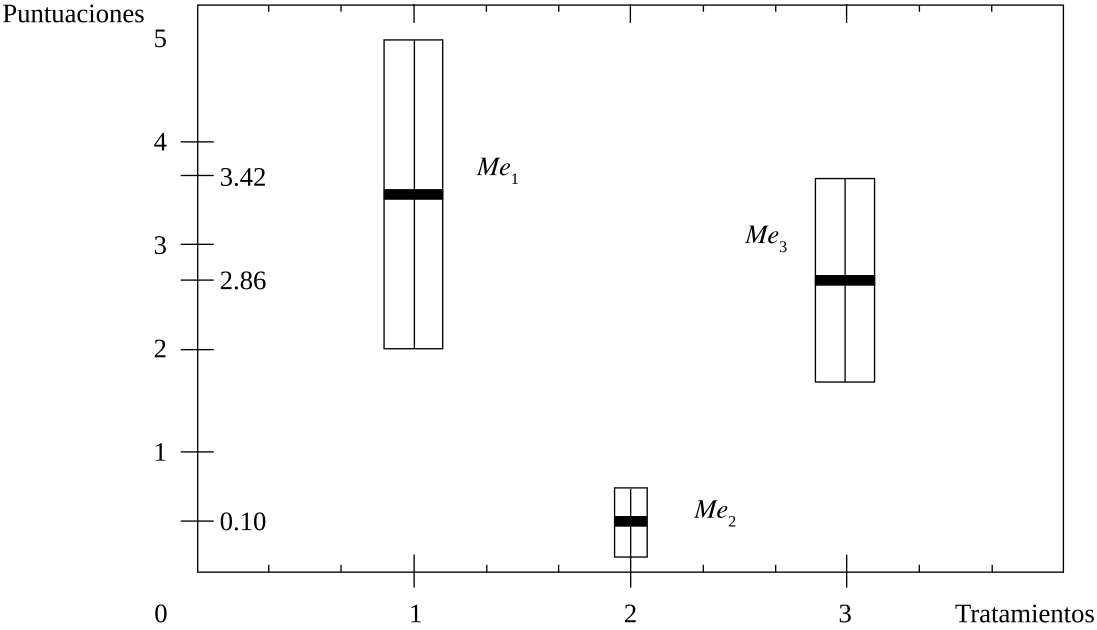
donde:

$$Me_1 = 3.42$$

$$Me_2 = 0.10$$

$$Me_3 = 2.86$$

Figura 2.16 Diagrama de cajas



El diagrama de cajas ilustra en forma muy sencilla la comparación de estos tres tratamientos: el primero tiene una puntuación más alta que los tratamientos 2 y 3, pero en el 3 la puntuación es más alta que en el 2 (figura 2.16).

MEDIDAS DE DISPERSIÓN O VARIABILIDAD

Ejemplo de cálculo de D_m, s, s^2 y CV

Con los datos del ejemplo de autocontrol de peso, calcule ahora las medidas de dispersión o variabilidad: desviación media (D_m), desviación estándar (s), varianza (s^2) y el coeficiente de variación (CV). Para llevar a cabo el cálculo, proceda de la siguiente manera:

Una vez obtenida la media aritmética $\bar{x} = 17.7$

Paso 1. Calcular la desviación media D_m.

a) Es necesario construir la columna $(x_i - \bar{x})$, que corresponde a la marca de clase de cada uno de los intervalos, menos la media aritmética:

$x_i - \bar{x}$	**es decir,**	$x_i - \bar{x}$
7–17.7		–10.7
12–17.7		–5.7
17–17.7		–0.7
22–17.7		–4.3
27–17-7		+9.3
32–17.7		+14.3
37–17.7		+19.3
42–17.7		+24.3

b) Una vez obtenida esta columna, se forma otra con los valores absolutos de las diferencias anteriores:

$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10.7
5.7
0.7
4.3
9.3
14.3
19.3
24.3

c) Cada uno de los valores absolutos se multiplica por su respectiva frecuencia y luego se obtiene la suma total de los intervalos:

$f\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	**o sea,**	$f\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
9 × 10.7		96.3
19 × 5.7		108.3

(continúa)

(continuación)

$f\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	o sea,	$f\lvert x_i-\bar{x}\rvert$
33 × 0.7		23.1
15 × 4.3		$f\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ 64.5
10 × 9.3		93.0
2 × 14.3		28.6
0 × 19.3		0.0
2 × 24.3		48.6
		$\sum f\lvert x_i-\bar{x}\rvert = 462.4$

d) Al dividir el resultado anterior entre ***n***, obtiene la desviación media buscada:

$$D_m = \frac{462.4}{90} = 5.138 \quad \text{o bien,} \quad D_m = 5.14$$

Paso 2. Para obtener la desviación estándar ***s***:

a) Eleve al cuadrado cada uno de los renglones de la columna obtenida en el paso 2 anterior:

$(x_i-\bar{x})^2$	o sea,	$(x_i-\bar{x})^2$	o sea,	$(x_i-\bar{x})^2$
$(7-17.7)^2$		$(-10.7)^2$		114.49
$(12-17.7)^2$		$(-5.7)^2$		32.49
$(17-17.7)^2$		$(-0.7)^2$		0.49
$(22-17.7)^2$		$(4.3)^2$		18.49
$(27-17.7)^2$		$(9.3)^2$		86.49
$(32-17.7)^2$		$(14.3)^2$		204.49
$(37-17.7)^2$		$(19.3)^2$		372.49
$(42-17.7)^2$		$(24.3)^2$		590.49

b) Ahora, multiplique cada uno de estos resultados por su respectiva frecuencia y se determina la suma total.

$f\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	o sea,	$f\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
9 × 114.49		1 030.41

(continúa)

(continuación)

$f(x_i-\bar{x})^2$	**es decir,**	$f(x_i-\bar{x})^2$
19 × 32.49		617.31
33 × 0.49		16.17
15 × 18.49		277.35
10 × 86.49		864.90
2 × 204.49		408.98
0 × 372.49		0.0
2 × 590.49		1 180.98
	$\sum f(x_i-\bar{x})^2 =$	4 936.10

c) Este resultado lo divide entre n – 1[†], y al cociente obtenido le extrae la raíz cuadrada; de este modo, obtiene la desviación estándar buscada:

$$s=\sqrt{\frac{\sum f(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{4\ 396.10}{89}}=\sqrt{49.39}=7.028$$

Si en el paso anterior no se extrae la raíz cuadrada al cociente 49.39, entonces lo que se tiene es la varianza (s^2), o sea,

$$\text{Varianza} = (\text{desviación estándar})^2$$

$$\therefore\ s^2 = 49.39 = (7.028)^2$$

Como último paso, se divide la desviación estándar entre la media aritmética y se multiplica por 100 para obtener la medida relativa (en porcentaje), que se conoce como *coeficiente de variación* (de Pearson). Esta medida expresa la proporción en que la media aritmética no es representativa del conjunto de datos de donde proviene. Eso sólo es posible cuando conoce la desviación estándar y la compara con la media aritmética, utilizando dicho coeficiente:

$$CV=\frac{S}{\bar{X}}\times 100=\frac{7.028}{17.77}\times 100=0.395\times 100=39.5\%$$

si 100% – CV = utilidad o confiabilidad de la media, o sea 100% – 39.5% = 60.5%,

existe una relación inversamente proporcional entre el valor del coeficiente de variación de Pearson y la utilidad de la media aritmética, a menor valor de dicho coeficiente mayor utilidad de la media.

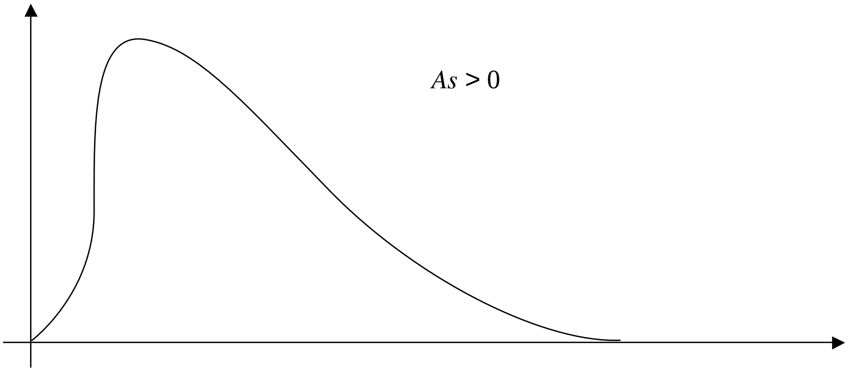
PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Una de las formas de captar mejor una distribución de frecuencias es graficándola. Una vez obtenida la gráfica, es conveniente observar su asimetría, curtosis y modalidad.

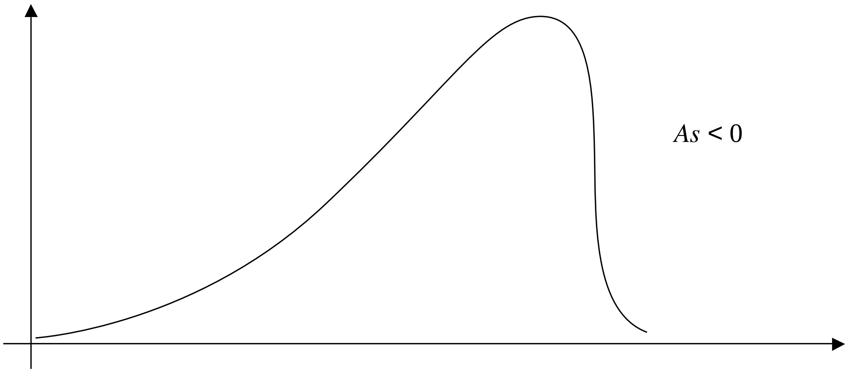
[†] Con fines de inferencia de la muestra a la población. Si es toda la población se usa n como divisor.

Asimetría (*As*)

La asimetría se presenta cuando una curva de distribución, en una de sus colas, se extiende más lejos que la otra en una dirección. Así, cuando está extendida hacia la derecha, se dice que la curva tiene *asimetría positiva*:



Cuando se extiende hacia la izquierda, se tiene una curva con *asimetría negativa*:



Si la asimetría es igual a cero, entonces se tiene una *curva normal*:

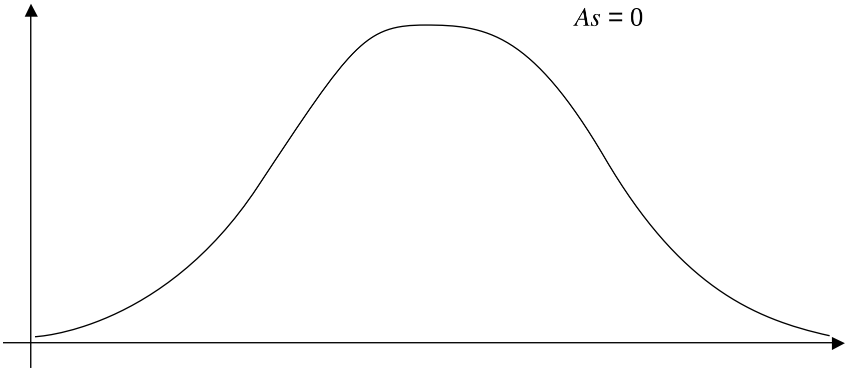
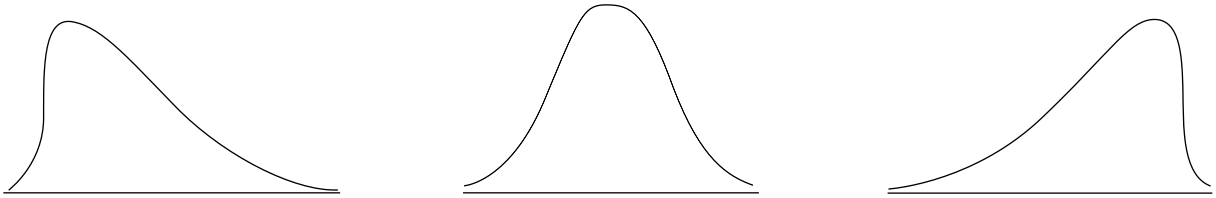
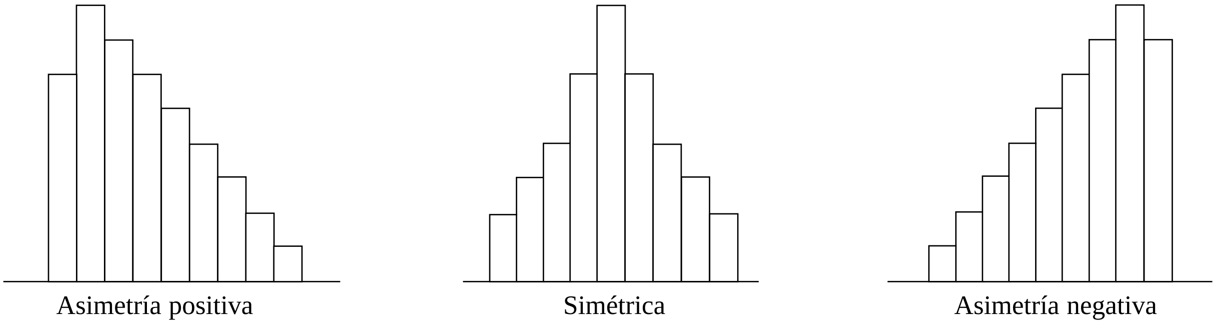


Figura 2.17 Distribuciones continuas y distribuciones discretas



a) Distribuciones continuas



b) Distribuciones discretas

El llamado *coeficiente de asimetría,* o *sesgo,* se calcula con la siguiente fórmula:

$$As = \frac{\bar{x} - Mo}{s}$$

donde:

As = coeficiente de asimetría de Pearson
$\bar{x}$ = media muestral
Mo = moda
s = desviación estándar muestral

■ Ejemplo 15

Con los resultados del autocontrol de peso, considerados con anterioridad, calcule el coeficiente de asimetría:

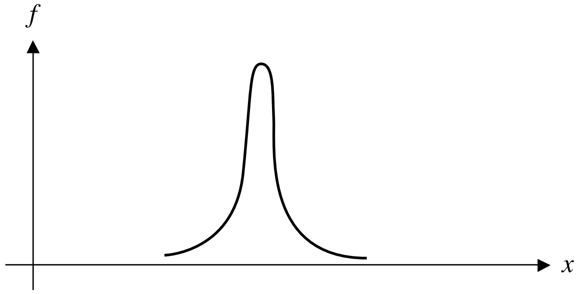
$$As = \frac{17.7 - 16.71}{7.02} = 0.0698$$

Como la asimetría es mayor que cero, la distribución es asimétrica positiva, véase figura 2.17.

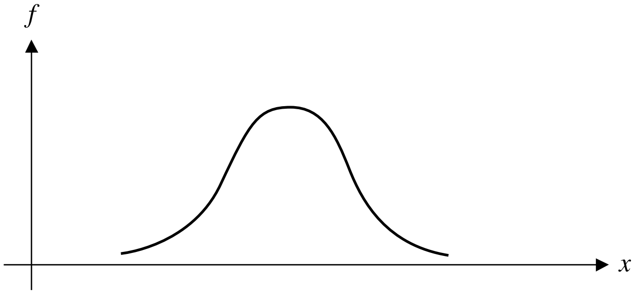
Curtosis

La curtosis es la agudeza que presenta el perfil de una curva unimodal. Por ejemplo, cuando las puntuaciones obtenidas al aplicar un *test* psicológico tienden a agruparse en el centro de la distribución en un intervalo reducido de valores, se tiene una curva *aguda* o *leptocúrtica*. Cuando esto ocurre, se dice que el grupo es *homogéneo*† respecto de lo que se mide:

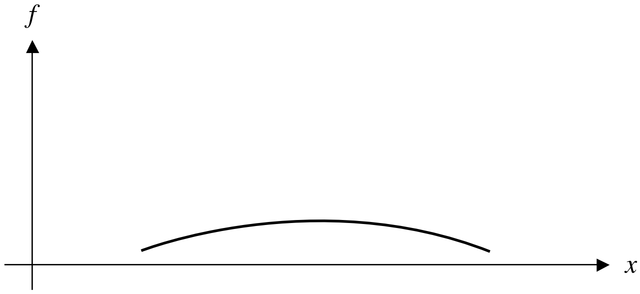
La curtosis en una curva normal es igual a cero:



Si el intervalo en el que tienden a agruparse las puntuaciones de un grupo no es tan reducido, la curva se denomina *semiaguda* o *mesocúrtica*:



Un caso opuesto a la curva leptocúrtica, es el que corresponde a una distribución donde existe un intervalo amplio de puntuaciones con escasa agrupación en el centro. A esta curva se le llama *aplanada* o *platocúrtica*:



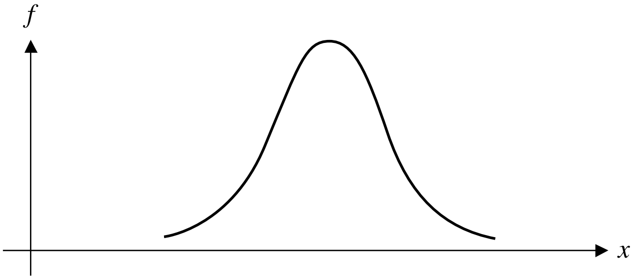
Modalidad

La tercera característica de una curva de distribución es la *modalidad*, que consiste básicamente en el número de picos que presente dicha curva.

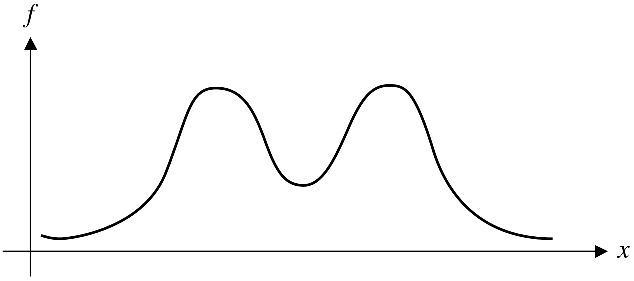
---

† Las medidas de dispersión son pequeñas.

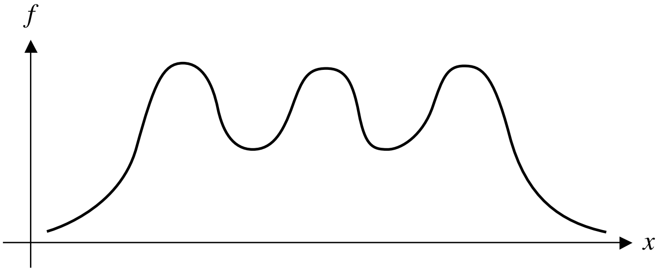
Las curvas que tienen un solo pico se denominan *unimodales*, es decir, de una sola moda:



Otras pueden tener dos picos, por lo que se les conoce como *bimodales*, o con dos modas:



Asimismo, algunas pueden tener tres o más picos, y se les llama entonces *multimodales*:



DATOS NO AGRUPADOS

Es usual que un investigador desee conocer ciertas características importantes y comunes de un conjunto de objetos o personas, conjunto al que en estadística se le conoce como *población*. En general, es imposible y, además, no es conveniente medir todas las variables de interés (características susceptibles de medición), como tampoco todos los elementos de la población en estudio, por lo que se selecciona un subconjunto de dicha población, y se miden únicamente algunas variables y los elementos que lo componen. A este conjunto de elementos, se les denomina *muestra*. Por ejemplo, si desea conocer el cociente de inteligencia (CI) de los candidatos a ingresar en una carrera profesional en todas las instituciones de educación superior en México, en vez de dedicarse a la gigantesca e irrelevante tarea de investigar a todos los candidatos, lo cual implicaría una gran inversión de tiempo y dinero —además del peligro de que, al terminar el estudio, el número de solicitantes ya no fuera el mismo que el del inicio—, lo más conveniente sería seleccionar una muestra representativa de la población analizada. En los posteriores capítulos, se estudian las condiciones necesarias y suficientes para obtener la muestra adecuada y representativa de una población dada.

Los resultados así obtenidos serán válidos y precisos en la mayor parte de los casos, debido a que la inversión de tiempo fue mínima y la muestra es representantiva. La información y los resultados serán una estimación lo bastante confiable como para generalizarlos a la población.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN O VARIABILIDAD

Ya estudió el uso de las medidas de tendencia central, las cuales proporcionan información concerniente a un conjunto de datos; no obstante, describen únicamente un aspecto de la población o muestra. Sería incorrecto concluir que dos conjuntos de datos son iguales sólo porque tienen las mismas medidas de tendencia central. Es decir, en caso de que el valor de la media aritmética sea el mismo para ambos conjuntos, la mediana y la moda también podrían ser iguales, pero la distribución de tales datos forma una curva completamente diferente. Esto ocurre porque las "distancias" de los datos tienen diferentes concentraciones respecto del punto de equilibrio, que está representado por la media aritmética. Para medir la concentración de los datos, se emplean las *medidas de variación* o *dispersión*, también conocidas como *medidas de variabilidad*.

El siguiente ejemplo sirve para ilustrar el porqué de la necesidad de estas medidas de dispersión, que darán a la media aritmética una mejor interpretación de la distribución de los datos o puntuaciones obtenidas en un conjunto de datos.

Suponga que tiene dos grupos de ocho personas (grupo *A* y grupo *B*) de una escuela secundaria, y desea comparar el número de errores obtenidos por cada uno de sus integrantes al aplicarles una prueba que consta de 20 reactivos:

Grupo *A*	Grupo *B*
$Mo_A = 5$	$Mo_B = 5$
$Me_A = 5$	$Me_B = 5$
$\bar{x}_A = 5$	$\bar{x}_B = 5$

En apariencia, no hay diferencia entre el grupo *A* y el grupo *B*, pero si se observan detenidamente los datos de la siguiente tabla, se verá que ambos grupos no son iguales. En primera instancia, se tiene que los errores del grupo *A* se dispersan más que los del grupo *B*.

	Grupo *A*	**Grupo *B***	
Puntuación más baja→	1	3	←Puntuación más baja
	1	4	
	2	5	
	5	5	
	5	5	
	5	5	
	9	6	
Puntuación más alta→	12	7	←Puntuación más alta
	$\sum x = 40$	$\sum x = 40$	

¿Qué ocurre? ¿Por qué la medida de tendencia central, en este caso la media aritmética o promedio, no da suficiente información acerca de estos resultados? Porque es necesario contar con algo que señale la dispersión o desviación respecto de la media aritmética; en otras palabras, conocer la *densidad* de los datos, es decir, cuán concentrados y homogéneos se encuentran, o qué tan variados son.

Amplitud de variación (A)

Para responder a lo anterior, se obtiene una de las medidas de dispersión más sencillas, la *amplitud de variación* (o *rango*),[†] que se tiene al restar, de la puntuación más grande, la más pequeña.

Mediante el cálculo de la amplitud de cada uno de los grupos, se tiene:

Grupo A: Puntuación más alta, 12; puntuación más baja, 1. Amplitud $A = 11$.

Grupo B: Puntuación más alta, 7; puntuación más baja, 3. Amplitud $A = 4$.

En un primer análisis exploratorio, la amplitud puede ser un valor estadístico útil y es el que señale cuánto varían las puntuaciones, del primer grupo como del segundo; no obstante que dicho valor estadístico es una medida simple de calcular y fácil de entender, su simplicidad limita sus aplicaciones.

Desviación media (D_m)

Otra medida de dispersión que tiene un significado intuitivo es la *desviación media* (D_m), la cual puede visualizarse evaluando la *distancia* entre cada observación (puntuación) y la media aritmética. El promedio de estas distancias da una medida racional de la dispersión de los datos.

Todo esto se obtiene mediante la fórmula siguiente, donde no interviene la frecuencia f.

$$D_m = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

donde las rayas verticales indican valor absoluto, y hay que tratar a todos los números negativos como positivos. Cada diferencia $x_i - \bar{x}$ es la distancia o *desviación* de la puntuación respecto de la media aritmética; al sumar estas desviaciones y dividirlas entre el número de casos (sujetos), obtiene la desviación media.

No obstante que la desviación media es una medida intuitiva de la dispersión, tiene el inconveniente de que a partir de ella no pueden obtenerse otros valores estadísticos. Por tanto, la medida de dispersión más común es la *desviación estándar*, la cual es más compleja y menos intuitiva que la desviación media, pero tiene algunas propiedades matemáticas que la hacen muy valiosa y útil para problemas estadísticos más complejos.

[†] Aunque se emplea mucho la palabra *rango* (traducción poco afortunada del término inglés *range*), por ser incorrecto su significado, en esta obra se preferirá la expresión *amplitud de variación*: en ocasiones puede decirse simplemente *amplitud* o *intervalo total*.

Desviación estándar (s, σ)

Una medida de variabilidad más adecuada es la *desviación estándar*, que se simboliza con s para una muestra, y con σ para una población. Su fórmula general de cálculo es la siguiente:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Para sustituir los datos en la fórmula, primero se eleva al cuadrado la diferencia de cada una de las puntuaciones respecto del valor de la media aritmética, o sea $(x_i - \bar{x})^2$; sumando todas las desviaciones cuadradas en cada uno de los grupos, se obtiene $\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2$ como se ve a continuación:

Grupo A		Grupo B	
$(x_i - \bar{x})$	**$(x_i - \bar{x})^2$**	**$(x_i - \bar{x})$**	**$(x_i - \bar{x})^2$**
–4	16	–2	4
–4	16	–1	1
3	9	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
4	16	1	1
7	49	2	4
	$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 106$		$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 10$

Aplicando la fórmula general de s a cada grupo A y B:

$$s_A = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad s_B = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$s_A = \sqrt{\frac{106}{7}} \qquad s_B = \sqrt{\frac{10}{7}}$$

$$s_A = \sqrt{15.14} \qquad s_B = \sqrt{1.42}$$

$$\therefore S_A = 3.89 \qquad \text{y} \qquad \therefore S_B = 1.19$$

Si se calculan ahora las desviaciones simples de cada una de las puntuaciones, respecto de su media aritmética $(x_i - \bar{x})$ para cada grupo, se tendrá lo siguiente:

Para el grupo *A*:

x_i	$\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})$	$\lvert(x_i - \bar{x})\rvert$
1	5	–4	4
1	5	–4	4
2	5	–3	3
5	5	0	0
5	5	0	0
5	5	0	0
9	5	4	4
12	5	7	7
		$\sum = 0$	$\sum = 22$

es decir,

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum \lvert(x_i - \bar{x})\rvert = 22$$

Para el grupo *B*:

x_i	$\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})$	$\lvert(x_i - \bar{x})\rvert$
3	5	–2	2
4	5	–1	1
5	5	0	0
5	5	0	0
5	5	0	0
5	5	0	0
6	5	1	1
7	5	2	2
		$\sum = 0$	$\sum = 6$

o sea,

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{y} \quad \sum \left|(x_i - \bar{x})\right| = 6$$

En lo anterior se tiene la columna del valor absoluto, que es simplemente el valor numérico de la diferencia (aritmética) de los dos valores, sin tomar en cuenta el signo. Al sumar los valores de esta columna y dividir entre el número de casos, se obtiene la desviación media para los grupos *A* y *B*:

$$\left(D_m\right)_A = \frac{\sum \left|(x_i - \bar{x})\right|}{n} = \frac{22}{8} = 2.75$$

$$\left(D_m\right)_B = \frac{\sum \left|(x_i - \bar{x})\right|}{n} = \frac{6}{8} = 0.75$$

La desviación estándar en cada grupo es, como se calculó antes, $s_A = 3.89$ y $s_B = 1.19$, y puede apreciarse así la diferencia entre estos valores estadísticos.

Varianza (s^2 o σ^2)

Si eleva al cuadrado cada una de las desviaciones respecto de la media aritmética, sume y divida entre $(n - 1)$, y obtiene la llamada *varianza*:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

De manera que:

$$\text{Var} = (\text{Desv. est.})^2,$$

lo que justifica la notación utilizada (s^2).

Quizá el lector se pregunte por qué en el divisor aparece $n - 1$ en lugar de n al definir la varianza muestral s^2. Observe que si la suma de las desviaciones cuadradas fuese divida entre n, el cociente resultante sería el promedio de los cuadrados de las desviaciones (es decir, una *desviación cuadrada media*). El divisor $n - 1$ se utiliza también en lugar de n debido a que produce una estimación más precisa de la correspondiente varianza poblacional (σ^2); o sea, un estimador insesgado de dicha varianza, por lo que se usará en todo el texto.

Si aplica lo anterior a los datos, tendrá:

$$s^2_A = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n - 1} \qquad s^2_B = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n - 1}$$

$$s^2_A = \frac{106}{7} \qquad s^2_B = \frac{10}{7}$$

$$\therefore s^2_A = 15.4 \qquad s^2_B = 1.42$$

Coeficiente de variación (CV)

Una de las ventajas de la desviación estándar, como medida de la variación, es que puede ser comparada con las desviaciones estándar de otros grupos, y permite concluir entonces cuál grupo de datos está más disperso que otro. No es posible interpretar la desviación estándar directamente como una medida comparativa, ya que este valor estadístico es una medida relativa respecto de los datos que se analizan. Por ejemplo, el valor que se calculó anteriormente, s = 3.89, por sí mismo no significa nada, pero si sabe que se refiere a medidas con un solo dígito, éstos van a tener más dispersión que si el mismo valor estuviera referido a medidas con dos dígitos. El estadístico que puede resolver este problema es el *coeficiente de variación* (CV), de *Pearson*, que es la relación entre la desviación estándar y la media aritmética. Se multiplica además por 100, para considerar el resultado en forma porcentual (en %):

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

Por tanto:

$$\frac{S_A}{\bar{x}_{\hat{A}}} = \frac{3.89}{5} = 0.778, \qquad \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{1.19}{5} = 0.238$$

Al multiplicar estos resultados por 100, resulta finalmente:

$$(CV)_A = 77.8\%$$

y

$$(CV)_B = 23.8\%$$

Cuando se tiene un conjunto de datos muy grande y muchas de las puntuaciones se repiten, o sea, con cierta frecuencia (f), las fórmulas descritas anteriormente de la desviación media (D_m), la desviación estándar (s) y la varianza (s^2), incluirán dicha frecuencia (f). Por tanto:

$$D_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right|}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

Ejemplos para datos no agrupados

En el departamento de investigación de una distribuidora de frutas, se compararon cuatro métodos de congelación y dos clases de conservadores (*A* y *B*). Se realizó un experimento con fresas, 8 bolsas con la misma cantidad de producto y de la misma cosecha. Después de 3 meses de congelamiento a 0º C, se midió la pérdida de color en una escala de 1 a 10, considerando la puntuación baja con menos decoloración, y la puntuación alta con más pérdida de color. Se obtuvieron los datos que siguen:

Método 1	
A	***B***
10	10
4.0	8.0
8.5	7.5
9.5	8.0
10	9.5
9.0	9.0
7.5	7.5
8.0	7.0
$\bar{x} = 8.31$	$\bar{x} = 8.31$
$s = 1.96$	$s = 1.06$
$s^2 = 3.85$	$s^2 = 1.13$
$CV = 23.61\%$	$CV = 12.83\%$

Método 2	
A	***B***
0.5	6.0
9.5	7.5
7.5	8.0
10	7.0
6.5	6.5
5.0	6.0
8.5	5.0
4.0	5.5
$\bar{x} = 6.43$	$\bar{x} = 6.43$
$s = 3.17$	$s = 1.01$
$s^2 = 10.10$	$s^2 = 1.03$
$CV = 49.37\%$	$CV = 15.77\%$

Método 3	
A	***B***
1.0	3.0
7.5	5.5
4.5	4.0
5.0	4.5
2.0	3.0
2.5	3.5
3.5	4.0
6.0	4.5
$\bar{x} = 4.00$	$\bar{x} = 4.00$
$s = 2.17$	$s = 0.84$
$s^2 = 4.71$	$s^2 = 0.71$
$CV = 54.28\%$	$CV = 21.12\%$

Método 4	
A	***B***
1.5	2.0
0.5	1.0
1.0	2.5
2.0	3.0
6.5	4.0
4.5	3.5
1.5	2.0
2.5	2.0
$\bar{x} = 2.50$	$\bar{x} = 2.50$
$s = 2.01$	$s = 0.96$
$s^2 = 4.07$	$s^2 = 0.92$
$CV = 80.71\%$	$CV = 38.54\%$

OTROS TIPOS DE PROMEDIO

Media ponderada $\bar{x}_p$

Se utiliza cuando las puntuaciones tienen pesos o ponderaciones (P) diferentes de la unidad.

Si $P = 1$, se tiene la media aritmética para datos no agrupados $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$. La fórmula para calcular la media ponderada es:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum Px}{\sum P}$$

■ Ejemplo 16

En un curso semestral de una determinada materia, se aplican tres exámenes parciales únicamente, no hay examen final, y se le asignan los siguientes "pesos": $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ y $P_3 = 3$.

Si un estudiante obtiene 10 en el primer examen, 7 en el segundo y 6 en el tercero, calcule su promedio.

como: $x_1 = 10$ $\quad P_1 = 1$ $\quad \bar{x}_p = \frac{(1)(10) + 2(7) + 3(6)}{1 + 2 + 3} = \frac{42}{6}$

$x_2 = 7$ $\quad$ y $\quad P_2 = 2$

$x_3 = 6$ $\quad P_3 = 3$ $\quad \boxed{\bar{x}_p = 7}$

Media armónica (H)

Se utiliza cuando se desea promediar velocidades, cuando el tiempo se mantiene constante y las distancias varían o se mantienen también constantes.

Su fórmula es:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1} \frac{1}{x_i}}$$

■ Ejemplo 17

Si la distancia de A a B es de 1 km y se recorre a 60 km/h y de B a A a 30 km/h, ¿cuál es su velocidad promedio?

$$H = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30}} = \frac{2}{\frac{1+2}{60}} = \frac{2}{\frac{3}{60}} = \frac{120}{3} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}; \qquad \boxed{H = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}:}$$

La media aritmética sería $\bar{x} = \frac{60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{2} = \frac{90}{2} = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

¡lo cual es erróneo!

$$\boxed{\bar{x} = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

Media geométrica ($\bar{X}_g$)

Existe otro tipo de promedio que resulta de interés. Se trata de la *media geométrica*, definida como la raíz *n*-ésima del producto de *n* observaciones. Así, la media geométrica x_g, de *n* observaciones x_1, x_2, ..., x_n es:

$$\bar{X}_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

Se emplea este promedio cuando se trabaja con observaciones en las que cada una guarda una razón aproximadamente constante respecto de la anterior, por ejemplo, al promediar tasas de crecimiento (aumento o disminución) de una población estadística, según se ilustra en el ejemplo siguiente.

■ Ejemplo 18

El número de títulos *cum laude* otorgados por una universidad durante seis años consecutivos se presenta en la siguiente tabla. ¿Cuál es el porcentaje medio de incremento en la cantidad de títulos otorgados por año?

Para la respuesta, se calcula la media geométrica de las razones presentadas en la última columna.

Esto es,

$$\sqrt[5]{1.2 \times 1.5 \times 1.67 \times 2.0 \times 1.67} = 1.585$$

es decir, un aumento medio por año de 58.5%.

Cabría preguntar, por qué no puede emplear la media aritmética, que vale $\frac{1}{5}$ (1.2 + 1.5 + 1.67 + 2.0 + 1.67) = 1.61, o sea, un incremento del 61%, que es mayor que el proporcionado por la media geométrica. ¿La media aritmética siempre es mayor que la geométrica? El sesgo en la respuesta dada por la media aritmética es resultado de la influencia de la magnitud absoluta de las razones. Por ejemplo, duplicar un valor representa una razón de 2, en tanto que dividirlo a la mitad origina una razón de $\frac{1}{2}$. De este modo, si considera un valor de 100 que desciende a 50 y poco después se eleva a 100, las razones serán $\frac{1}{2}$ y 2, respectivamente. La media geométrica es $\sqrt{\frac{1}{2} \times 2} = \sqrt{1} = 1$, que es la tasa media de incremento. Esta respuesta es correcta en términos intuitivos, dado que el cambio total registrado es nulo. No obstante, la media aritmética de las razones es $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 1.25$. Si las razones fueran 3 y $\frac{1}{3}$, la media geométrica seguiría siendo 1, en tanto que la media aritmética sería $1 \times \frac{2}{3}$.

Año	Número de títulos	Razón al valor del año anterior
2001	5	–
2002	6	1.20
2003	9	1.50
2004	15	1.67
2005	30	2.00
2006	50	1.67

Resumen

Por lo general, la persona que realiza un estudio, una evaluación o investigación, desea contestar ciertas preguntas relacionadas con las características o los problemas de una población (conjunto de mediciones); esto casi siempre se reporta por medio de información numérica, o sea, por datos. El trabajo es analizar dicha información, relacionarla con el problema que se desea resolver y formular luego conclusiones.

Cuando es imposible, o resulta caro en términos de costo y tiempo, efectuar un análisis exhaustivo de todos los elementos que constituyen la población, se selecciona en forma aleatoria un subconjunto de tales mediciones (una muestra). Una vez efectuado lo anterior, se procede a calcular la medida de tendencia central más adecuada: la media aritmética ($\overline{x}$), la mediana (*Me*) o la moda (*Mo*). A continuación, se complementan con las medidas de dispersión o variabilidad: la amplitud de variación (*A*), la desviación media (D_m), la desviación estándar (*s*), la varianza (s^2) y el coeficiente de variación (de Pearson) (*CV*), éstas son aproximaciones de los parámetros correspondientes a la población, y podrán generalizarse siempre y cuando la muestra haya sido obtenida en forma adecuada.

Una vez obtenidas estas medidas para la muestra, podrán estimarse los parámetros correspondientes a la población de donde fue extraída y, por consiguiente, generalizar estos resultados a la población.

En esta etapa de análisis estadístico, ya se está en condiciones de agrupar los datos obtenidos, en función de la frecuencia con que ocurren algunos de ellos, y empezar a construir un cuadro donde se concentren estos datos, que suelen llamarse *tablas de frecuencia*. Tal proceso puede llevarse a cabo sin pérdida de información, aun cuando en la mayoría de los casos la construcción de estas útiles distribuciones de frecuencias implica el agrupamiento en intervalos o clases y, en apariencia, suelen perderse los valores exactos de los datos originales. Sin embargo, puede generarse información valiosa, que aparentemente no existe.

Por otro lado, las medidas de dispersión desempeñan un papel importante en el análisis estadístico, ya que suministran información del grado de agrupamiento que tienen los datos respecto de las medidas de tendencia central, básicamente de la media aritmética, por estar en función del grado de dispersión de los datos.

Además, se consideran otros tipos de promedios, como la media ponderada, la armónica y la geométrica, que tienen diversas aplicaciones.

Ejercicios

A partir del ejercicio 2.7, realizar un análisis estadístico significa obtener la media aritmética, mediana y moda como medidas de tendencia central (medidas de dispersión o variabilidad, la desviación estándar, varianza, intervalo total, valor mínimo y máximo, coeficiente de variación, asimetría). Y cuando sea pertinente, deben obtenerse gráficas de barras, polígonos de frecuencias, histograma, ojiva de Galton, diagrama de cajas y de tallo y hojas. También es importante utilizar el paquete MacStat cuando así se requiera.

2.1 Desarrolle cada uno de los incisos siguientes:

a) $\sum_{i=1}^{5} Y_i$

b) $\sum_{k=3}^{6} X_k^2$

c) $\sum_{j=1}^{7} X_j Y_j$

d) $\sum_{i=1}^{3} (2X_i + 5)$

e) $\sum_{j=2}^{4} X_j^2 \, l_j$

2.2 A través de la notación de sumatoria, exprese cada uno de los incisos que se detallan a continuación:

a) $Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \ldots + Y_{17}{}^2$

b) $2Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3 + \ldots + 2Z_{100}$

c) $X_2Y_2^2 + X_3Y_3^2 + X_4Y_4^2 + X_5Y_5^2$

d) $\left(X_1^2 + 5\right)^3 + \left(X_2{}^2 + 5\right)^3 + \left(X_3{}^2 + 5\right)^3$

2.3 Si $X_1 = 0$, $X_2 = 2$, $X_3 = -1$, $X_4 = 3$ y $X_5 = 1$

Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{5} X_i{}^2$

b) $\sum_{i=3}^{5} X_i$

c) $\sum_{i=1}^{5} X_i{}^3$

2.4 Dados: $X_1 = 2$, $X_2 = 5$, $X_3 = -2$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = -1$ y $Y_3 = 1$

Calcule:

a) $\sum_{k=1}^{3} X_k{}^2 Y_k$

b) $\sum_{k=1}^{3} (4X_k + Y_k)$

c) $\sum_{k=1}^{3} (X_k + Y_k)^2$

d) $\left(\sum_{k=2}^{3} X_k\right)\left(\sum_{k=2}^{3} Y_k^2\right)$

2.5 Dados:

$$\sum_{j=1}^{10} X_j{}^3 = 91, \qquad \sum_{j=1}^{10} X_j{}^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{10} X_j = 7$$

Calcule:

$$\sum_{j=1}^{10}\left(5X_j{}^3 - 3X_j{}^2 + X_j + 22\right)$$

2.6 Con los datos siguientes,

63, 52, 49, 56, 58

Calcule:

a) Media aritmética, mediana y moda ($\bar{x}$, *Me* y *Mo*).
b) Desviación estándar, varianza (s, s^2).
c) Coeficiente de variación (*CV*).

2.7 En la Clínica de la Especialidad de Endodoncia, de la Facultad de Odontología, se midió el diámetro de lesiones periapicales en ocho dientes centrales de un solo paciente, considerando una escala subjetiva del 1 al 10, donde una calificación baja significa lesión muy leve y una alta indica muy severa. Se utilizaron cuatro métodos de diagnóstico, 1. Radiografía convencional, 2. Radiovisiografía, 3. Tomografía computarizada y 4. Rejilla endodóntica y rayos X, en tanto que participaron los mismos dos especialistas, *A* y *B*, en cada uno de ellos. ¿Qué especialista, y con qué método fue el diagnóstico acertado, considerando que el paciente tenía lesiones severas?

Método 1		**Método 2**	
A	*B*	*A*	*B*
10	10	0.5	6.0
4.0	8.0	9.5	7.5
8.5	7.5	7.5	8.0
9.5	8.0	10	7.0
10	9.5	6.5	6.5
9.0	9.0	5.0	6.0
7.5	7.5	8.5	5.0
8.0	7.0	4.0	5.5

Método 3		Método 4	
A	*B*	*A*	*B*
1.0	3.0	1.5	2.0
7.5	5.5	0.5	1.0
4.5	4.0	1.0	2.5
5.0	4.5	2.0	3.0
2.0	3.0	6.5	4.0
2.5	3.5	4.5	3.5
3.5	4.0	1.5	2.0
6.0	4.5	2.5	2.0

2.8 En un experimento sobre aprendizaje y memoria espacial con nueve ratas de la cepa Wistar, aparentemente sanas (de diferente peso) y sin aprendizaje previo, se les aplicó una misma dosis de escopolamina y se registró el tiempo que tardaron en atravesar un laberinto abierto. Se obtuvieron los siguientes datos:

1 min, 2.5 min, 3 min, 1.5 min, 2 min, 1.5 min, 1 min, 0.9 min, 30 min.

Cuando se realiza un análisis estadístico de datos en el que intervienen medidas temporales (minutos, horas), hay que homogeneizarlos en un solo tipo de unidad, tomando en cuenta las fracciones antes de realizar el análisis y después regresar a las unidades originales: minutos, horas, días, etcétera.

a) ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central es la más apropiada en este caso?

2.9 Al cambiarles la dieta de líquida a sólida, el peso en kg de 20 bebés, en un mes, se incrementó de la siguiente forma:

0.4	1.9	1.5	0.9	0.3	1.6	0.4	1.4	1.2	0.8
0.9	0.7	0.9	0.7	0.9	1.5	0.5	1.5	1.7	1.8

Realice un análisis estadístico.

2.10 En una encuesta a 300 personas, se les preguntó el número de hijos que tienen y se obtuvieron los datos siguientes:

x	***f***
0	78
1	90
2	32
3	25
4	50
5	15
6	10

Considere que x es un variable discreta.

2.11 El Departamento de Ecología de una universidad adquiere 400 convertidores catalíticos, cuya vida promedio se distribuye así:

Intervalo	***f***
300–399	14
400–499	46
500–599	58
600–699	78
700–799	68
800–899	62
900–999	48
1000–1088	22
1150–1199	4
	400

2.12 Se practicaron autopsias a 50 adultos masculinos en una unidad de Terapia Intensiva de Cardiología, que fallecieron de infarto al miocardio, reportando el peso total de su corazón en kilogramos.

a) Utilice los datos como se presentan, por ejemplo, 0.523 kg.
b) Transforme 0.523 kg a 523 gr.

LIR–LSR	***f***
0.523–0.526	3
0.526–0.529	6
0.529–0.532	7
0.532–0.535	12
0.535–0.538	10
0.538–0.541	6
0.541–0.544	4
0.544–0.547	2
	50

2.13 A 233 estudiantes de bachillerato, en un examen de química sanguínea, se obtuvieron los siguientes resultados de colesterol total:

LI—LS	***f***
120–140	2
140–160	23
160–180	75
180–200	73
200–220	22
220–240	18
240–260	4
260–280	8
280–330	8
	233

a) Calcule media, moda y mediana.

2.14 Una de las preguntas de un estudio socioeconómico, llevado a cabo con 239 profesionistas, consistía en ubicar sus ingresos mensuales en pesos, en los intervalos establecidos de antemano.

Ingresos mensuales	***f***
Más de 18 000	5
15 001–18 000	15
14 001–15 000	80
13 001–14 000	40
12 001–13 000	25
11 001–12 000	30
10 001–11 000	18
9 001–10 000	10
8 001–9 000	6
7 001–8 000	6
Menos de 7 000	4
	239

a) Realice un análisis estadístico.

2.15 A los operadores de una línea de autobuses foráneos, como parte de un programa de seguridad para ellos y los usuarios, se les aplican algunos exámenes para conocer su estado de salud físico y mental. Una de dichas pruebas consiste en evaluar sus reflejos: determinar el tiempo de reacción ante la presencia sorpresiva de algún obstáculo.

A una muestra de 34 conductores, mayores de 40 años, se les aplicó dicha prueba y se obtuvieron los datos siguientes:

Sea x = Tiempo de reacción en segundos.

Realice un análisis estadístico: a) Datos no agrupados y b) Datos agrupados.

x	**0.40**	**0.42**	**0.43**	**0.46**	**0.47**	**0.48**	**0.49**	**0.50**	**0.51**	**0.52**	**0.53**
Frecuencia	1	2	3	2	2	5	6	4	2	3	3
x	0.55										
f	1										

2.16 A 40 estudiantes no fumadores, de la División de Estudios de Posgrado de la carrera de Odontología, se les midió una función pulmonar (la capacidad inspiratoria, medida en litros) como parte de su perfil de acondicionamiento físico. Concluya si los valores normales son (3.0 L +/–1.0).

2.2	3.5	3.2	3.0
3.4	3.1	3.8	4.7
2.5	3.4	2.9	3.9
3.3	3.7	3.2	1.9
4.7	3.2	3.9	4.2
4.1	4.5	3.7	2.6
1.6	3.3	3.1	3.7
4.3	3.6	3.3	3.1
3.1	4.4	4.1	3.4
3.8	2.6	3.0	3.5

2.17 Realice un análisis estadístico con los resultados obtenidos de la función pulmonar (capacidad pulmonar), pero ahora con 60 estudiantes fumadores, de la misma División de Estudios de Posgrado.

3.6	1.9	2.1	0.3	0.8	0.2
1.0	1.4	1.8	1.6	1.1	1.8
0.3	1.1	0.5	1.2	0.6	1.1
0.8	1.7	1.4	0.2	1.3	3.1
0.4	2.3	1.8	4.5	0.9	0.7
0.6	2.8	2.5	1.1	0.4	1.2
0.4	1.3	0.8	1.3	1.1	1.2
0.8	1.0	0.9	0.7	3.1	1.7
1.1	2.2	1.6	1.9	5.2	0.5
1.8	0.3	1.1	0.6	0.7	0.6

2.18 A 28 estudiantes se les mide el pulso (frecuencia cardiaca), antes de presentar el examen final de matemáticas. Los registros son:

79	97	86	76
93	87	98	68
84	88	81	91
86	87	70	94
77	92	66	95
63	68	98	88
46	72	59	79

a) Realice un análisis estadístico.

2.19 En una sucursal bancaria, donde trabajan 25 personas (desde gerente, ejecutivos de cuenta, administrativos y cajeros), la hora de salida a comer, en día normal de actividades, es a las 3:00 pm, y se registran las siguientes horas de salida:

2:50	3:22	4:15
2:55	3:22	3:25
3:10	4:05	2:58
3:07	3:05	3:18
3:50	3:38	3:19
3:00	3:30	3:24
3:00	4:00	3:25
3:20	4:30	3:32
3:22		

a) Calcule el promedio de la hora de salida, desviación estándar, mediana y moda.

2.20 Un psicólogo aplica un examen de conocimientos generales para ingresar al bachillerato, que consta de 270 preguntas a 70 candidatos a ingresar a dicho nivel. Con los resultados obtenidos:

Realice el análisis estadístico con a) 8, b) 10 y c) 12 intervalos.

65	99	125	163	174	186	208
65	100	128	164	175	188	209
72	105	137	164	175	190	210
73	109	140	167	175	192	211
75	111	147	168	179	192	217
85	111	147	168	179	193	228
85	115	151	169	182	197	231
85	120	158	169	183	200	237
93	121	160	170	185	203	246
99	124	160	172	185	205	255

2.21 En un estudio, 20 pacientes presentaban lesiones de tipo vesicular, lo que, generalmente tiene repercusión en la cavidad bucal, tomando en cuenta la edad, sexo, localización de la lesión en la cavidad bucal (lengua, paladar, piso de boca, mucosa yugal, labios, tejido gingival), las repercusiones sistemáticas (zonas cutáneas y mucosas en general), y la frecuencia de recidiva y la duración de la lesión dada en días (los datos se muestran enseguida) realice un análisis estadístico.

Núm. de caso	Edad (años)	Sexo	Sitio de la lesión	Lesión extraoral	Frecuencia de recidiva	Duración de la lesión (días)
1	20	0	0	1	1	4 (365 días)
2	25	1	0	1	1	2
3	40	0	3	1	1	2
4	38	0	1	1	1	0
5	27	1	2	0	1	1
6	22	1	1	0	0	3
7	20	0	1	1	1	4
8	26	0	3	1	1	0
9	34	0	3	0	0	0
10	35	0	4	1	1	1
11	39	1	5	1	1	2
12	40	1	5	0	1	1
13	38	1	2	0	0	0
14	36	1	1	0	1	4
15	28	0	0	1	0	3
16	25	1	2	1	1	2
17	22	0	2	0	1	0
18	20	0	3	0	1	1
19	24	1	1	1	0	4
20	35	0	4	1	0	3

Las claves en que se basó la tabla anterior son las siguientes:

Sexo:
masculino = 0
femenino = 1

Recidiva:
no = 0
sí = 1

Sitio de la lesión:
lengua = 0
paladar = 1
piso de boca = 2
mucosa yugal = 3
labios = 4
encías = 5

Lesión extraoral:
zonas cutáneas = 0
mucosas = 1

2.22 Los datos de la tabla, que se presentan a continuación, se obtuvieron en una Clínica de Endodoncia de Posgrado de la Facultad de Odontología.

A cada paciente se le tomaron datos personales, como edad, sexo, dientes a tratar, número de conductos de la pieza tratada, estado pulpar del diente, tipo de irritante que motivó la lesión de la pulpa, técnica de obturación que se utilizó en el tratamiento y otras modificaciones que se les hicieron, según lo indicaba el caso.

En cada caso obtenido, debe hacerse su propia estadística, ya sea con datos agrupados o no y según sea conveniente.

Sexo	**Edad**	**Diente por tratar**	**Número de conductos**	**Vitalidad**	**Antecedentes del diente por tratar**	**Tratamiento**
1	58	1	1	0	4	1
1	56	1	1	1	0	0
0	22	0	1	0	1	2
1	37	0	1	1	1	3
0	27	2	3	1	3	1
1	55	2	3	0	2	1
1	19	0	1	1	1	2
1	20	1	2	0	2	3
0	48	2	3	0	3	1
1	28	2	3	1	0	1
1	23	0	1	1	1	2
0	28	2	3	1	3	1
0	48	1	2	0	2	2
1	21	2	2	1	3	1
1	48	1	1	0	1	0
0	18	0	1	1	1	3
0	33	0	1	1	1	0
0	12	2	3	1	3	1
1	21	1	2	0	2	1
1	59	0	1	0	0	3

Nota:

Sexo:
- masculino = 0
- femenino = 1

Diente por tratar:
- anterior = 1
- molar = 2

Vitalidad:
- vital = 0
- no vital = 1

Antecedentes del diente por tratar:
- caries = 0
- resina = 1
- amalgama = 2
- incrustación = 3
- otros = 4

Tratamiento:
- recubrimiento = 0
- tratamiento de conductos = 1
- cirugía periapical = 2
- otros = 3

Realice el análisis estadístico adecuado.

2.23 Dados los siguientes datos muestrales:

11	1
6	15
–1	–4
0	
10	
–2	

determine media, mediana, moda, desviación estándar, varianza y coeficiente de variación.

2.24 En un país de Latinoamérica, los censos señalan el número de habitantes (millones) y su tasa de crecimiento (porcentaje) de 1940 a 1990. Calcule el promedio de la tasa de crecimiento.

Año	Habitantes (millones)	Tasa de crecimiento (porcentaje)
1940	20.3	–
1950	28.7	41.4
1960	40.5	41.2
1970	60.0	48.2
1980	73.8	23.3
1990	95.4	29.3

2.25 Un entrenador de perros compra alimento especial a lo largo de un año. Los precios por kilogramo han aumentado, pero la cantidad que él compra permanece constante. Se obtuvo la siguiente información:

	1er. mes	**2o. mes**	**3er. mes**	**4o. mes**	**5o. mes**	**6o. mes**
Precio en pesos por kg	1.00	1.25	1.60	2.00	2.10	2.25
	7o. mes	**8o. mes**	**9o. mes**	**10o. mes**	**11o. mes**	**12o. mes**
	2.50	2.75	3.00	3.15	3.50	3.60

¿Cuál es el costo promedio del alimento, si el entrenador gastó 1000 pesos por mes? Realice un análisis estadístico.

2.26 En un semestre lectivo, el maestro aplicó tres exámenes parciales y uno final; el valor que le asigna el profesor a éstos, es que el final vale dos veces más que los parciales. Si un estudiante obtiene las siguientes calificaciones: 6.5, 7.0, 8.5 y 9 en el examen final, calcule su promedio en el semestre.

Capítulo 3

Conjuntos, funciones y matrices

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector pueda comprender, manejar y solucionar situaciones relacionadas tanto con las abstracciones y los significados como con las propiedades correspondientes a la teoría de conjuntos, las funciones y las matrices.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Reconocer a la teoría de conjuntos como posibilidad de sistematización de la información relevante.
- Manejar el lenguaje matemático (deductivo de los conjuntos, de las funciones y matrices) con la precisión y razonamiento lógico necesarios.
- Utilizar adecuadamente los diagramas de Venn-Euler y de Lewis Carroll.
- Ubicar en los diagramas antes citados: conjunto, conjunto vacío, conjunto universal, elemento, complemento, subconjunto, unión, intersección entre otros.
- Explicar los procesos matemáticos de razonamiento lógico de las propiedades, operaciones y aplicaciones del algebra de conjuntos.
- Definir el concepto de función y relación en términos del producto cartesiano y graficarlo.
- Considerar los conceptos de dominio, contradominio e imagen tanto en las relaciones como en las funciones.
- Reconocer y desarrollar los diferentes tipos de funciones: algebraicas (constante, lineal, cuadrática, cúbica y valor absoluto) y trascendentes (exponencial, logarítmicas).
- Desarrollar el álgebra de funciones.
- Enunciar el concepto de matriz y sus propiedades.
- Identificar los diferentes tipos de matrices.
- Explicar que es un determinante.
- Desarrollar el algebra de matrices: transpuesta, simétrica, inversa, suma y resta, multiplicación por un escalar, producto de dos o más matrices.
- Resolver sistemas de ecuaciones utilizando matrices.
- Utilizar MacStat para resolver el algebra de matrices.
- Considerar MacStat en la solución de sistemas de ecuaciones de “*n*” incógnitas.

INTRODUCCIÓN

No obstante que el estudio de conjuntos, funciones y matrices no siempre forma parte de un curso de estadística, tales temas proveen los conceptos fundamentales que se utilizan en esta disciplina.

La teoría de conjuntos es un sistema con un lenguaje específico para el manejo de ciertos problemas, un instrumento adecuado para la sistematización de la información relevante que permite enfocar un problema en su totalidad, deslindando en él lo que es fundamental. Asimismo, dicho sistema activa la capacidad de análisis, facilitando la visualización de las probables relaciones que existan entre un problema y una solución propuesta.

Dada la metodología propia de los conjuntos y su razonamiento inductivo-deductivo, es posible hacer un análisis lógico de situaciones complejas, así como sistematizar la capacidad analítica en el manejo de una información determinística (no probabilística).

En general, la teoría de conjuntos facilitará de manera significativa la comprensión de la teoría de la probabilidad, los procesos estocásticos y el muestreo, que son básicos, tanto en su razonamiento como en su mecánica de cálculo, para una mejor comprensión y aplicación de la estadística.

CONJUNTOS, CONCEPTOS Y NOTACIÓN

Conjunto

Es tan común en la vida diaria el uso de los conjuntos, que resulta fácil captar intuitivamente su noción, diciendo que *conjunto* es una colección definida de objetos, personas, animales o ideas que por lo general se representa con letras mayúsculas: A, B, C, etc., y, sus elementos, encerrados entre paréntesis o llaves.

■ **Ejemplo 1**

$A = \{a, e, i, o, u\}$ se lee: el conjunto A con los elementos a, e, i, o, u.
$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el conjunto F de dígitos.

Elemento

Se llama *elemento* a cada uno de los miembros de un conjunto determinado; así, en $A = \{a, e, i, o, u\}$ a, e, i, o, u son elementos de A.

Reglas y formas para enunciar los conjuntos

Para enunciar correctamente los conjuntos, hay que tomar en cuenta las reglas siguientes:

a) La colección ha de estar bien definida; no se debe dar cabida a confusiones, es decir, que un elemento esté y no esté en el conjunto. Debe ser preciso, por ejemplo: sea B el conjunto de los días de la semana, $B = \{$domingo, lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado$\}$.
b) Los elementos no se repiten. En un conjunto no deben aparecer dos elementos iguales, por ejemplo: sea D el conjunto de las letras de la palabra *Guadalajara*: $D = \{G, u, a, d, l, j, r\}$.
c) El orden de los elementos es irrelevante. Pueden aparecer en cualquier orden, por ejemplo: sea M el conjunto de las vocales, $M = \{a, i, o, u, e\}$, etcétera.

Para representar un conjunto, se utilizan distintas formas:

- Enumerar sus elementos, se enuncian uno a uno los elementos del conjunto:

$$H = \{1, 2, 3, 4, 5\};\ E = \{a, e, i, o, u\}$$

- Describir una característica de manera verbal que englobe a todos los elementos:

  $A = \{$los meses del año$\}$; $S = \{$los números naturales pares$\}$. Los elementos de A son: enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre.

- Mediante notación matemática o utilizando alguna propiedad definitoria:

$G = \{x \mid x$ sea un número natural$\}$, o utilizando otra notación:

$\{x \mid x \in N\}$ se lee: conjunto formado por todas las x tal que x está en N, donde N es el conjunto de los números naturales.[†]

$J = \{y \mid y > 5, y < 10\}$, se lee: el conjunto J es el conjunto de las y, tal que y sea mayor que 5 y menor que 10.

Existen conjuntos que admiten expresarse en más de una forma, por ejemplo:

$J = \{y \mid y > 5, y < 10\}$

Conjuntos finitos e infinitos

Para los fines de este tema, un conjunto finito es del que se conocen con exactitud cuántos son los elementos que contiene, es decir, que posee cardinalidad.[††]

■ Ejemplo 2

$E = \{2, 4, 8, 10, 12\}$, E es un conjunto finito, tiene cardinalidad = 5. Sea $J = \{y \mid y$ sea una letra de *papá*$\}$ es un conjunto finito, tiene cardinalidad = 3.

[†] $\{x \mid x \in N\}$, se lee: x tal que x pertenece al conjunto de los números naturales.

[††] Cardinalidad es el número de elementos que contiene un conjunto.

Los conjuntos infinitos son aquellos de los cuales no se conoce su cardinalidad por ser demasiado extensos, sin embargo, a los que son numerables infinitos, se les asigna cardinalidad *aleph*.

■ Ejemplo 3

$P = \{$las estrellas$\}$, P es un conjunto infinito.
$O = \{$la arena del mar$\}$, O es un conjunto infinito.
$I = \{$números impares$\}$
$I = \{1, 3, 5, 7, 9,...\}$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

De pertenencia

Esta relación se da entre los elementos y el conjunto; se representa con el signo $\in$, que significa "pertenece a", o "es elemento de". Sea el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ es decir: "el elemento a pertenece a A", así también $e \in A$, $i \in A$, $o \in A$, $u \in A$. En el caso contrario, cuando un elemento no pertenece, se cruza $\in$ ($\notin$), por ejemplo: $b \notin A$, significa "b no pertenece a A".

De inclusión

Esta relación ocurre cuando un conjunto contiene a otro conjunto y se denota con $\subset$, que significa "está incluido en" o "está contenido en". Por ejemplo, sean los siguientes conjuntos A, B y C, que forman parte del conjunto formado por el alfabeto (como conjunto universal):

$$A = \{a, e, i, o, u\},\ B = \{a, e, o\} \text{ y } C = \{i, u\}$$

se observa que $B \subset A$: el conjunto B está incluido en el conjunto A.
se observa que $C \subset A$: el conjunto C está incluido en el conjunto A.

Este símbolo de inclusión se puede invertir y se tiene lo siguiente:

$A \supset B$ el conjunto A incluye al conjunto B.
$A \supset C$ el conjunto A incluye al conjunto C.

Cuando un conjunto no está incluido, o no incluye a otro conjunto, simplemente se utiliza $\not\subset$ o $\not\supset$, por ejemplo:

$C \not\subset B$ el conjunto C no está incluido en el conjunto B.
$B \not\supset C$ el conjunto B no incluye al conjunto C.

Debe tener cuidado de no confundir la relación de pertenencia con la de inclusión, o sea:

$a \subset A$ y $B \in A$ son errores
lo correcto es $a \in A$ y $B \subset A$

Subconjuntos

La relación de inclusión sólo es posible cuando los elementos del conjunto B están contenidos en el conjunto A. Luego entonces, B es subconjunto de A. $B \subset A$: el conjunto B es subconjunto del conjunto A, o, simplemente, B es subconjunto de A. Esto significa que todos los elementos del conjunto B son elementos del conjunto A. Sea $B \subset A$, donde:

$$A = \{a, e, i, o, u\} \text{ y } B = \{a, e, o\}.$$

Existe un caso particular de la relación de inclusión, cuando todos los elementos del subconjunto también pertenecen al conjunto que lo contiene.

■ Ejemplo 4

$A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 1, 5, 6\}$, cuando esto ocurre, se dice que A es subconjunto propio de B, o también que B es subconjunto propio de A. Puesto que $A \subset B$, y $B \subset A$, esto sólo es válido si $A = B$.

Número de subconjuntos de un conjunto

Si toma el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y desea obtener todos los subconjuntos posibles, tendrá:

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{\ \}.\}$$

El número de subconjuntos obtenidos es de 16. En general, el número de subconjuntos de un conjunto dado se determina aplicando 2^n, donde n es el número de elementos del conjunto dado. Sean conjuntos con:

1 elemento, se tendrán 2 subconjuntos = 2^1
2 elementos, se tendrán 4 subconjuntos = 4 = 2^2
3 elementos, se tendrán 8 subconjuntos = 8 = 2^3
4 elementos, se tendrán 16 subconjuntos = 16 = 2^4

y así sucesivamente, considerando que el número de subconjuntos del conjunto vacío es uno; esto también se cumple con $2^0 = 1$.

Conjuntos ajenos

Si el conjunto A no tiene ningún elemento común con el conjunto B, se dice que A y B son conjuntos ajenos (disjuntos). $A)$ $(B$.[†]

Sea:

$$A = \{a, e, i, o, u\} \text{ y } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ son ajenos.}$$

Conjunto universal

Es aquel conjunto que contiene a *todos* los elementos con una característica común y se denota por U; también se utiliza el símbolo Ω. Así, al hacer referencia al conjunto de las vocales, es pertinente llamar

---

[†] Algunos autores utilizan esta notación para conjuntos ajenos.

conjunto universal a las letras del abecedario; o, si se consideran los dígitos, entonces el conjunto universal es el de los enteros positivos.

■ Ejemplo 5

Sea $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $H = \{0, 2, 6, 8\}$ se tendrá que: $E \subset U$
$H \subset U$ o bien $U \supset E$, y
$U \supset H$, respectivamente.

Conjunto vacío

Este conjunto es el que no contiene elementos, y se denota por $\varnothing$, o por $\{\ \}$. Se define a continuación:

$$A = \{x \mid x \neq x\} \text{ entonces, el conjunto } A \text{ es vacío.}$$

Conjuntos iguales

Se dice que dos conjuntos, A y B son iguales ($A = B$), si y sólo si constan de exactamente los mismos elementos. Por ejemplo $M = N$, si:

$M = \{1, 2, 3, 4, 5,\}$ y $N = \{z \mid 1 \leq z < 6\}$, donde z es el conjunto de los números enteros positivos.

Observe que los elementos del conjunto N son aquellos números enteros mayores o iguales a uno y menores que seis. Entonces, los elementos únicos que cumplen las dos condiciones serán: 1, 2, 3, 4 y 5 y, por tanto, $M = N$.

En general, dos conjuntos, A y B, son iguales si cumplen la siguiente condición:

$A = B$ si y sólo si el número de elementos (cardinalidad) es igual y sus elementos son los mismos sin importar el orden.

Conjuntos similares

Son aquellos que tienen la misma cardinalidad, pero con elementos diferentes.

■ Ejemplo 6

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $A \approx B$

DIAGRAMAS DE VENN-EULER Y DIAGRAMAS DE CARROLL

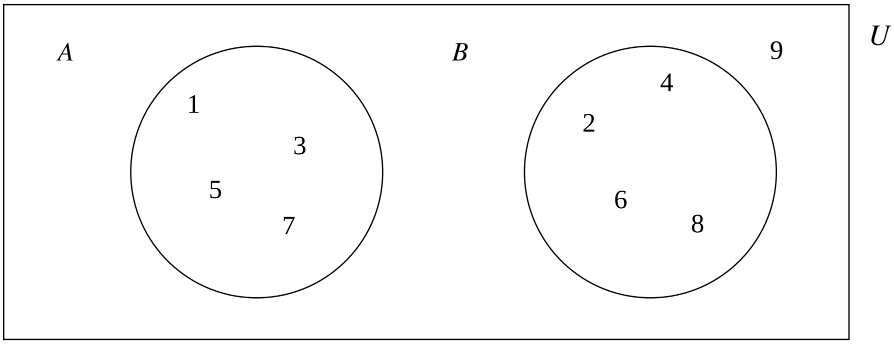
En el estudio de los conjuntos el uso de los diagramas ha permitido explicar de manera gráfica esta importante herramienta matemática, gracias a los trabajos realizados por el matemático inglés John Venn y por el suizo, también matemático, Euler. Estos diagramas representan a los conjuntos y a los subconjuntos, así como a las operaciones que con ellos se realizan.

Dichos diagramas se representan a su vez por medio de un rectángulo, que indica el conjunto universal U, por ser este conjunto el que agota a todos los elementos con una misma cualidad, y dentro del rectángulo los conjuntos que sea necesario expresar, así como las operaciones por realizarse (figura 3.1).

■ Ejemplo 7

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Figura 3.1 Diagrama de Venn-Euler



■ Ejemplo 8

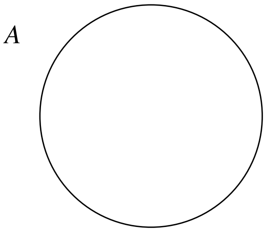
B = Conjunto formado por todos los limítrofes, si son las personas con CI entre 70 y 79 (según el *test* Wais).

A = Conjunto formado por todas las personas con CI inferior a lo normal, es decir, CI entre 0 y 89, por tanto, el conjunto *B* es subconjunto del conjunto *A*.

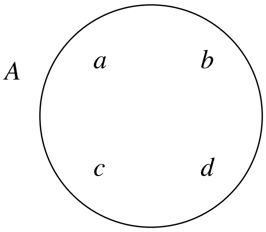
$B \subset A$, o bien, $A \supset B$.

Esto significa que *B* es un subconjunto de *A*; o sea, que todos los limítrofes tienen CI inferior a lo normal, pero no todos los que tienen CI inferior al normal (elementos de *A*), son limítrofes.

Los diagramas de Venn-Euler son figuras geométricas cerradas que representan un conjunto dado; por ejemplo, para representar a cualquier conjunto *A* se tendría:



Si $A = \{a, b, c, d\}$

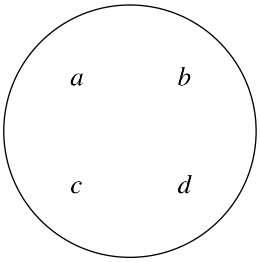


Como se ve, a es elemento de A, así como b, c, d; por tanto:

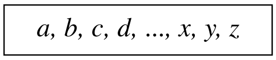
$$a \in A,\ c \in A$$
$$b \in A,\ d \in A$$

Como observa, todas las demás letras del alfabeto no son elementos de A, pero como forman parte del conjunto universal (Ω), son complemento de A.

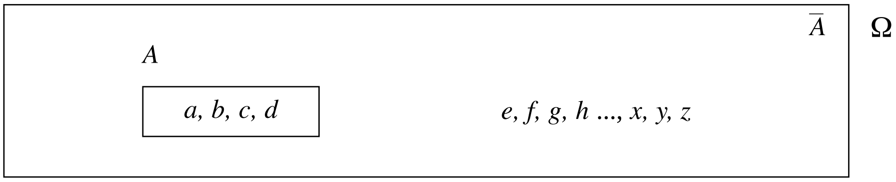
Conjunto A



Conjunto universal (Ω) o U



Por tanto, la representación gráfica será:



donde el conjunto es $A = \{a, b, c, d\}$ y el complemento $\overline{A} = \{e, f, g, h \ldots, x, y, z\}$.

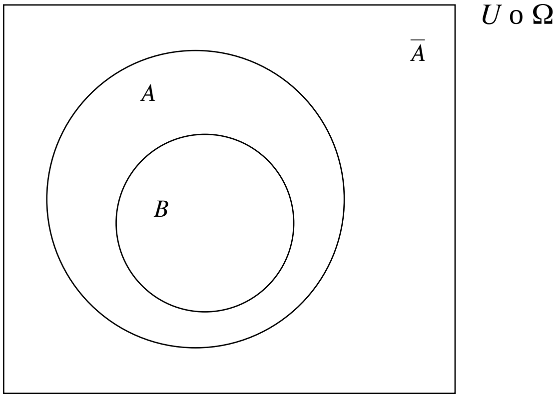
Este conjunto se denota usualmente con el nombre del conjunto y el símbolo:

$(\overline{A})$, $(^c)$, $(')$, (c).

En este caso: $(\overline{A})$, (A^c), (A'), (CA).

Por lo general, el universo se representa por un rectángulo.

La representación gráfica del ejemplo de subconjunto será:



donde:

Ω = Todas las personas a las que se aplicó el examen de inteligencia.

A = Las personas que tienen un CI entre 0-89.

B = Las personas que tienen un CI entre 70-79.

Los diagramas de Carroll (Lewis Carroll, autor de *Alicia en el país de las maravillas*), también llamadas *tablas de contingencia* o *doble entrada*, tienen una ventaja sobre los diagramas de Venn-Euler, ya que pueden contener más de tres conjuntos y permiten visualizar sus relaciones entre ellos muy claramente.

■ Ejemplo 9

Figura 3.2 Diagrama de Carroll

		Escolaridad				
		2º semestre	**4º semestre**	**6º semestre**	**8º semestre**	**Total**
Sexo	Masculino	10	5	12	14	41
	Femenino	12	15	18	14	59
	Total	22	20	30	28	100

10 estudiantes del sexo masculino y en el segundo semestre, 12 del sexo femenino y en el mismo semestre, etcétera.

Conjunto complemento

Se llama *conjunto complemento de A* a aquel conjunto $\overline{A}$ con elementos que pertenecen al conjunto universal y no pertenecen al conjunto A.

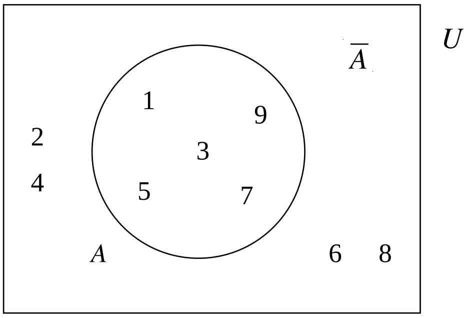
■ Ejemplo 10

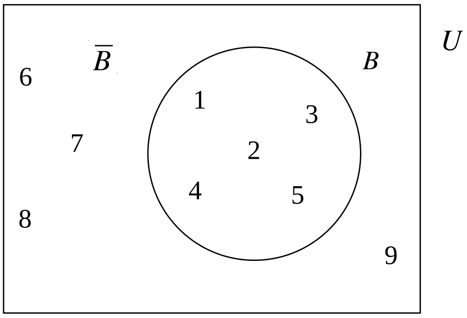
Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$|\overline{A}| = \{x \mid x \in U, x \notin A\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B' = \{6, 7, 8, 9\}$$

Expresado en diagramas de Venn-Euler:





Algunos autores consideran al conjunto complemento como una operación entre conjuntos: la complementación.

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Quizás una de las aplicaciones más importantes de los conjuntos es el álgebra de los mismos, es decir, las operaciones que se realizan con éstos, aplicando los principios que el álgebra utiliza en el sistema de los números reales. Observe las operaciones siguientes.

Unión (∪)

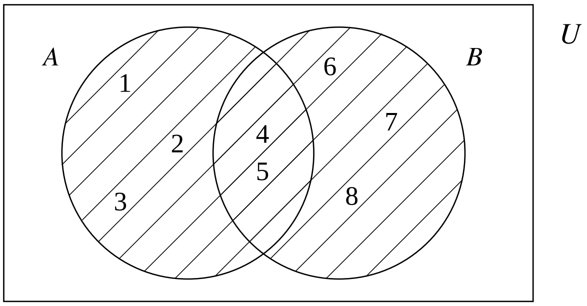
La unión de dos conjuntos A y B (denotada $A \cup B$) es aquel conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B, o a ambos. También suele llamársele *suma lógica* y se representa del modo siguiente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ o ambos}\}$$

se lee: el conjunto A unión B es aquel conjunto de las x tal que x pertenece a A o a B, o a ambos.

■ Ejemplo 11

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Mediante el diagrama de Venn-Euler quedaría:



$A \cup B$

Se recomienda observar en el diagrama que, cuando se realiza una operación, el resultado debe achurarse (cruzarlo con rayas diagonales tenues).

Casos

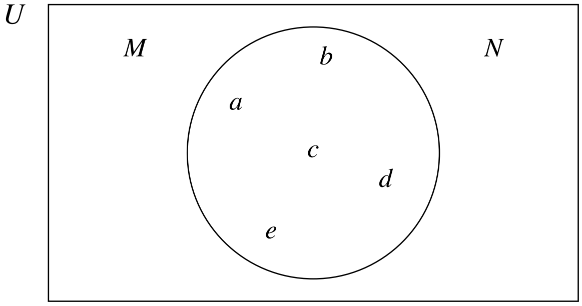
Unión de conjuntos iguales

Sea $M = \{a, b, c, d, e\}$, $N = \{b, c, d, e, a\}$, $M \cup N = \{a, b, c, d, e\}$

Observe que la unión de conjuntos iguales es un conjunto igual a cualesquiera de ellos, cabe recordar que los elementos de un conjunto no deben repetirse.

El diagrama de Venn-Euler será:

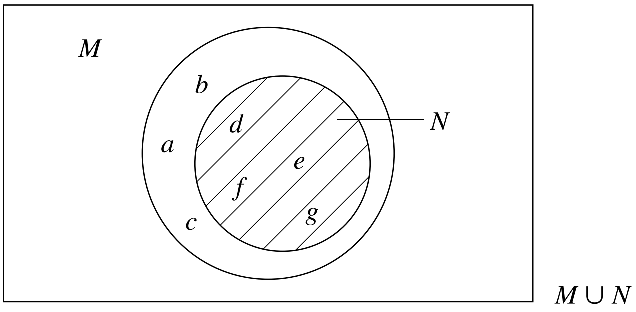
$M \cup N$



Unión de un subconjunto y un conjunto

$$\text{Sea } M = \{a, b, c, d, e, f, g\} \text{ y } N = \{d, e, f, g\}$$

entonces la unión será: $M \cup N = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, por lo que la unión de un conjunto con un subconjunto es igual al mismo conjunto:

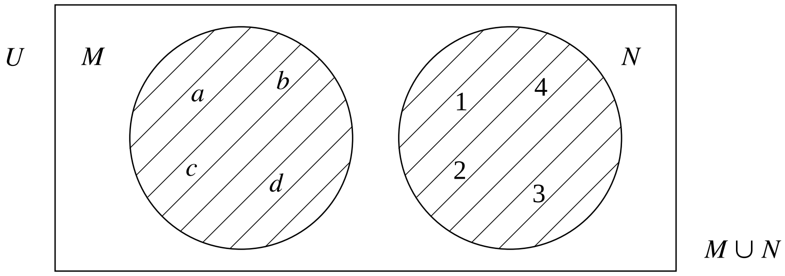


Unión de conjuntos ajenos (disjuntos)

$$\text{Sea } M = \{a, b, c, d\} \text{ y } N = \{1, 2, 3, 4\}$$

la unión es $M \cup N = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\}$.

Tome en cuenta que la unión está formada por todos los elementos de los dos conjuntos; esto significa que la cardinalidad del conjunto unión es la suma aritmética de la cardinalidad de cada uno de los conjuntos que la conforman: $n\,(M) = 4$ y $n\,(N) = 4$, por lo que $n\,(M \cup N) = 8$.



Intersección (∩)

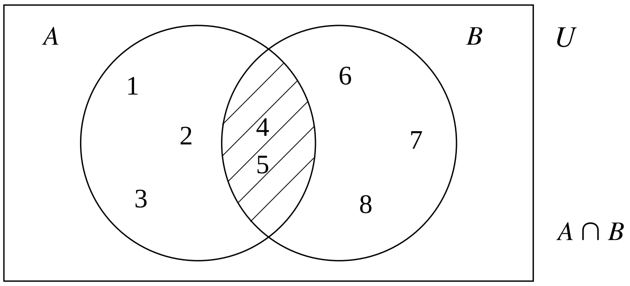
La intersección de dos conjuntos A y B ($A \cap B$), es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y B simultáneamente. También suele llamarse *producto lógico de dos conjuntos* y se representa de la manera siguiente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Este nuevo conjunto es la intersección de A y B, formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B simultáneamente.

■ Ejemplo 12

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B \{4, 5, 6, 7, 8\}$, entonces la intersección será: $A \cap B = \{4, 5\}$, representada con el diagrama siguiente:



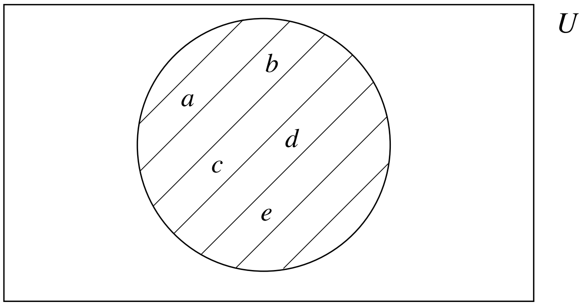
Casos

Intersección de conjuntos iguales

Sean $M = \{a, b, c, d, e\}$ y $N = \{b, c, d, e, a\}$

La intersección será $M \cap N = \{a, b, c, d, e\}$.

La intersección de dos conjuntos iguales es igual a un solo conjunto. El diagrama correspondiente será:



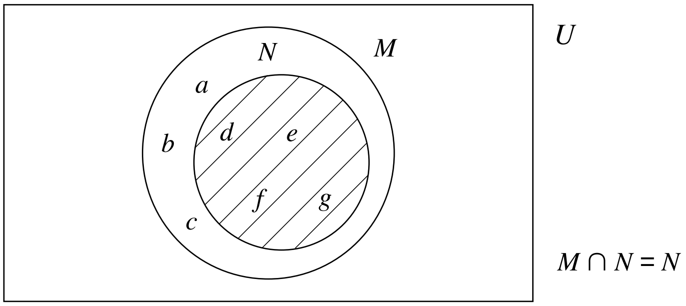
$M \cap N$

Intersección de un conjunto y un subconjunto

Sea $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $N = \{d, e, f, g\}$

La intersección es $M \cap N = \{d, e, f, g\}$.

La intersección de un conjunto y uno de sus subconjuntos es igual al subconjunto dado.

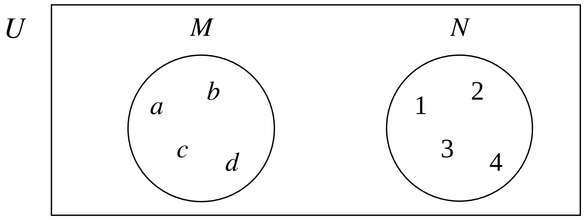


Intersección de conjuntos ajenos (disjuntos)

Sean $M = \{a, b, c, d\}$ y $N = \{1, 2, 3, 4\}$

La intersección es $M \cap N = \varnothing$.

$M \cap N = \varnothing$



La intersección de conjuntos disjuntos o ajenos es el conjunto vacío, porque no existen elementos comunes.

Diferencia o resta aritmética ($A - B$)

La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. También se le suele llamar *complemento relativo*. Su definición es:

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$. “El conjunto A menos B es el conjunto de las x tal que x pertenece a A y no pertenece a B.”

El conjunto B menos el conjunto A es el conjunto formado por todos los elementos que están en B, pero que no están en A, $A - B \neq B - A$, o sea:

$B - A = \{x \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$, se concluye que $A - B \neq B - A$, la resta aritmética no cumple la propiedad conmutativa.

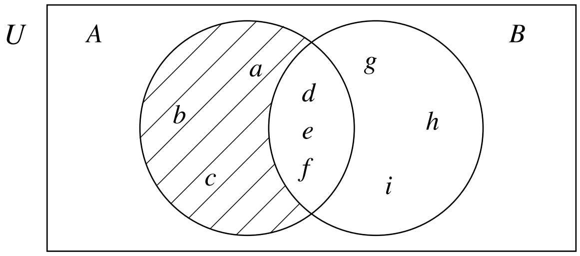
■ Ejemplo 13

Sean dos conjuntos A y B, tales que:

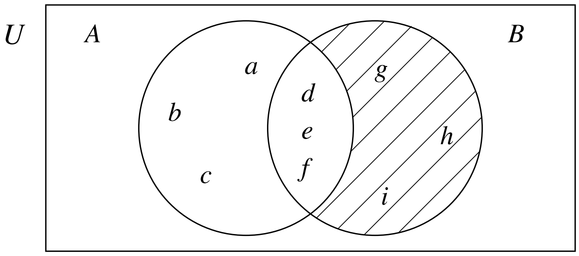
$$A = \{a, b, c, d, e, f\} \text{ y } B = \{d, e, f, g, h, i\}$$
$$A - B = \{a, b, c\}$$
$$B - A = \{g, h, i\}$$

Los diagramas correspondientes serán:

$A - B$



$B - A$



Casos

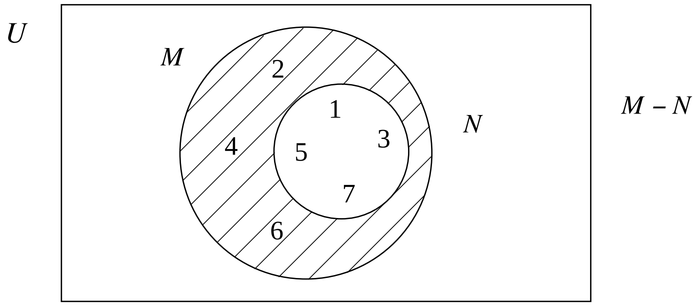
Diferencia de conjuntos iguales

$$\text{Sean } M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$M - N = \{\ \} = \varnothing$. En este caso se cumple $M - N = N - M$

Diferencia de un conjunto y uno de sus subconjuntos

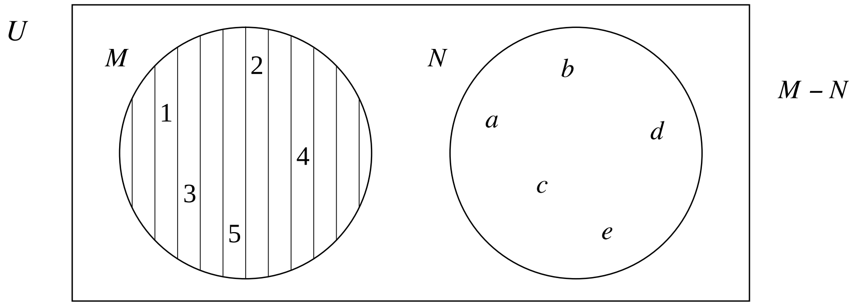
$$\text{Sean } M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ y } N = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$M - N = \{2, 4, 6\}$$



Diferencia de conjuntos ajenos (disjuntos)

$$\text{Sean } M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } N = \{a, b, c, d, e\}$$
$$M - N = \{1, 2, 3, 4, 5\} = M$$

La diferencia de dos conjuntos ajenos es igual al conjunto minuendo.



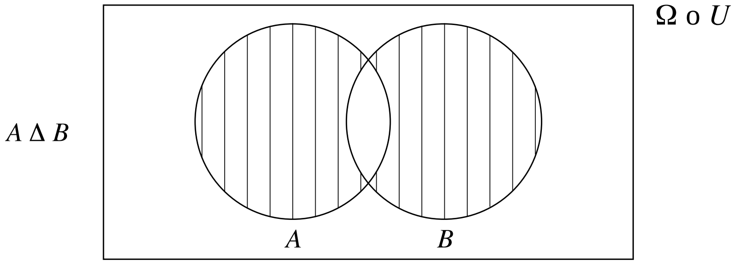
Diferencia simétrica entre dos conjuntos ($A \Delta B$)

La diferencia simétrica de conjuntos es el formado por todos aquellos elementos que están en la unión pero no en la intersección.

Sean los conjuntos A y B; la diferencia simétrica (Δ) queda establecida de la manera siguiente:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ y } x \in (A \cap B)\}$$

Lo anterior queda representado en el diagrama de Venn-Euler que se muestra a continuación:



donde $A \,\Delta\, B$ es el área marcada con líneas.

$$A \,\Delta\, B = \{(A \cup B) - (A \cap B)\}$$

Propiedades de los conjuntos

Si intercambia los operadores (+) por ∪, (×) por ∩ o por (·), el conjunto universal (U) por 1 y el conjunto vacío (Φ) por 0, así como los numerales por conjuntos, respectivamente, entonces, por razones nemotécnicas, sólo podrán utilizarse las reglas de la aritmética en forma análoga con las propiedades de los conjuntos.

Esto se presenta en la tabla siguiente; por supuesto, en el caso de conjuntos, dichas propiedades se pueden verificar o justificar por medio de diagramas de Venn-Euler o de Lewis Carroll, según el caso, y, en general, se podrán comprobar utilizando axiomas o teoremas. Esto último queda fuera del nivel de esta obra.

Ley aritmética	Propiedad	Ley de conjuntos
1. $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)\, c = a\, (bc)$	Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $a\, (b + c) = ab + ac$	Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $a + 0 = a$ $a\, 0 = 0$	Existencia de “0”	$A \cup \varnothing = A, \;\; A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $a\, 1 = a$	Existencia de “1”	$A \cap \Omega = A$

Por último, existe una propiedad exclusiva para conjuntos que no tiene equivalente en aritmética, en relación con el complemento de conjuntos:

6. Para cualquier conjunto A hay solamente un conjunto complemento $\overline{A}$, tal que:

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$
$$(\overline{A})^c = A$$
$$\overline{\Omega} = \varnothing$$
$$\overline{\varnothing} = \Omega$$

7. Leyes De Morgan:

$$\text{a) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\text{b) } \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

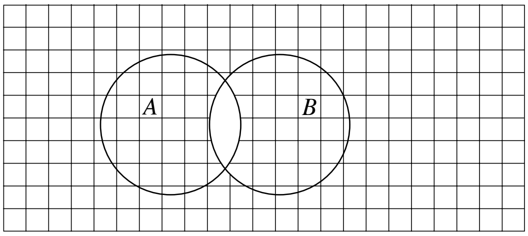
8. Leyes idempotentes:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

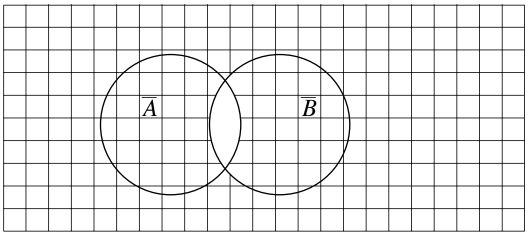
a) Si $A = B$ y $C = D$ implica que $A \cup C = B \cup D$
b) Si $A = B$ y $C = D$ implica que $A \cap C = B \cap D$
c) Si $A = B$ implica que $\overline{A} = \overline{B}$

Justificación de una de las leyes De Morgan por medio de los diagramas de Venn-Euler:

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$



$\overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{A \cap B}$

De esta forma, el lector podrá verificar todas las propiedades de los conjuntos; es recomendable que lo efectúe para tener una buena idea gráfica de ellos.

Relación de igualdad

1. $A = A$	propiedad de reflexión
2. $A = B \Leftrightarrow B = A$	propiedad de simetría
3. $A = B$ y $B = C \Leftrightarrow A = C$	propiedad de transitividad

Relación de inclusión

1. $A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$	propiedad de reflexión
2. $A \subset B \not\Leftrightarrow B \subseteq A$	propiedad de no simetría
3. $A \subset B$ y $B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$	propiedad de transitividad

Operaciones algebraicas

1. $A \cup B = B \cup A$	propiedad conmutativa
2. $A \cap B = B \cap A$	propiedad conmutativa
3. $A - B \neq B - A$	no se cumple la propiedad conmutativa para la diferencia entre dos conjuntos
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	propiedad asociativa
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	propiedad asociativa
6. $(A - B) - C \neq A - (B - C)$	no se cumple la propiedad asociativa para la resta

7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ propiedad distributiva de la intersección
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ propiedad distributiva de la unión

Otras propiedades

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A \cup \varnothing = A \\ 2.\ A \cap U = A \\ 3.\ A \cup U = U \\ 4.\ A \cap \varnothing = \varnothing \end{array}\right\} \text{propiedades de identidad}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A \cup A = A \\ 2.\ A \cap A = A \end{array}\right\} \text{propiedades de idempotencia}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \varnothing' = U \\ 2.\ U' = \varnothing \\ 3.\ (\overline{A}') = A \end{array}\right\} \text{propiedades de complementación}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (A \cup B)' = A' \cap B' \\ 2.\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array}\right\} \text{propiedad De Morgan}$$

CONTEO DE ELEMENTOS

Uno de los problemas con los que se enfrenta un investigador es el de evaluar la ocurrencia de ciertos eventos cuando se lleva a cabo una investigación, estudio o experimento. Aunque este tipo de problemas pertenece al campo de la probabilidad, en muchos casos podrán resolverse enumerando (conteo de elementos) los puntos (eventos) en un espacio de eventos.

El principio fundamental del conteo se establece por medio del teorema siguiente:

Teorema Si una operación puede llevarse a cabo en n_1 formas, y si para cada una de estas operaciones se puede efectuar una segunda operación en n_2 formas, entonces las dos pueden efectuarse simultáneamente en $n_1 \cdot n_2$ formas.

Cardinalidad

La cardinalidad de un conjunto A es el número de elementos que contiene el conjunto, y se denota como $n(A)$.

Suponga que A y B son dos conjuntos cualesquiera, cabe considerar dos posibilidades:

1. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
2. Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

En tal caso, se observa que $A \cup B$ incluye todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B, pero cada uno de ellos debe contarse sólo una vez. Se observa que $n(A) + n(B)$ excede a $n(A \cup B)$, por $n(A \cap B)$

o sea: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

■ Ejemplo 14

Al entrevistar a 100 familias, se observó que 75 de ellas tenían suscripción al periódico *Tiempo*, 55 a *La Prensa* y 10 a ninguno de ellos. ¿Cuántas familias están suscritas en ambos?

Sea A el conjunto de familias que están suscritas al periódico *Tiempo*.
Sea B el conjunto de familias que están suscritas al periódico *La Prensa*.

Conoce los siguientes datos:

$$n(U) = \text{conjunto universal} = 100$$
$$n(A \cup B) = 90$$
$$n(A) = 75$$
$$n(B) = 55$$

Se encuentra ante la posibilidad:

$$A \cap B \neq \varnothing$$

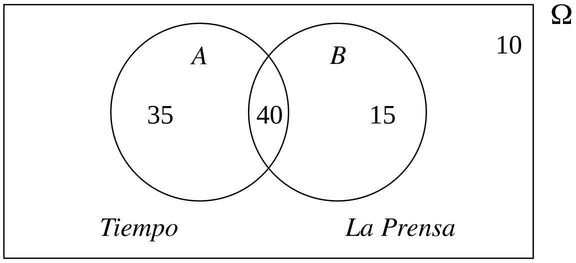
Por eso usa la fórmula siguiente:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Sustituye con los datos del problema:

$$90 = 75 + 55 - n(A \cap B)$$
$$n(A \cap B) = 75 + 55 - 90$$
$$n(A \cap B) = 40$$

En un diagrama de Venn-Euler lo visualiza:



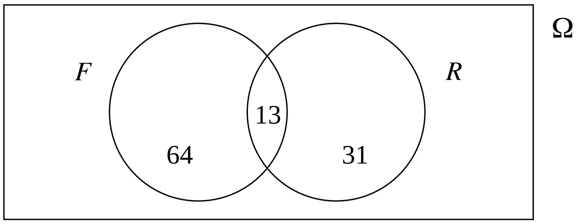
40 familias están suscritas en ambos periódicos.

■ Ejemplo 15

En una encuesta efectuada en un centro de idiomas, se encontró que 77 personas estudiaban francés, 44 ruso y 13 tanto francés como ruso. ¿Cuántas personas estaban estudiando por lo menos un idioma extranjero?

Observe que un alumno que estudia tanto francés como ruso se encuentra en los dos grupos, de manera que la suma 77 + 44 cuenta a los estudiantes dos veces. Para corregir este error, se debe restar 13 (los que estudian ambos idiomas simultáneamente). Así, 77 + 44 – 13 = 108, que es el número de estudiantes que aprenden por lo menos una lengua extranjera.

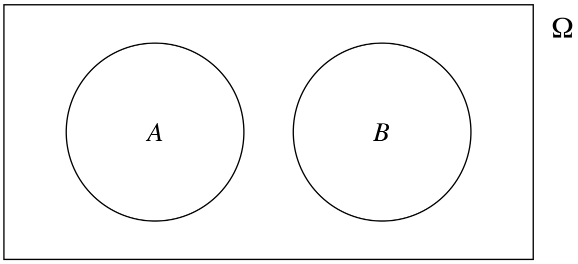
$$n(F \cup R) = n(F) + n(R) - n(F \cap R) = 77 + 44 - 13 \Rightarrow n(F \cup R) = 108$$



F = Los que estudian francés.
R = Los que estudian ruso.

Si $A \cap B = \varnothing$, la ecuación anterior se reduce a:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

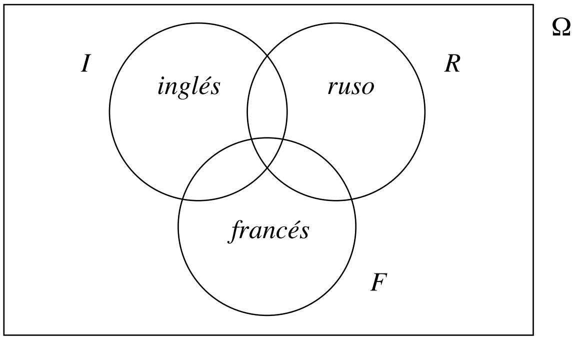


Conteo de elementos para tres conjuntos

Como en el caso de dos conjuntos, cuando la información a clasificar requiere tres, pueden seguirse utilizando los diagramas de Venn-Euler.

■ Ejemplo 16

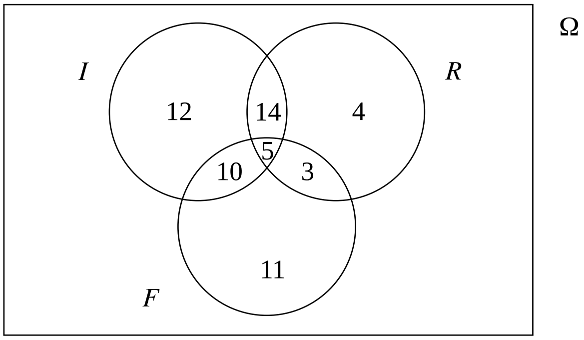
En una encuesta aplicada a 100 estudiantes se obtuvo la siguiente información: 41 alumnos estudian inglés, 29 francés, 26 ruso; 15 estudian inglés y francés, 8 francés y ruso, 19 inglés y ruso y 5 estudian los tres idiomas. Esto es:



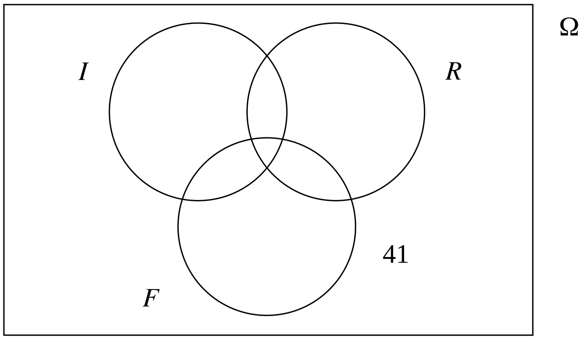
donde:

I = Los que estudian inglés
F = Los que estudian francés
R = Los que estudian ruso

Una vez ubicada la información en un diagrama de Venn-Euler, tiene lo siguiente:



Al contar todos estos elementos, el resultado es 59 estudiantes, pero la muestra es de 100. ¿Dónde se encuentran los demás estudiantes y qué significa esto?



41 alumnos no estudian algún idioma.

Para tres conjuntos, donde la intersección es diferente del vacío ($A \cap B \cap C \neq \varnothing$), se cumple lo siguiente:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

Si se considera el complemento de $(\overline{A \cup B \cup C})$ significa: todos aquellos elementos que están en el conjunto universal (Ω), excepto los elementos que están en ($A \cup B \cup C$), o, en otras palabras:

$$n(\Omega) - n(A \cup B \cup C),$$

es decir,

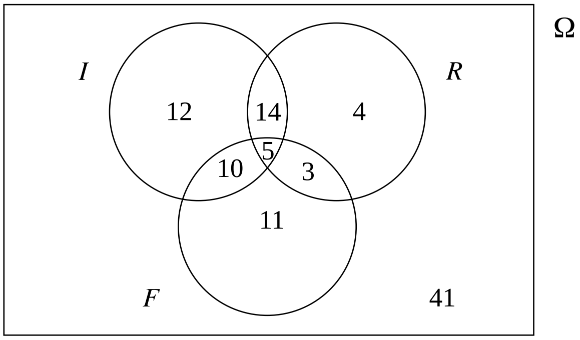
$$n(A \cup B \cup C) = n(\Omega) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$$

que, aplicado al ejemplo anterior, da como resultado:

$$n[(\overline{I \cup R \cup F})] = n(\Omega) - n(I) - n(R) - n(F) + n(I \cap R) + n(R \cap F) + n(F \cap I) - n(I \cap R \cap F)$$

$$n(\overline{I \cup R \cup F}) = 100 - 41 - 26 - 29 + 19 + 8 + 15 - 5 = 41$$

Como $n(\overline{I \cup R \cup F})$ significa todos aquellos alumnos que no estudian inglés, ruso o francés, ubicados en el diagrama de Venn-Euler, da:



Además, este diagrama proporciona la siguiente información: 12 + 11 + 4 = 27, que son los alumnos que estudian únicamente un idioma (inglés, francés o ruso).

Conteo de elementos para más de tres conjuntos

Cuando la información relevante se tiene que ubicar en más de tres conjuntos, la representación gráfica mediante los diagramas de Venn-Euler se complica y, en lugar de aclarar y facilitar la solución del problema, lo torna confuso. Por fortuna, existe otro tipo de representación gráfica que acepta un número grande de conjuntos y combinaciones entre ellos.

Estos diagramas —bastante lógicos— fueron innovados por Lewis Carroll. Se conocen como *tablas de contingencia* o *diagramas de Carroll*. A continuación se ilustran en un problema donde intervienen siete conjuntos.

■ Ejemplo 17

En una estancia infantil, con una población de 9 educadoras, 22 niños y 20 niñas, se hizo un estudio en el que, entre otras cosas, se les pidió que señalaran su color favorito. De este modo se obtuvo lo siguiente:

22
10 niños mencionaron el color rojo
5 niños señalaron el color azul
3 niños indicaron el color amarillo
4 niños mencionaron el color verde

+

20
6 niñas mencionaron el color rojo
11 niñas indicaron el color azul
2 niñas señalaron el color amarillo
1 niña mencionó el color verde

+

9
3 educadoras señalaron el color rojo
4 educadoras indicaron el color azul
1 educadora mencionó el color amarillo
1 educadora señaló el color verde

51

Estos datos se ordenan en la siguiente tabla de contingencia:

	Rojo	**Azul**	**Amarillo**	**Verde**	**Total**
Niños	10	5	3	4	22
Niñas	6	11	2	1	20
Educadoras	3	4	1	1	9
Total	19	20	6	6	51

■ Ejemplo 18

En una encuesta a 600 estudiantes de primer ingreso a la Facultad de Psicología (400 mujeres, 200 hombres) se les pidió que señalaran dos posibles áreas de especialidad de su interés.

	Clínica y social	**Clínica e industrial**	**Social e industrial**	**Educativa e industrial**	**Clínica y educativa**	**Educativa y social**	**Total**
Hombres	20	25	110	15	5	25	200
Mujeres	80	120	20	50	100	30	400
Total	100	145	130	65	105	55	600

Realice los siguientes ejercicios:

donde:

H = Hombres, M = Mujeres, C = Clínica, I = Industrial, S = Social, E = Educativa

1. $n\ [(H \cap C \cap I) \cup (M \cap C \cap I)] =$
2. $n\ [(C \cup S)] =$
3. $n\ [(C \cup S) \cap E] =$
4. $n\ [(C \cap S) \cup (C \cap E)] =$
5. $n\ [M \cup (C \cap I)] =$
6. $n\ [(\overline{E} \cap I) \cup H] =$
7. $n\ [(\overline{H \cup C})]^{c} =$
8. $n\ [(H \cup C)] =$
9. $n\ [(\overline{M} \cup H \cap I)] =$
10. $n\ [(I \cup (E \cap I)] =$
11. $n\ [(\overline{C \cup E}) \cup (M \cap H)] =$
12. $n\ [H - (C \cap S) \cup (E \cap I) \cup (C \cap I)] =$
13. $n\ (C\ \Delta\ I) =$
14. $n\ (\overline{E} \cup H \cap C \cap I) =$

PRODUCTO CARTESIANO

Antes de definir y explicar qué es un producto cartesiano conviene conocer lo que es un par ordenado.

Sean dos conjuntos A y B no vacíos; tome un elemento de cada conjunto. Se busca formar un conjunto que dependa de dichos elementos y del orden en el que se presentan.

Sea $x \in A \wedge$[†] $y \in B$, y (x, y); la expresión anterior se llama *par ordenado*. "Existe un conjunto que depende de $x \wedge y$" que tienen, además de un orden, primera componente y segunda componente, respectivamente.

Ahora, una definición de plano cartesiano.

Definición El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados donde la primera componente pertenece a A y la segunda a B. Se denota del siguiente modo.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

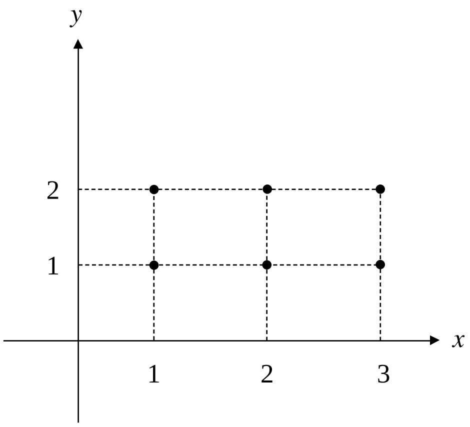
■ Ejemplo 19

$$\text{Sean } A = \{1, 2, 3\} \wedge B = \{1, 2\}$$
$$A \times B = \{(1, 1)\ (1, 2)\ (2, 1)\ (2, 2)\ (3, 1)\ (3, 2)\}$$

La expresión anterior puede ser representada en un plano: son dos rectas perpendiculares, una llamada *abscisa* y la otra *ordenada*.

$$(x, y) \Rightarrow (x \rightarrow \text{abscisa}, y \rightarrow \text{ordenada})$$

Figura 3.3 Plano cartesiano



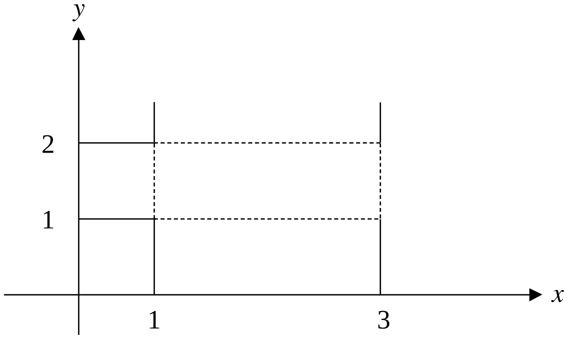
También puede dibujar áreas en el plano cartesiano (incluyendo desigualdades), de la siguiente manera:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 <= x <= 3\}$
$[c, d] = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 <= y <= 2\}$
$\mathbb{R}$ = Conjunto de números reales.

Si realiza el producto cartesiano obtiene
$[a, b]\ x\ [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$

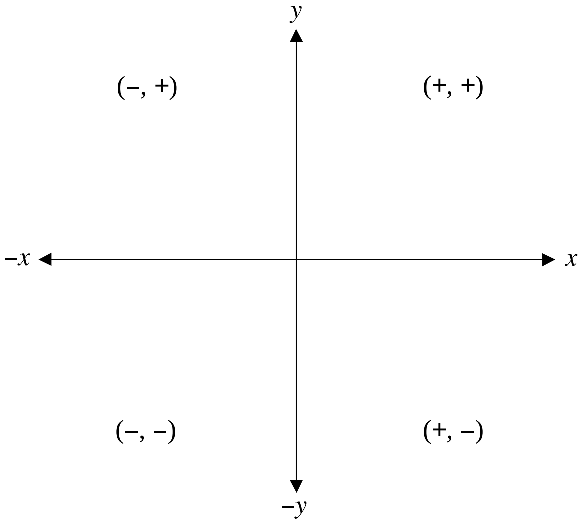
[†] $\wedge$ significa y.

Geométricamente, obtiene el rectángulo siguiente.



El tema de desigualdades se retomará más adelante, con su uso y propiedades.

Como se observa, por medio del producto cartesiano se dibuja un plano, que se denota como $\mathbb{R}^2$. A continuación se muestra con sus signos respectivos:



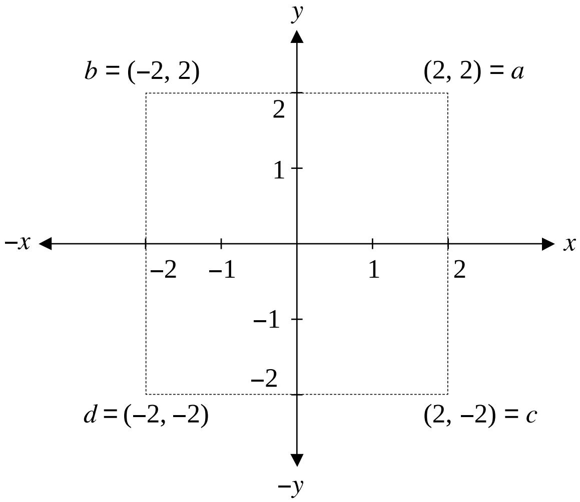
Localice los siguientes puntos en el plano cartesiano:

$a = (2, 2)$

$b = (-2, 2)$

$c = (2, -2)$

$d = (-2, -2)$



RELACIONES Y FUNCIONES

Una vez entendido el concepto de producto cartesiano, será fácil para el lector comprender que una relación es un subconjunto del plano cartesiano.

Definición Si A y B son dos conjuntos no vacíos, se define una relación entre A y B (R) como sigue:

$$R = \{x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \in A \times B$$

■ Ejemplo 20

En un salón de clase hay cinco alumnos y cinco sillas. La relación será la siguiente:

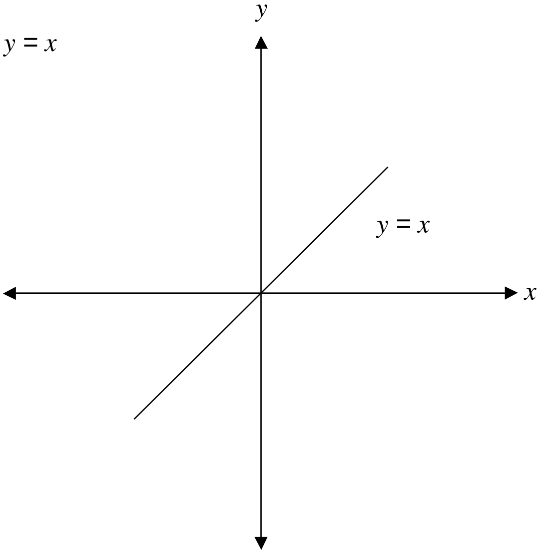
El dibujo de esta relación indica que a cada niño le corresponde una silla o, de otra forma, a cada silla le corresponde un niño.[†]

El número de alumnos o de sillas puede ser diferente, incluso hacer comparaciones entre conjuntos, a éstas se les llama *relaciones binarias*. Las relaciones binarias de mayor uso en las matemáticas son las siguientes:

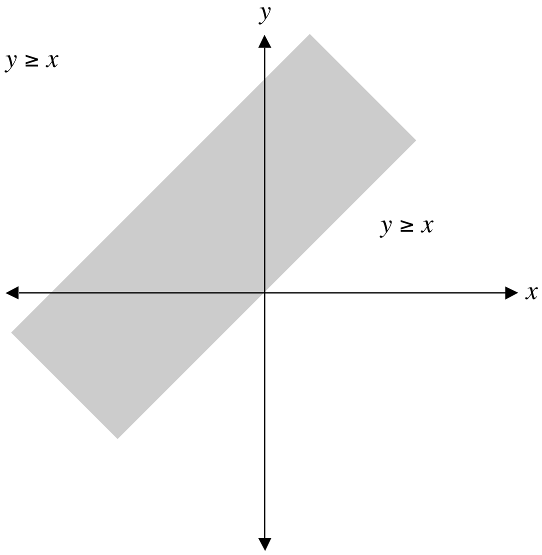
=	*igual a*	≥	*mayor o igual*
≠	*diferente de*	<	*menor que*
⇔	*equivale a*	≤	*menor o igual*
∈	*pertenece a*	⊥	*es perpendicular a*
⊂	*está contenido en*	||	*es paralelo a*
>	*mayor que*		

[†] Puede determinar que a los elementos del conjunto A se les llame (x), y (y) a los del conjunto B, es decir, a cada alumno le corresponde una x y a cada silla le corresponde una y. Así forma la pareja ordenada (x, y).

Algunas de estas relaciones pueden ser representadas en el plano cartesiano, como las siguientes:



$y = x$

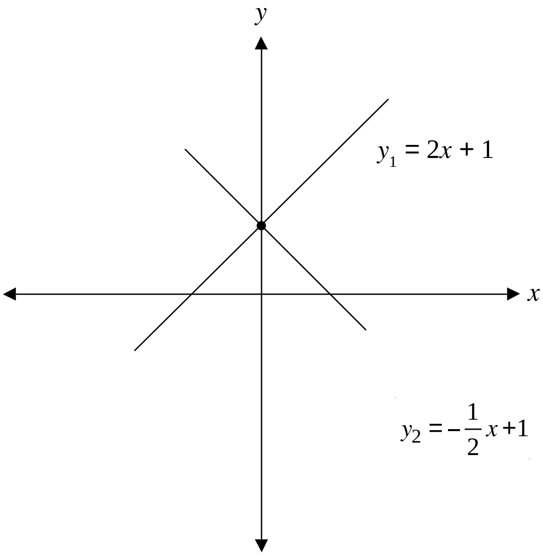


$y \geq x$

$y = 2x + 1$

$y_2 = -\frac{1}{2}x + 1$

$\therefore\ y_1 \perp y_2$



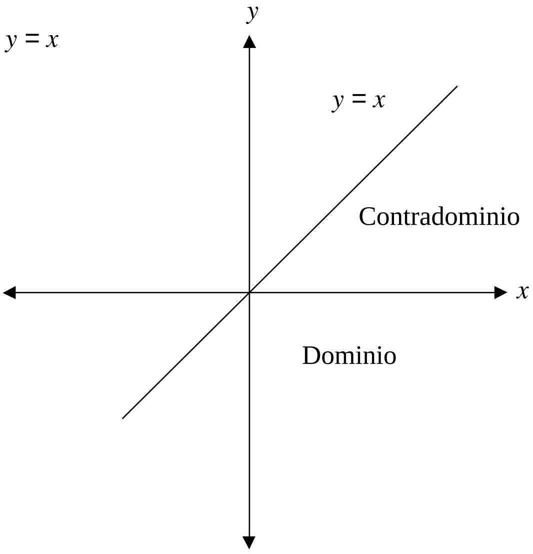
y_1 y y_2 son perpendiculares, ya que la intersección de ambas rectas forma un ángulo de 90º.

Dominio y contradominio

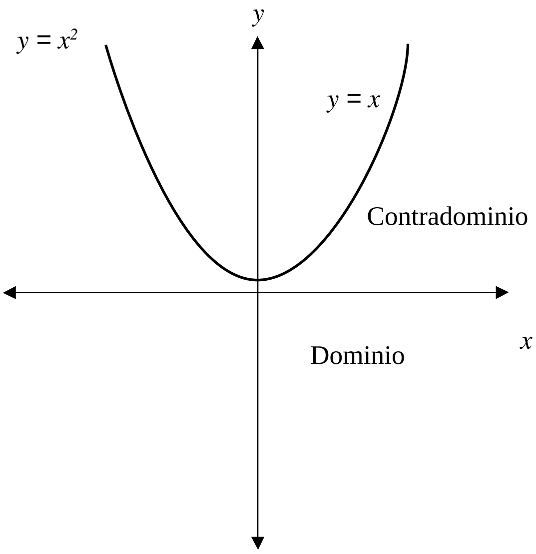
Para una mejor comprensión de dominio y contradominio, a continuación se presentarán algunos ejemplos, para después brindar las definiciones pertinentes.

En el ejemplo de las sillas, se llama *dominio* al conjunto de los alumnos *y contradominio* al conjunto de las sillas.

Para:



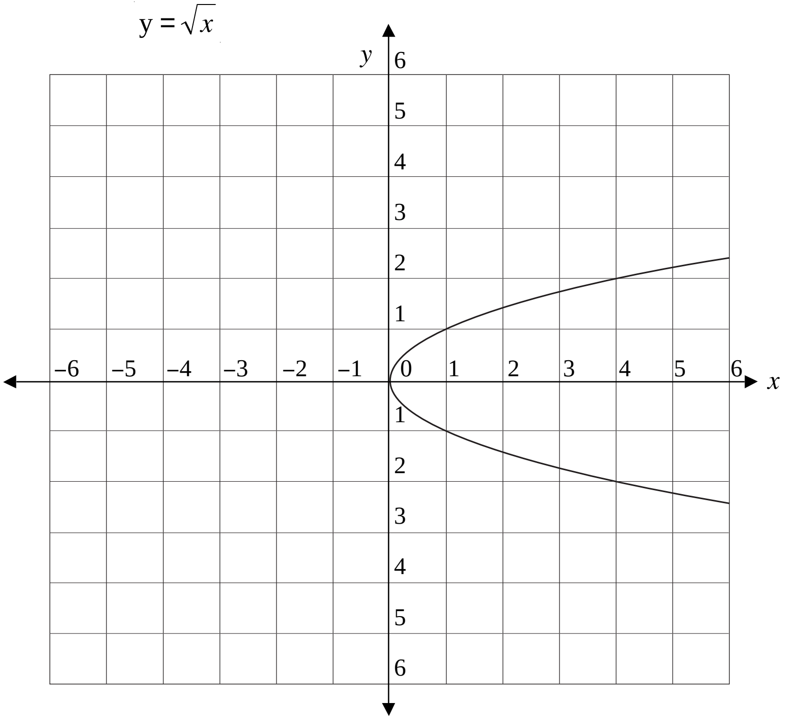
Dominio = $x \in \mathbb{R}$
Contradominio = $y \in \mathbb{R}$



Dominio = $x \in \mathbb{R}$
Contradominio = $y \geq 0$

Gráfica raíz de *x*

Dominio = $x \geq 0$
Contradominio = $y \geq 0$



Nota: si se consideran únicamente a las raíces positivas, la imagen estará formada por los reales positivos. Algunos autores usan los términos *imagen*, *codominio*, *rango* o *ámbito* cuando se refieren al contradominio.

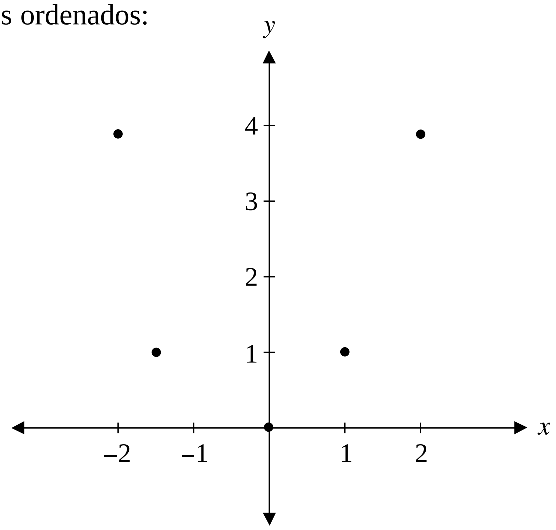
En textos avanzados de matemáticas, la *imagen* tiene una definición diferente al de contradominio. En esta obra se considerará como lo mismo.

Se observa que a cada primer elemento le corresponde un segundo elemento. Se dibujarán sólo algunos puntos de la siguiente relación, formándose los pares ordenados:

$y = x^2$

x	y
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4

(–2, 4)
(–1, 1)
(0, 0)
(1, 1)
(2, 4)



A todos los posibles valores que pueda tomar el eje x se les llama *dominio*.

A todos los posibles valores que pueda tomar y se les conoce como *contradominio*.

A continuación se establecen las definiciones formales de estos dos puntos. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y R una relación.

El dominio de R es la totalidad de los elementos de A, que admite contradominio en B.

$$D_R = \{x \in A \mid (x, y) \in R\}$$

La imagen de R es el conjunto de los elementos de B, que provienen de un valor en A.

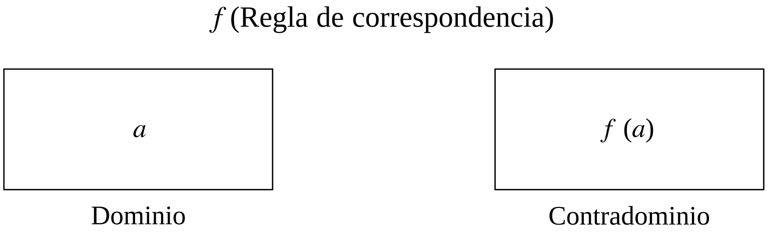
$$C_D = \{y \in B \mid (x, y) \in R\}$$

donde R es la relación.

El lector estará en condiciones de aprender las funciones.

Definición Una *función* es una terna formada por:

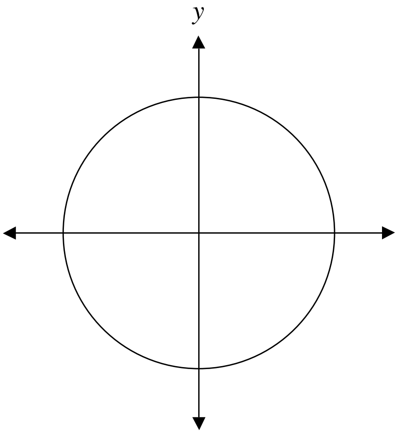
1. Un primer conjunto no vacío llamado *dominio de la función*.
2. Un segundo conjunto no vacío llamado *contradominio de la función*.
3. Una regla de correspondencia que tenga las siguientes propiedades:
   a) Por medio de ella a cualquier elemento del dominio de la relación se le puede asociar un elemento del contradominio.
   b) Ningún elemento del dominio se quedará sin su asociado en el contradominio.
   c) Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el contradominio.



Por la definición anterior se concluye que toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

El siguiente es un ejemplo para ilustrar la conclusión anterior:

$$f\left(x\right) = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad \text{(I)}$$



x	$f(x)$
–3	± 4
–2	$\pm\sqrt{21}$
–1	$\pm\sqrt{24}$
0	0
1	$\pm\sqrt{24}$
2	$\pm\sqrt{21}$
3	± 4

Al realizar la regla de correspondencia de algunos puntos, se tiene que:

$$f(4) = \pm\sqrt{25 - (4)^2} = \pm\sqrt{25 - 16} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Con el valor obtenido se forman las siguientes parejas ordenadas:

(4, 3)
(4, –3)

Como se observa, para la primera componente se tienen dos valores diferentes en la segunda componente.

El resultado anterior no cumple con la propiedad 3*c* de la definición de función; por tanto, la expresión (*I*) no es función, sino una relación.

Variables dependientes e independientes

Al referirse a una relación matemática, se ha observado que algo varía en función a otra u otras; por lo general, a este tipo de valores se les conoce como *variables*. Así, si una variable está dada en función de otra, se le llama *variable dependiente* y a la otra *variable independiente*, cuyas características son el ser susceptibles de medirse y expresarse de la siguiente forma:

$$y = f(x)$$

y es una función de x lo que puede expresarse como $y = f(x)$, donde y es la variable dependiente y la independiente es x.

■ Ejemplo 21

A todo estímulo (E) le corresponde una respuesta (R); mediante la notación funcional, se tiene:

$$R = f(E)$$

variable dependiente variable independiente

■ Ejemplo 22

$$y = 3x^3 + 1$$

variable independiente

variable
dependiente

Variable independiente porque puede tomar cualquier valor en un intervalo determinado, es decir, se le pueden asignar $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, si el intervalo es $\{0 < x < 5\}$ y x está en N.

En tanto que a y se le nombra *variable dependiente* porque sus valores están en función de los de x.

Antes de continuar con el desarrollo de las funciones, es conveniente explicar en qué consisten los intervalos, debido a que el uso de éstos se revisará en el transcurso de los siguientes capítulos.

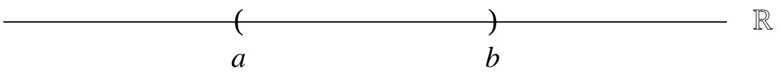
Intervalos y desigualdades

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales, al fijar la atención en un solo segmento de recta, entonces se necesitan definir conceptos y notación. Puede limitar esta recta por medio de desigualdades o igualdades, incluso cuando hable de un punto.

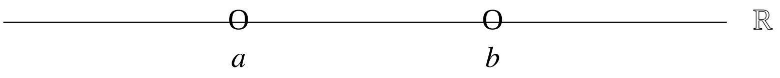
Los intervalos pueden ser *cerrados*, *abiertos* o *híbridos*. Se presentan los siguientes casos:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \text{ Intervalo abierto}$$

La expresión anterior indica que x *solamente* tomará los valores entre a y b, pero no incluye los de a y b. En la recta numérica queda así:



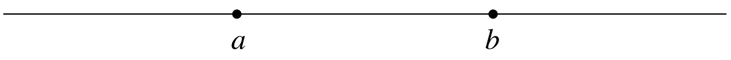
o también



Sea el intervalo:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \text{ Intervalo cerrado}$$

En este caso, x sí podrá tomar el valor a y b. Como se puede observar, las desigualdades indican si se incluyen los extremos que limitan el intervalo. En la recta numérica queda expresado de la siguiente forma:

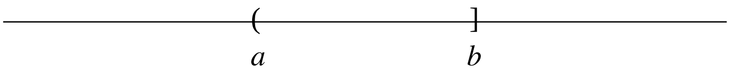


o también

Los *híbridos*, también llamados *semiabiertos*, son éstos:

$[a, b] = \{x \mid a \leq x < b\}$

$[a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$



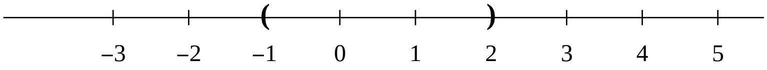
Antes de explicar algún ejemplo numérico, aparece uno cotidiano.

Cuando se señala un periodo de vacaciones como el del 28 de febrero al 10 de marzo, no se menciona si los días 28 y 10 se tomarán también como vacaciones; pero cuando se dice *inclusive*, efectivamente indica que los días 28 y 10, serán vacaciones. Así ocurre también con los intervalos que contienen las desigualdades con mayor o igual o menor o igual.

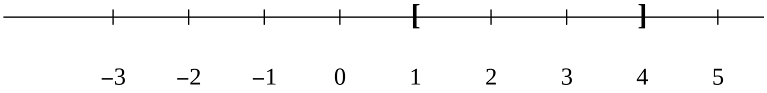
■ Ejemplo 23

Localice en la recta numérica los intervalos siguientes:

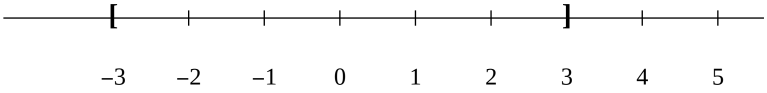
$(-1, 2)$



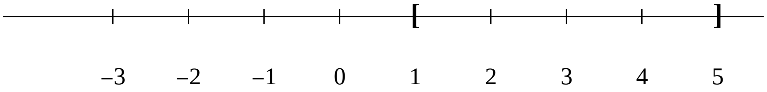
$[1, 4]$



$[-3, 3]$

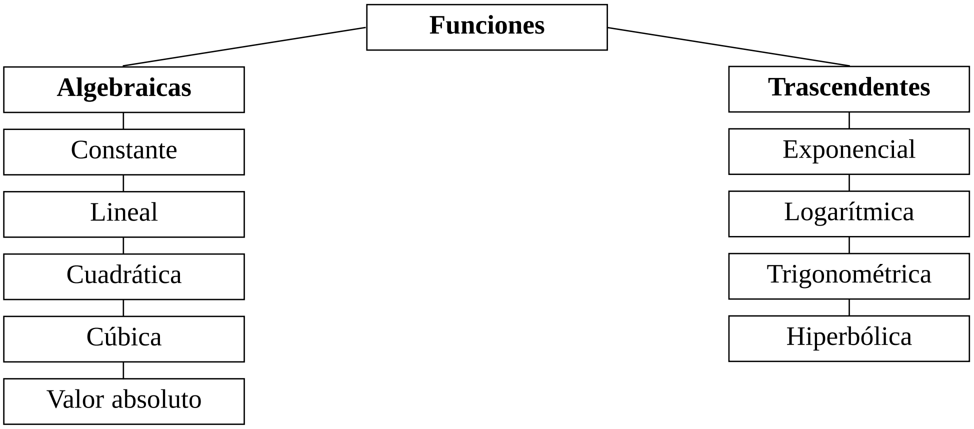


$[1, 5]$



Clasificación de funciones

En cursos avanzados de álgebra superior se estudian varias clasificaciones de funciones, pero aquí se analiza sólo una, con la finalidad de ubicar al lector dentro del universo de las matemáticas.



En la figura anterior se trata la función *valor absoluto* como un caso especial de las funciones algebraicas. Respecto de las trascendentes se estudian las funciones logarítmicas y exponenciales, ya que son la base para el análisis de algunos temas estadísticos, como distribuciones de probabilidad y análisis de regresión. No se estudiarán las funciones trigonométricas ni las hiperbólicas, pero sí se considerarán las funciones algebraicas, las cuales se catalogan de la forma siguiente:

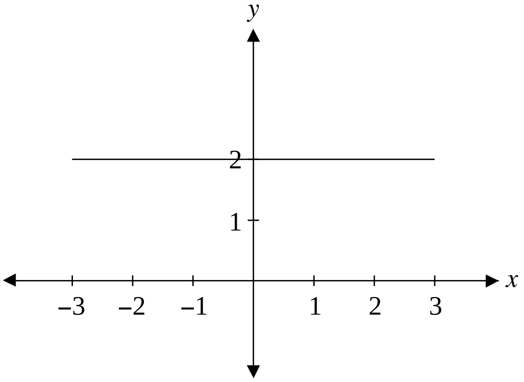
Constante Es una función con $\mathbb{R}$ como su dominio y su imagen es sólo un número real.

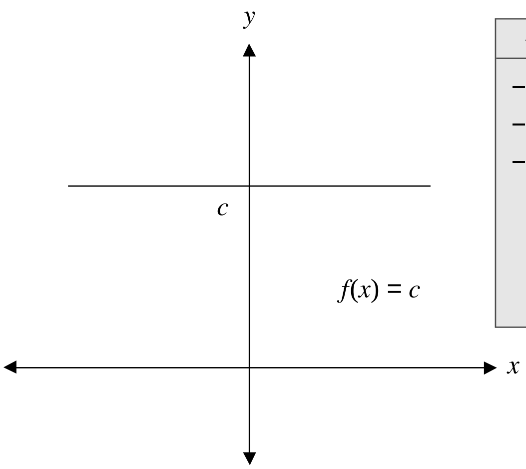
Sea $c \in \mathbb{R}$, los pares ordenados serán los siguientes:

$$\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}, f(x) = c$$

■ Ejemplo 24

$f(x) = 2$





x	y
–3	2
–2	2
–1	2
0	2
1	2
2	2
3	2

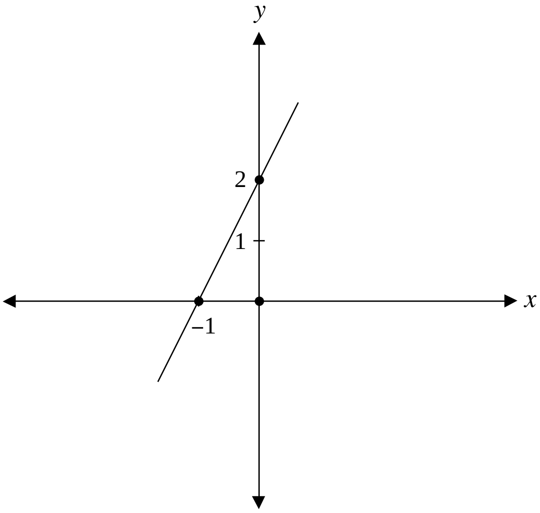
Lineal Sea $f(x) = ax + b$, en donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Tanto su dominio, como su contradominio, es $\mathbb{R}$.

Se utiliza el término *lineal* porque la gráfica de $f(x) = ax + b$ es una línea recta.

■ Ejemplo 25

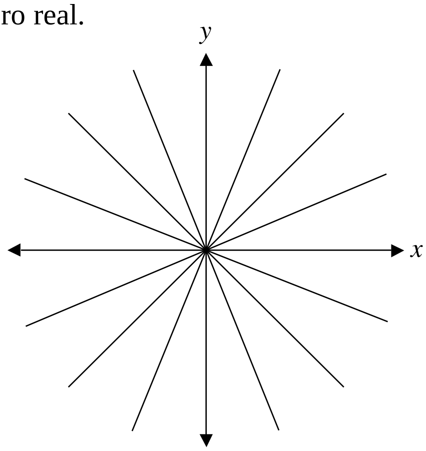
$f(x) = 2x + 2$

x	y
–3	–4
–2	–2
–1	0
0	2
1	4
2	6
3	8



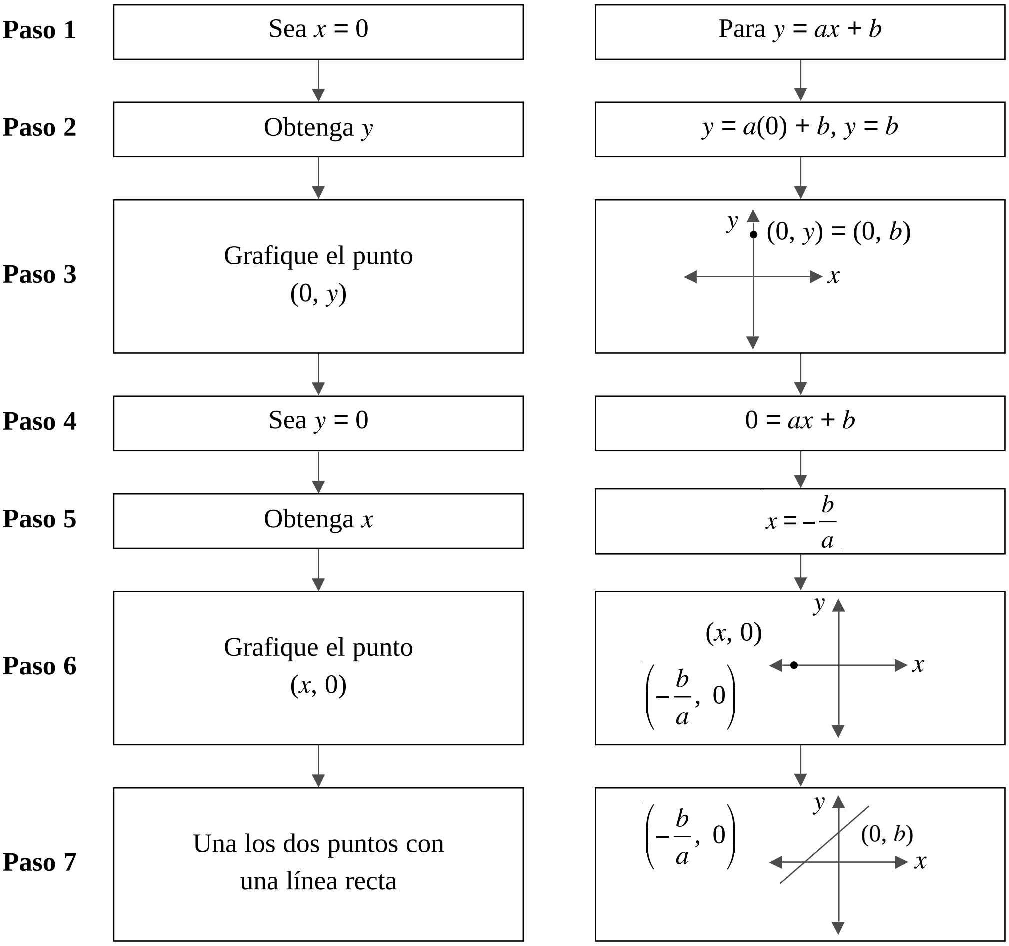
■ Ejemplo 26

$f(x) = ax$, donde a es cualquier número real.



A todas las posibles rectas que pasan por el punto (0, 0), llamado *origen*, se le conoce como *familia de rectas que pasan por el origen*.

A continuación se presenta un procedimiento alternativo para obtener una gráfica de cualquier función lineal:



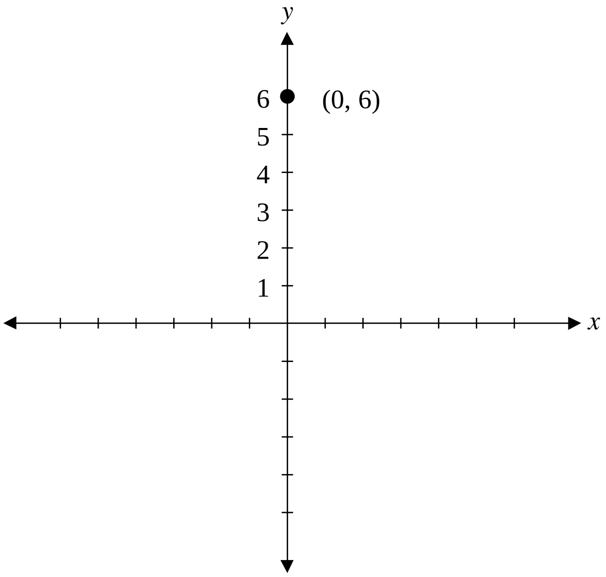
■ Ejemplo 27

$y = 2x + 6$

Paso 1. Sea $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = 2(0) + 6$

Paso 2. $y = 6$

Paso 3. Grafique el punto $(0, y) = (0, 6)$



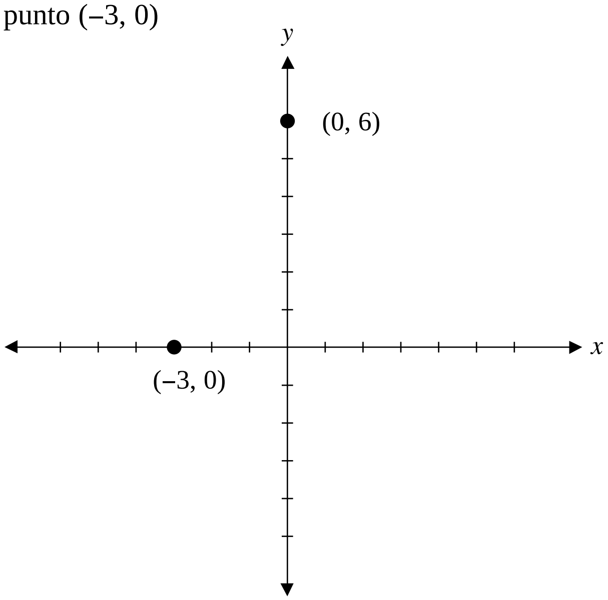
Paso 4. Sea $y = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 2x + 6$

Paso 5. Obtenga x $\Rightarrow$ $-6 = 2x$

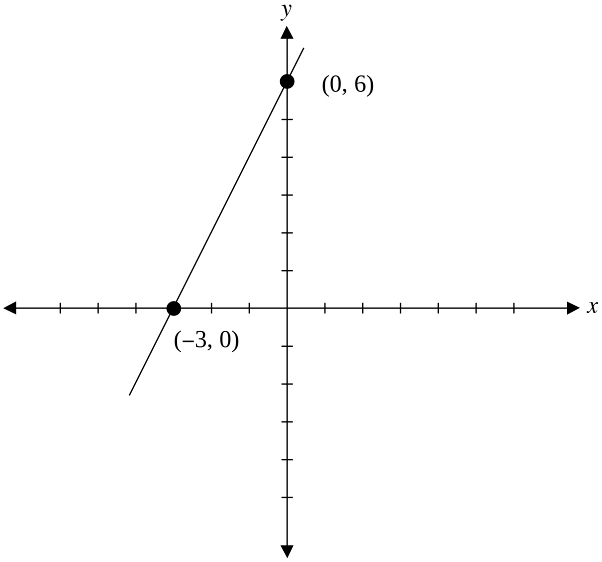
$$-\frac{6}{2} = x$$

$\Rightarrow$ $x = -3$

Paso 6. Grafique el punto $(-3, 0)$



Paso 7 Una los dos puntos con una línea recta:



Toda línea recta tiene una inclinación; a ésta se le llama pendiente, se denota por m y se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como observa, para el cálculo de m es necesario conocer dos puntos:

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$$

Existe otra forma de la ecuación lineal, que es la de punto y pendiente, dada por la siguiente fórmula:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

La pendiente puede presentar cuatro casos, los cuales se explican a continuación, con su respectiva ecuación de punto y pendiente.

Caso 1

$\boldsymbol{m > 0}$

Sean $P_1 = (-4, 6)$ y $P_2 = (-1, 18)$

Primero se calcula la pendiente, $m = 4$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{-1 - (-4)} = \frac{12}{3} = 4$$

Con el punto P_1 y $m = 4$ forme la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 6 = 4[x - (-4)]$$
$$y - 6 = 4x + 16$$
$$y = 4x + 16 + 6$$
$$\boxed{y = 4x + 22}$$

Caso 2

***m* < 0**

Sean $P_1 = (5, -7)$ y $P_2 = (3, -4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - (-7)}{3 - 5} = \frac{-4 + 7}{-2} = \frac{3}{-2}$$

Con el punto P_1 y $m = -\frac{3}{2}$ forme la ecuación de la recta:

$$y - (-7) = \frac{3}{-2}(x - 5)$$

$$y + 7 = \frac{3}{-2}x + \frac{15}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2} - \frac{14}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$

Caso 3

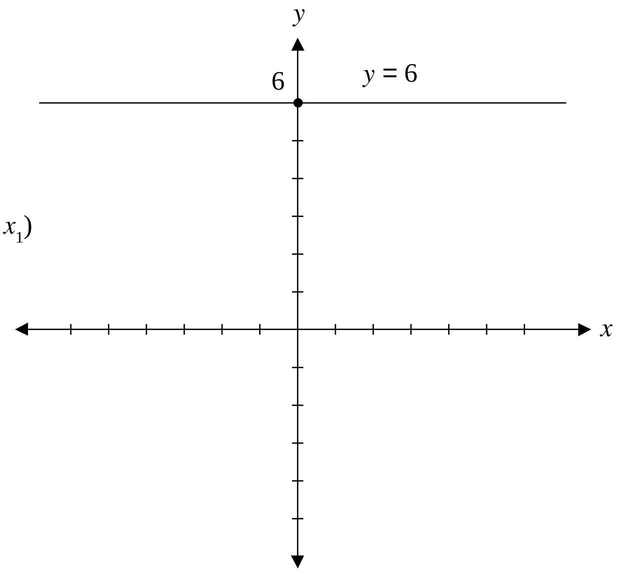
***m* = 0**

Sean $P_1 = (3, 6)$ y $P_2 = (-2, 6)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 6}{-2 - 3} = \frac{0}{-5} = 0$$

Con el punto P_1 y $m = 0$ forme la ecuación de la recta:

$y - 6 = 0\,(x - x_1)$
$y = 6$



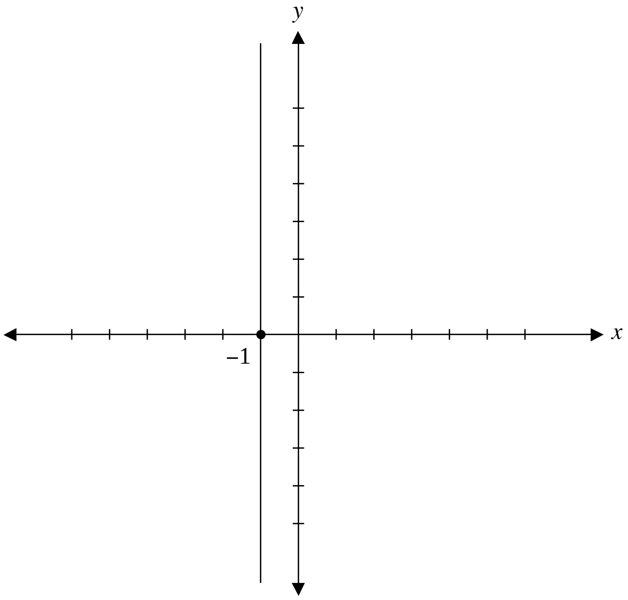
Caso 4

$m = \infty$ no está definida

Sean $P_1 = (-1, -3)$ y $P_2 = (-1, 2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-3)}{-1-(-1)} = \frac{5}{0} = \infty$$

la ecuación es $x = -1$



La ecuación de una recta con pendiente dada y ordenada al origen es:

$$y = mx + b$$

donde: m es la pendiente de la recta y b es la *ordenada al origen*.

En este libro, a la pendiente m se le llama a.

Todos estos conceptos serán retomados al abordar los sistemas de ecuaciones y regresión lineal.

Cuadrática Una función $f(x)$ es una función cuadrática si

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, en tanto que b y c pueden tomar el valor de cero.

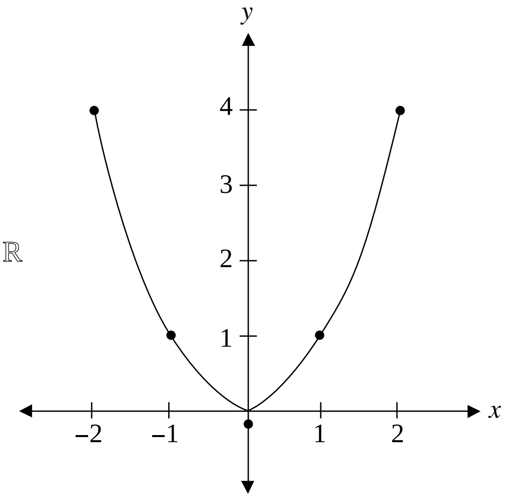
■ Ejemplo 28

Trazar la gráfica de $f(x) = x^2$

x	y
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4

Dominio $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

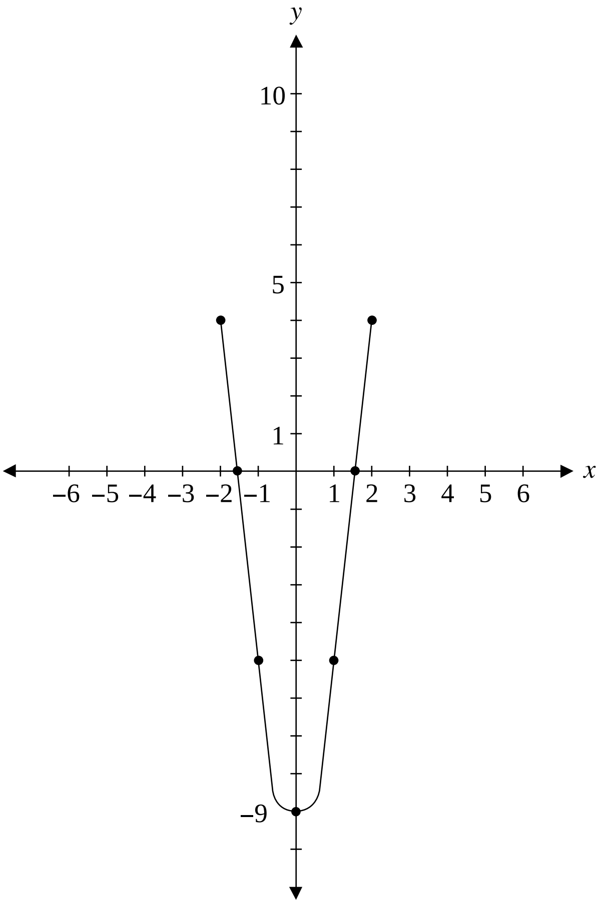
y contradominio $\{y \mid y \geq 0\}$ $y \in \mathbb{R}$



■ Ejemplo 29

Trazar la gráfica de $f(x) = 4x^2 - 9$

x	y
–2	7
–1	–5
0	–9
1	–5
2	7
$\frac{3}{2}$	0
$-\frac{3}{2}$	0



El dominio de la función serán todos los reales ($\mathbb{R}$) y el contradominio es:

$$\{y \mid y \geq -9\} \text{ Eje } y$$

Cúbica Una función $f(x)$ es una función cúbica si

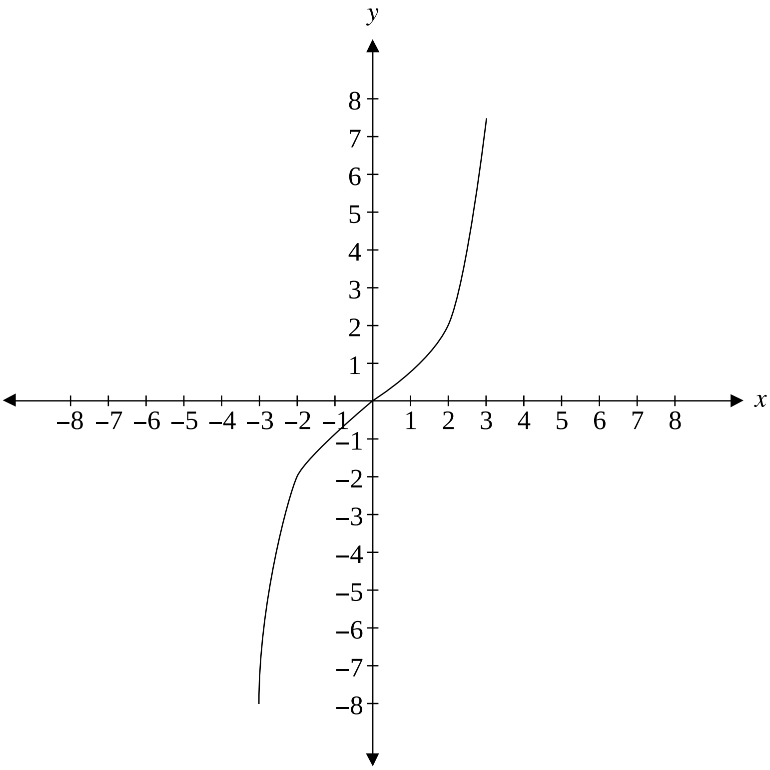
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

donde a, b, c y d son números reales y $a \neq 0$. Su dominio y contradominio siempre estarán en $\mathbb{R}$.

■ Ejemplo 30

Trazar la gráfica de $f(x) = x^3$

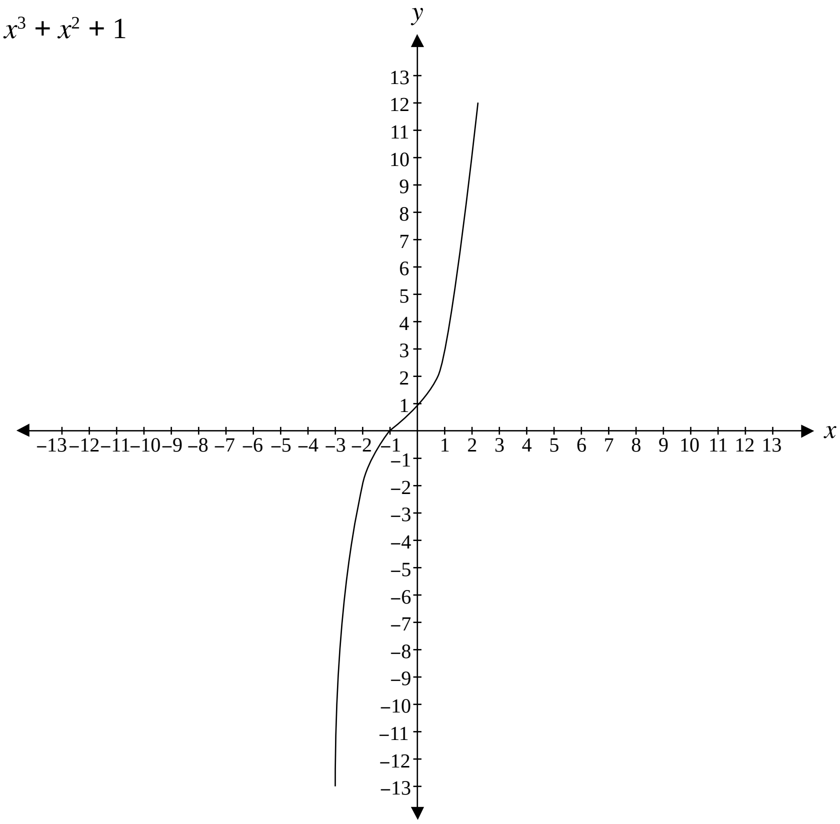
x	y
–2	–8
–1	–1
0	0
1	1
2	8



■ Ejemplo 31

Trazar la gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

x	y
–2	–3
–1	1
0	1
1	3
2	13



Las funciones hasta aquí estudiadas se denominan polinominales y se expresan, en forma general, así:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_nx^n$$

La suma anterior se puede expresar como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

para toda $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

Puesto que las operaciones utilizadas para definir un polinomio son simplemente la suma y la multiplicación, resulta evidente que cada $x \in \mathbb{R}$, y es un número real único. Por tanto, esta ecuación define una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es algún subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice, entonces, que la función es una *polinomial de grado n*.

Valor absoluto La función valor absoluto, denotada por | |, es la función con dominio $\mathbb{R}$ y regla de correspondencia.

$$|x| = \begin{matrix} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{matrix}$$

A continuación se explicarán las soluciones a ecuaciones y desigualdades en las que está implicado el valor absoluto.

Caso 1

$$|\ a\ | = b \qquad \text{(I)}$$

La solución al caso 1 es la siguiente:

$$-a = b \qquad \text{o} \qquad a = b \qquad \text{(II)}$$

Sugerencia: graficar el valor absoluto de a, si $a \geq 0$, $-a$, si $a < 0$; b si $b \geq 0$, $-b$, si $b < 0$, así como cuando $a = b$ y $-a = b$.

■ Ejemplo 32

Resuelva:

$$|\ x - 2\ | = 4$$

Para resolver la ecuación, $a = x - 2$ y $b = 4$ como en (I) y pasa a las dos expresiones que se indican en (II) para obtener:

$$\begin{array}{lcl} -(x-2) = 4 & \text{y} & x - 2 = 4 \\ -x + 2 = 4 & & x = 4 + 2 \\ -x = 4 - 2 & & x = 6 \\ -x = 2 & & \\ x = -2 & & \end{array}$$

Entonces, la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = -2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 6$$

Al comprobar los resultados tiene:

$$\begin{aligned} |-2-2| &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} |6-2| &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Es importante aclarar que no siempre aparecen dos soluciones; en algunos casos se obtiene sólo una, es decir, no siempre las dos cumplirán con la igualdad.

■ Ejemplo 33

Resuelva:

$$|x+1| = 2x-4$$

$$\begin{aligned} -(x+1) &= 2x-4 \\ -x-1 &= 2x-4 \\ -x-2x &= -4+1 \\ -3x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{-3} \\ x_1 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{aligned} x+1 &= 2x-4 \\ x-2x &= -4-1 \\ -x &= -5 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Las soluciones posibles son $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
Realice la comprobación:

Si $x_1 = 1$

$$\begin{aligned} |1+1| &= 2(1)-4 \\ |2| &= 2-4 \\ 2 &= -2 \end{aligned}$$

El resultado anterior es falso; por tanto $x_1 = 1$ no es solución a la ecuación propuesta.

Si $x_2 = 5$

$$\begin{aligned} |5+1| &= 2(5)-4 \\ |6| &= 10-4 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

La única solución a la ecuación es $x_2 = 5$, ya que así se cumple la igualdad.

Caso 2

$$|a| < b$$

La solución al caso 2 es la siguiente:

$$a > -b \quad \text{y} \quad a < b$$

■ Ejemplo 34

Resuelva:

$$| 3 + 2x | \leq 2$$

$$\begin{array}{ccc} 3 + 2x \geq -2 & \text{y} & 3 + 2x \leq 2 \\ 2x \geq -2 - 3 & & 2x \leq 2 - 3 \\ 2x \geq -5 & & 2x \leq -1 \\ x \geq \frac{-5}{2} & & x \leq \frac{-1}{2} \end{array}$$

El conjunto solución es el siguiente:

$$x \in \left[\frac{-5}{2}, \frac{-1}{2}\right]$$

En el caso 2 se tiene una desigualdad; por eso, la solución es un intervalo, o sea, hay un conjunto de posibles soluciones que satisfacen la desigualdad propuesta.

Caso 3

$$| a | > b$$

La solución al caso 3 es la siguiente:

$$-a > b \quad \text{o} \quad a > b \qquad \text{(III)}$$

Una de las propiedades de las desigualdades indica que si multiplica por (–1) a ambos lados de la desigualdad, ésta se invierte.

$$\begin{array}{c} -a > b \\ (-1)(-a) < (-1)b \\ a < -b \end{array} \qquad \text{(IV)}$$

Sustituya el resultado (IV) en la expresión (III) y obtiene:

$$a < -b \quad \text{o bien} \quad a > b \qquad \text{(V)}$$

■ Ejemplo 35

Resolver la desigualdad siguiente:

$$| 4x - 3 | > x + 2$$

Si $a = (4x - 3)$ y $b = (x + 2)$; ahora sustituya en (V) y obtiene:

$$\begin{array}{lcl} (4x - 3) < -(x + 2) & \text{o bien} & (4x - 3) > x + 2 \\ 4x - 3 < -x - 2 & & 4x - x > 2 + 3 \\ 4x + x < -2 + 3 & & 3x > 5 \\ 5x < 1 & & x > \frac{5}{3} \\ x < \frac{1}{5} & & \end{array}$$

El conjunto solución a la desigualdad es

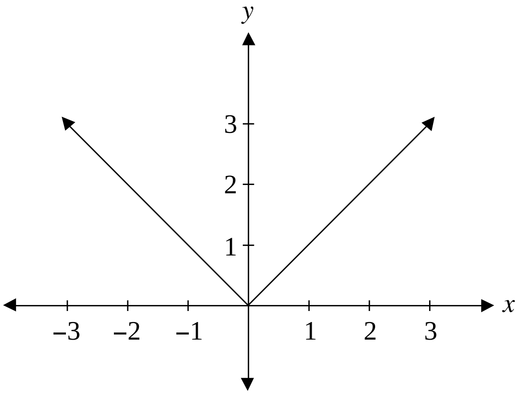
$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$$

La unión indica el conectivo lógico que se da en la expresión (V).

■ Ejemplo 36

Trazar la gráfica de $f(x) = |x|$

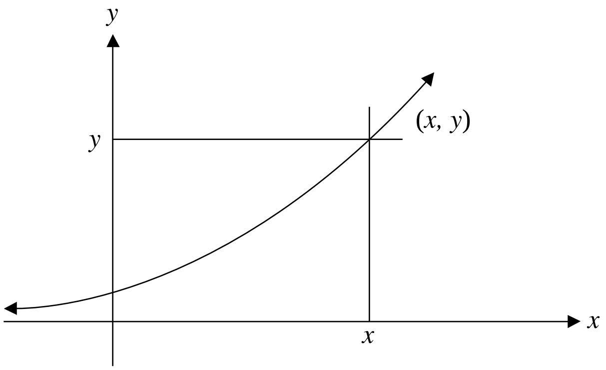
x	y
–3	3
–2	2
–1	1
0	0
1	1
2	2
3	3



Todas las funciones antes mencionadas se consideran algebraicas, pero existen otras funciones usuales que se denominan *trascendentes,* por ejemplo, la exponencial y la logarítmica.

Exponencial Sea b cualquier número real positivo distinto de 1. Entonces, una función $f(x)$ se llama *función exponencial de base b* si y sólo si

$$f = \{(x, y) \mid y = b^x, x \in \mathbb{R}\}$$



Dado lo anterior, en la gráfica de una función exponencial típica, inmediatamente salta a la vista la siguiente propiedad: toda recta paralela al eje x y por encima de él, corta la curva en un punto de manera exacta. Esto significa que si b es un número real dado, tal que $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces, para cada número real positivo y existe un solo número real x, tal que $y = b^x$.

La función exponencial es muy usada para observar el crecimiento de ciertas poblaciones. Así, es común escuchar que China tuvo un crecimiento exponencial en los últimos 5 años, dato de fácil comprensión si se conoce el comportamiento de tales funciones. En el mundo de los negocios, por ejemplo, es usual el término *interés compuesto*, concepto que implica una función exponencial, como la siguiente:

$$f(x) = P(1 + i)^x$$

donde: P = monto inicial o principal

i = interés al que se invierte p

Al igual que los dos ejemplos anteriores, existen otros en los que se utilizan funciones, herramienta necesaria en el estudio de varias disciplinas.

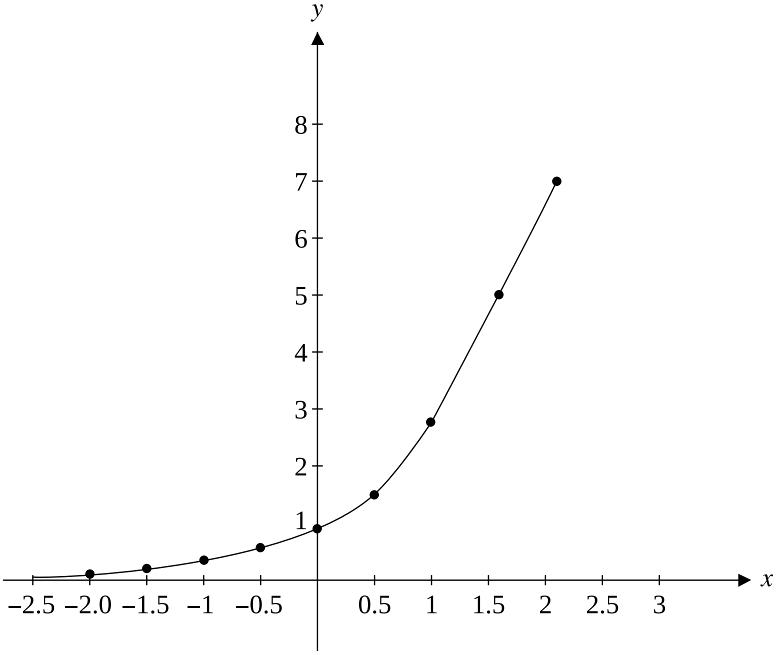
La función exponencial natural está definida de esta forma:

$$f(x) = e^x$$

donde: $e = 2.7182818$

A continuación, aparece su gráfica con algunos de sus respectivos valores:

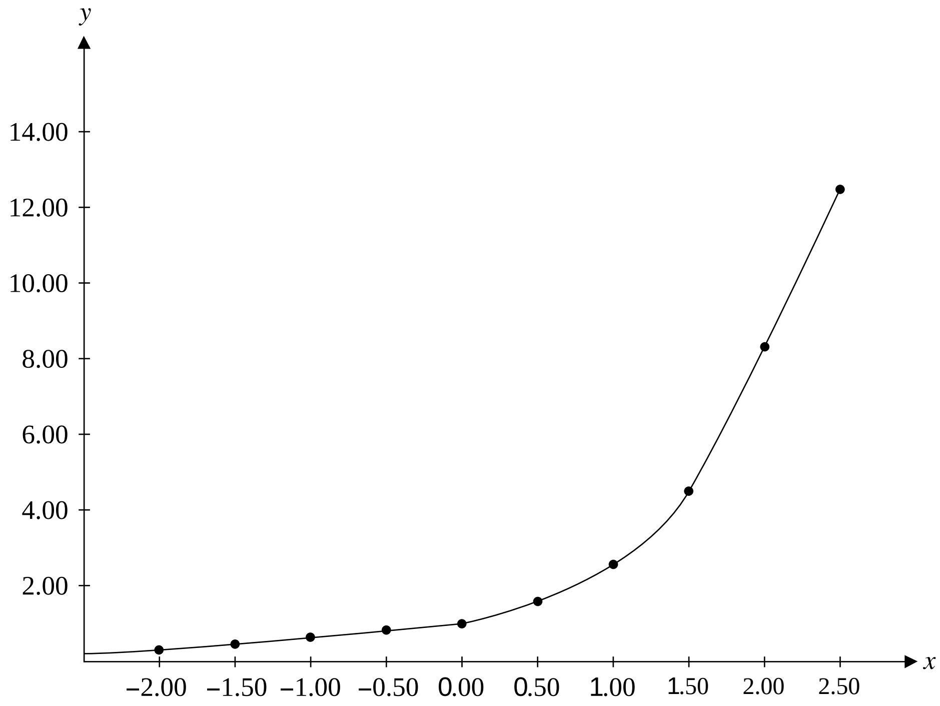
x	**$f(x) = e^x$**
–2	0.14
–1.5	0.22
–1	0.37
–0.5	0.61
0.0	1.00
0.5	1.65
1	2.72
1.5	4.48
2	7.39
2.5	12.18



Otra forma de representar gráficamente las funciones es trasladando el eje y a la izquierda, para visualizar de modo más claro la curva que se dibuja, lo cual queda como sigue.

Figura 3.4 Función exponencial

x	$y = e^x$
–2.00	0.14
–1.50	0.22
–1.00	0.37
–0.50	0.61
0.00	1.00
0.50	1.65
1.00	2.72
1.50	4.48
2.00	7.39
2.50	12.18



Enseguida se realiza una transformación a la función exponencial, tratándola como un caso especial.

La cuestión que ocupa en el presente capítulo es la función que dibuja la distribución normal estándar, dada por la siguiente expresión:

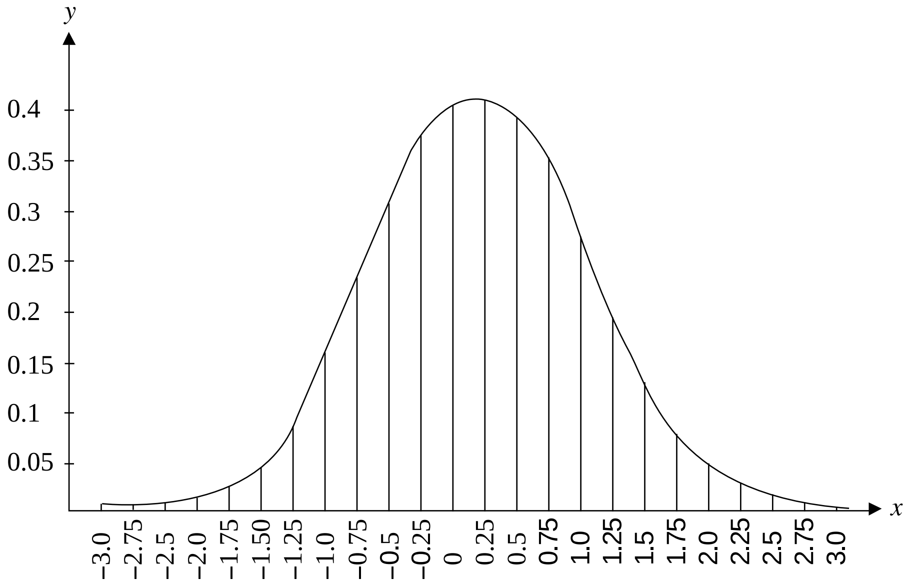
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}$$

El dominio de la función son todos los reales, tal que $x \in (-\infty, \bullet)$.

La gráfica de la función anterior es la siguiente:

Figura 3.5 Campana de Gauss

x	*y*
–3.0	0.00443185
–2.75	0.00909356
–2.5	0.0175283
–2.25	0.03173965
–2.0	0.05399096
–1.75	0.0862773
–1.5	0.12951757
–1.25	0.18264905
–1.0	0.24197068
–0.75	0.30113737
–0.5	0.35206526
–0.25	0.38666804
0	0.3989422
0.25	0.38666804
0.5	0.35206526
0.75	0.30113737
1.0	0.24197068
1.25	0.18264905
1.5	0.12951757
1.75	0.0862773
2.0	0.05399096
2.25	0.03173965
2.5	0.0175283
2.75	0.00909356
3.0	0.00443185



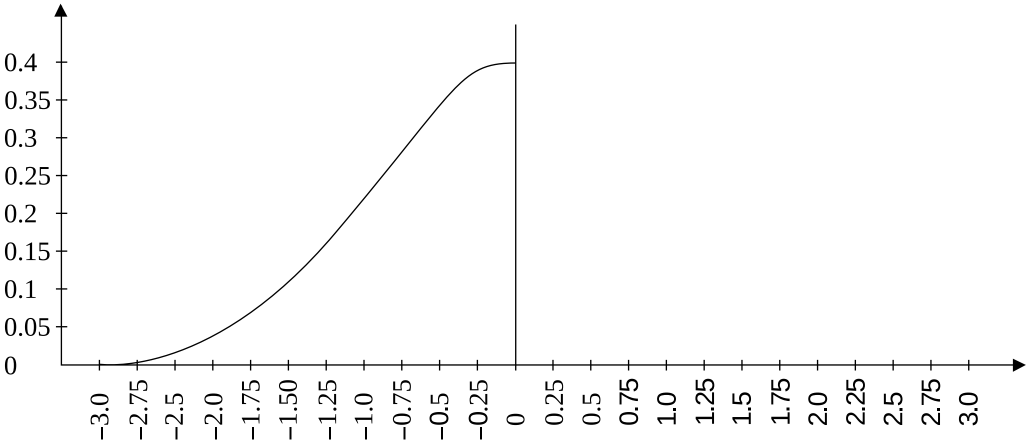
De Moivre (1733) fue el primero en obtener la ecuación de la curva normal. A principios del siglo XIX, Gauss y Laplace ampliaron el desarrollo de su concepto y el de probabilidad. Hoy, la curva normal se conoce también como *curva de Gauss*, *curva De Moivre, curva de la campana*, etcétera.

■ Ejemplo 37

Marque en la gráfica de la campana de Gauss el área que se indica en el siguiente intervalo:

$$\{x \mid x \leq 0\}$$

Campana de Gauss



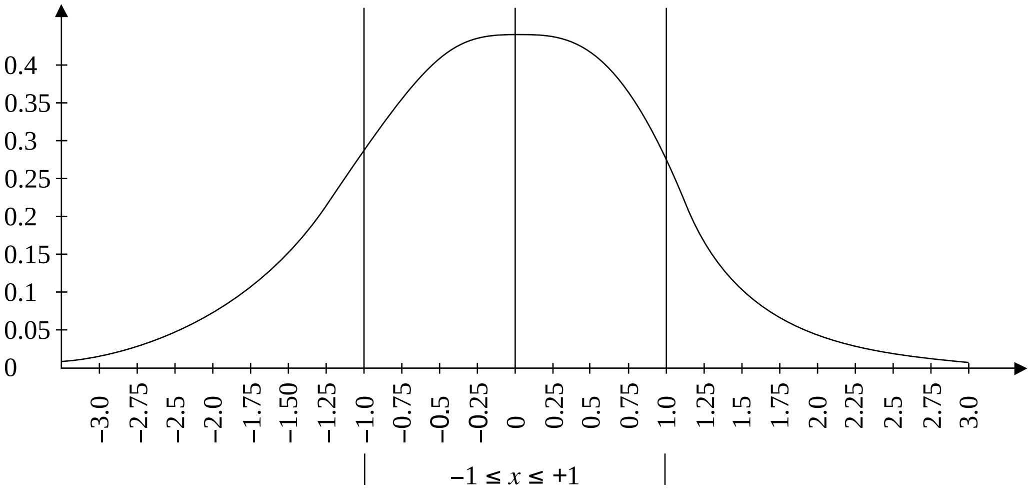
■ Ejemplo 38

Al igual que en el ejemplo anterior, marque en la gráfica de la campana de Gauss el área que se indica en el siguiente intervalo:

$$\{x \mid x \geq -1\} \text{ y } \{ x \leq 1\},$$

$$\text{es decir } \{-1 \geq x \leq +1\}$$

Campana de Gauss

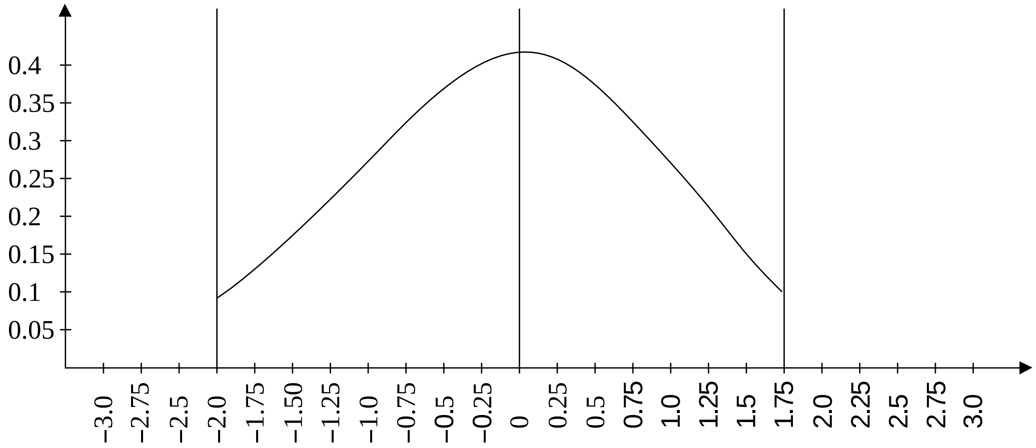


■ Ejemplo 39

Marque en la gráfica el área que se indica en el intervalo siguiente:

$$\{x \mid -2 < x < 2\}$$

Campana de Gauss



Logaritmos En la sección anterior se explicó la definición siguiente:

$$f = \{(x, y) \mid y = b^x, x \in \mathbb{R}\}$$

donde: $b \neq 1$ y para cualquier número positivo dado existe un número real único x.

Se dice que el número x es el logaritmo base b de y, el cual se escribe de la siguiente manera:

$$x = \text{Log}_b\, y$$

Definición Si y y b son números positivos y si $b \neq 1$, entonces

$$\text{Log}_b\, y = x \quad \text{si y sólo si,} \quad y = b^x$$

Las dos ecuaciones $x = \text{Log}_b\, y$ y $y = b^x$ son equivalentes y puede cambiar de una a otra para obtener la forma que resulte más conveniente.

Si se utiliza la base $e = 2.718218$, entonces se hablará de un *logaritmo natural* (*Ln*) y se denota como sigue:

$$f(x) = \text{Log}_e\, x \Rightarrow f(x) = LnX$$

Aplicando la definición de logaritmo, queda de la forma siguiente.

$$y = LnX \quad \text{si y sólo si,} \quad x = e^y$$

Álgebra de funciones

Las operaciones elementales para funciones son las siguientes:

Sean f_1 y f_2 dos funciones, entonces:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ suma de dos funciones.}$$
$$(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x), \text{ resta de dos funciones.}$$

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)\ (x) &= f_1(x)\, f_2(x), \text{ producto de dos funciones.} \\ (f_1 / f_2)\ (x) &= f_1(x) / f_2(x), \text{ división de dos funciones.} \\ (f_1 \text{ o } f_2)\ (x) &= f_1(f_2(x)), \text{ función compuesta.} \end{aligned}$$

El dominio de cualquier operación con funciones es la intersección de sus dominios.

■ Ejemplo 40

Realizar las cinco operaciones algebraicas de las funciones siguientes:

$$f_1 = 3x + 6 \quad \text{y} \quad f_2 = 2x + 5$$

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad (f_1 + f_2)\ (x) &&= (3x + 6) + (2x + 5) = 5x + 11 \\ &\text{ii)} \quad (f_1 - f_2)\ (x) &&= (3x + 6) - (2x + 5) = 3x + 6 - 2x - 5 = x + 1 \\ &\text{iii)} \quad (f_1 f_2)\ (x) &&= (3x + 6)\ (2x + 5) = 6x^2 + 15x + 12x + 30 = 6x^2 + 27x + 30 \\ &\text{iv)} \quad (f_1 / f_2)\ (x) &&= \frac{3x+6}{2x+5} \\ &\text{v)} \quad (f_1 \text{ o } f_2)\ (x) &&= f_1\ (2x + 5) = 3\ (2x + 5) + 6 \\ & &&= 6x + 15 + 6 = 6x + 21 \end{aligned}$$

MATRICES

El manejo del álgebra matricial es importante para la resolución de diversos problemas de estadística y para la comprensión de algunos capítulos posteriores. Por ello se abunda en el desarrollo de la teoría elemental de las matrices y su relación con algunos modelos estadísticos lineales.

Concepto Una matriz es un conjunto (arreglo) de elementos ordenados tanto en renglones como en columnas. Esos elementos se denotan por a_{ij}, los renglones mediante la letra m y las columnas por la letra n. Así:

Sea una matriz que tiene los renglones –1, 2 y 0, 1; entonces, $m = 2$ y $n = 2$ es una matriz 2 × 2, y se representa en la forma siguiente:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

El orden de una matriz estará expresado mediante un par ordenado, donde el primer componente indica los renglones que tiene la matriz y, el segundo, las columnas.

■ Ejemplo 41

$$B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \text{ La matriz es de orden } 2 \times 3$$

$$C_{1\times 3} = [0, 1, -1] \text{ La matriz es de orden } 1 \times 3$$

$$E_{3\times1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix} \text{ La matriz es de orden } 3 \times 1$$

Una matriz de orden $m \times n$, será:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1j} \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots\ a_{2j} \ldots\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots\ a_{ij} \ldots\ a_{in} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots\ a_{mj} \ldots\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Las matrices son básicas en la teoría económica contemporánea, en psicología, en la administración moderna y, en general, en la investigación (por ejemplo, el proceso industrial y control de la calidad total). En otros campos, como las ciencias de la salud, los médicos y biólogos utilizan las matrices como un método muy útil en el estudio de interrelaciones genéticas de la herencia; donde se utilizan ampliamente las operaciones y propiedades de las matrices, entre estos métodos pueden mencionarse los análisis factoriales.

Tipos de matrices

Las matrices toman diferentes denominaciones, atendiendo a su orden.

Matriz renglón o vector renglón $A_{1\times n}$

- **Ejemplo 42**

$$A_{1\times4} = (2, -1, 0, 1)$$

Matriz columna $A_{m\times1}$

$$A_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A_{3\times1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_{2\times1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

También se conoce como *vector columna*.

Matriz cuadrada

Se denomina así a las matrices que tienen el mismo número de renglones y de columnas, o sea $m = n$.

■ Ejemplo 43

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada, cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para toda $i \neq j$.

■ Ejemplo 44

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En este tipo de matrices, los únicos valores diferentes de cero se encuentran sobre la diagonal principal (de izquierda a derecha).

Matriz escalar

Es una matriz diagonal, con a_{ij} iguales.

■ Ejemplo 45

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Por lo general, la matriz escalar se representa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \lambda\, 0\, 0 \ldots 0 \\ 0\, \lambda\, 0 \ldots 0 \\ 0\, 0\, \lambda \ldots 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0\, 0\, 0 \ldots \lambda \end{bmatrix} = \lambda \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ & & \\ .\,. & & . \\ .\,. & & . \\ .\,. & & . \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Matriz identidad

Llamada también *matriz unitaria*, es una matriz escalar donde $\lambda = 1$, y se representa por I, de tal manera que para conocer el orden se le coloca el subíndice respectivo.

■ Ejemplo 46

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Es aquella matriz en la cual todos sus elementos son iguales a cero.

Igualdad de matrices

Dos matrices, A y B, son iguales cuando tienen el mismo orden, y todos y cada uno de sus elementos cuentan con el mismo valor algebraico.

■ Ejemplo 47

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & x \end{bmatrix}$$

$A = B$ si y sólo si $x = 2$

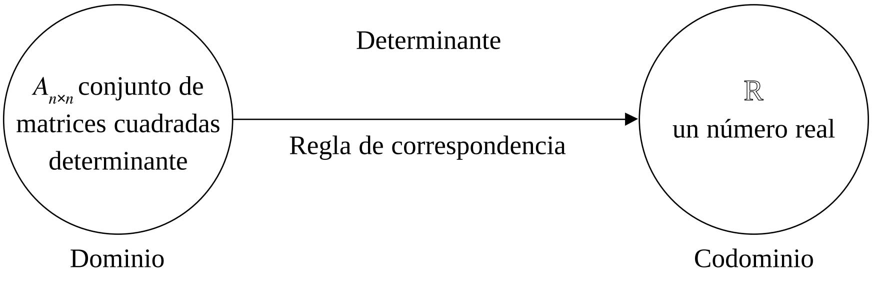
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

$C = D$ si y sólo si $w = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

Determinantes

Antes de abordar el desarrollo del álgebra de matrices, se explicará el concepto y algunas propiedades de los determinantes, que se estudiarán más adelante.

Un determinante es un número real asociado con una matriz cuadrada, mediante una función llamada *determinante* y que se denota det A, $|A|$, o Δ, siendo A una matriz cuadrada. El dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y el codominio son los reales.



Determinantes para matrices de 2 × 2

Ahora se explica cómo se calcula el determinante de una matriz 2 × 2: es el producto de los elementos de la diagonal principal, *menos* el producto de los elementos de la otra diagonal.

■ Ejemplo 48

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = A \qquad \det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 3 \times 1 = -3$$

$$\det A = -3$$

Se obtuvo como resultado un número real, y es importante mencionar que este número real es único para cada matriz.

Determinantes para matrices de 3 × 3

A continuación se explica cómo se calcula el determinante para matrices de 3 × 3. Para ello, es necesario dar a conocer dos conceptos.

Sea A una matriz de 3 × 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Como puede observar, cada elemento tiene su posición ij, donde i = número de renglón, también llamada *fila*, y j = número de columna.

Definición Si A es una matriz cuadrada de orden 3, entonces el menor M_{ij} de un elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden 2, que se obtiene al omitir el renglón i y la columna j de A.

Definición El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} se define como

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

Las definiciones anteriores se explican con el ejemplo siguiente. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & 7 \\ -6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Como primer paso, se calculan los menores, es decir, M_{ij}:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = (-1)(0) - (4)(7) = -28$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = (-8)(0) - (-6)(7) = +42$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = (-8)(4) - (-1)(-6) = -32 - 6 = -38$$

El segundo paso consiste en calcular los cofactores A_{ij}:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \qquad M_{11} = (-1)^2\ (-28) = -28$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \qquad M_{12} = (-1)^3\ (42) = -42$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \qquad M_{13} = (-1)^4\ (-38) = -38$

El tercer y último paso es obtener el determinante por medio de la siguiente definición:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13}$$

En notación de suma, se expresa de esta forma:

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}\ A_k$$

Sustituya los valores y obtiene:

$$\det A = 1(-28) + 2(-42) + 3(-38) = -28 - 84 - 114 = -226$$

$$\det A = -226$$

Álgebra de matrices

Transpuesta de una matriz

Es la matriz que resulta de intercambiar el primer renglón con la primera columna, el segundo renglón con la segunda columna, y así sucesivamente. El orden de la matriz queda intercambiado: si es de orden (2 × 3), quedará (3 × 2). La transpuesta de una matriz A se representa por A^T.

■ Ejemplo 49

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^T_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad E^T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

Se denomina así una matriz cuando es igual a su transpuesta $A = A^T$.

■ Ejemplo 50

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que esto sólo es posible cuando las matrices son del mismo orden, o sea, una matriz simétrica es cuadrada.

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Para que la suma de dos matrices pueda realizarse, hace falta que sean del mismo orden.

■ Ejemplo 51

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 1+(-1) \\ 0+0 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La suma algebraica se realiza con los elementos correspondientes. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-1) & -1+1 \\ 0+1 & 1+2 & 0+2 \\ -1+1 & 3+0 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices:

1. $A + B = B + A$	Propiedad conmutativa
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$	Propiedad asociativa

Multiplicación de matrices

Producto de una matriz por un escalar

El resultado de multiplicar una matriz por cualquier número real (escalar) es el producto de cada uno de los componentes por dicho escalar.

■ Ejemplo 52

Multiplicar el escalar 5 por la matriz A, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad 5A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 \\ 5 & 15 & 0 \\ -5 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

Matriz opuesta

Se obtiene cuando una matriz se multiplica por (–1).

■ Ejemplo 53

$$(-1)\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Resta de matrices

Es la suma algebraica de una matriz dada con la matriz opuesta de la matriz que se quiere restar, o sea:

$$A - B = A + (-1)B$$

■ Ejemplo 54

Sean las matrices A y B, tales que:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = A - B$$

Producto de dos matrices

En la multiplicación de dos matrices ($A \times B$), el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B, es decir, son matrices conformables.

■ Ejemplo 55

Sean A y B tales que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)+1(2) & 2(-1)+1(1) & 2(3)+1(0) \\ 3(1)+4(2) & 3(-1)+4(1) & 3(3)+4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 11 & 1 & 9 \end{bmatrix} = C_{2\times 3}$$

De este modo, si A es de orden $m \times n$ y B es de orden $n \times p$, el producto es una matriz C de orden $m \times p$. Dadas las siguientes matrices, realizar sus productos:

$$(-1,\ 2,\ 1)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \left[(-1)\ 3 + 2(1) + 1(4)\right] = [3]$$

$$\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1, & -1, & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(1) & 5(-1) & 5(3)\\ -2(1) & -2(-1) & -2(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -5 & 15\\ -2 & 2 & -6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(1)+0(0) & 1(0)+0(1)\\ 2(1)+3(0) & 2(0)+3(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

Cualquier matriz A multiplicada por la matriz unitaria o identidad, será la misma matriz A. Propiedades del producto de matrices.

i)	$A \times B \neq B \times A$	No cumple la propiedad conmutativa
ii)	$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$	Propiedad asociativa
iii)	$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$	Propiedad distributiva del producto
	$A \times (B - \mathrm{C}) = (A \times B) - (A \times C)$	respecto de la suma y la resta

Inversa de una matriz

Es importante señalar que la división entre matrices no está definida. Por lo que es necesario definir la inversa multiplicativa, también llamada *inversa de una matriz* que, multiplicada por la original, da como resultado la unitaria o identidad (I); o sea:

$$AA^{-1} = I \quad AB = I \quad B = A^{-1}$$

El producto de la matriz A, por su inversa, es la unitaria I

$B = A^{-1}$, siempre que la matriz inversa de A exista, ya que no todas las matrices tienen inversa. Las condiciones que debe cumplir una matriz para tener inversa son las siguientes:

1. Que sea matriz cuadrada ($A_{m \times m}$).
2. Que el determinante de A sea diferente de cero ($\det A \neq 0$); cuando esto ocurre, se dice que la matriz A es *no singular*.
3. Si $\det A = 0$, A es una matriz singular y no tiene inversa.

Procedimiento para formar la inversa de A por el método de cofactores:[†]

1. Reemplazar cada elemento de A por su cofactor:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

   Este caso es para una matriz de orden 3 × 3.

2. Dividir cada elemento de la nueva matriz, formada por sus cofactores, entre el determinante de A, ($|A|$).
3. Obtener su transpuesta, A^T
4. Comprobar que $AA^{-1} = I$

[†] El cofactor de un determinante es el determinante de orden menor que se forma al anular el renglón y la columna de cada uno de sus elementos, tomando en cuenta la relación de signos que se muestra.

■ Ejemplo 56

Obtener la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Calcular $|A|$

Como se tiene un renglón con dos ceros, entonces el determinante de A es simplemente:

$$|A| = -(-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2+3) = 3$$

considerando los signos de referencia

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Paso 2. Obtener la matriz de cofactores:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3. La matriz de cofactores se divide entre el determinante de A, o sea $|A| = 3$, y se obtiene

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Se obtiene la matriz transpuesta, es decir, la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Se comprueba:

$$AA^{-1} = I$$

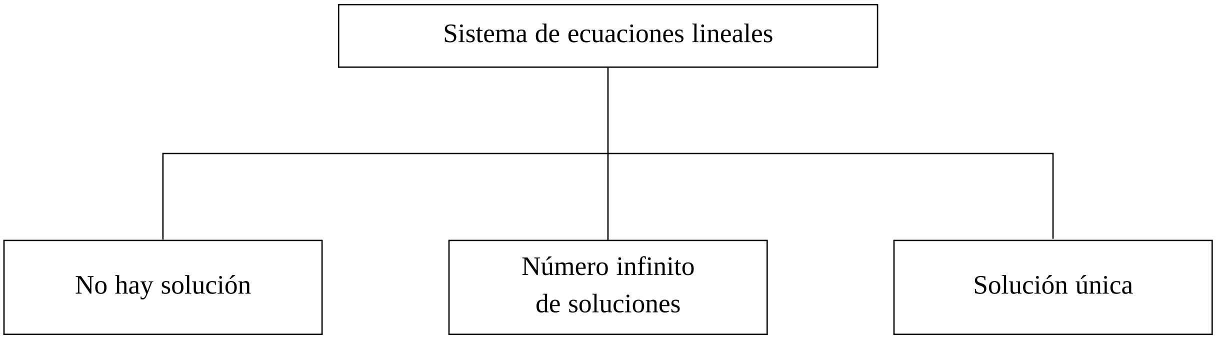
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sea $Ax = B$ un sistema de ecuaciones lineales; en forma matricial:

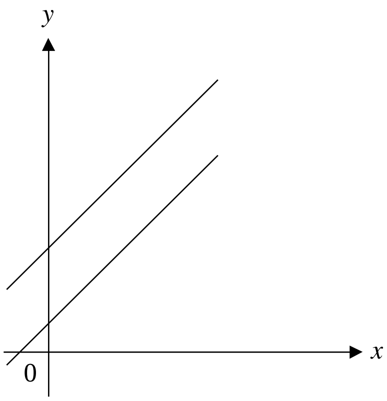
A = la matriz cuyos elementos son los coeficientes de las variables.
x = el vector columna, que forman las n variables.
B = el vector columna, que contiene el valor de las constantes, también llamados *términos independientes*.

El sistema $Ax = B$ puede presentar una de estas tres situaciones:



Los tres casos anteriores se explicarán geométricamente, con sólo dos ecuaciones y dos incógnitas, para su mejor comprensión.

Caso 1



$$a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1$$
$$a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2$$

No hay solución. Las rectas tienen pendientes iguales, es decir, $m_1 = m_2$; no existe punto de intersección.

■ Ejemplo 57

Explicar si el sistema de ecuaciones tiene solución:

$$2x - 8y = 5 \qquad \text{(I)}$$
$$-3x + 12y = 8 \qquad \text{(II)}$$

Se despeja la variable y de ambas expresiones:

Ecuación (I)

$$2x - 8y = 5 \qquad y = \frac{2}{8}x - \frac{5}{8}$$

$$-8y = 5 - 2x \qquad y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{5 - 2x}{-8}$$

Una vez que se obtuvo la ecuación lineal de la forma

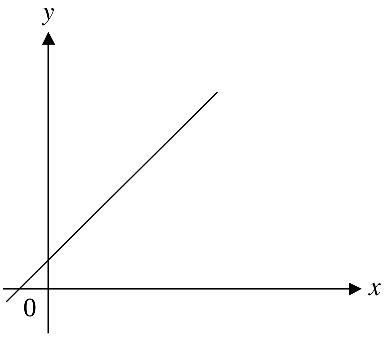
$$y = mx + b,$$

se puede concluir que ambas ecuaciones (I′) y (II′) tienen la misma pendiente:

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{4}$$

No existe punto de intersección; por tanto, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Caso 2



$$a_{11}\, x + a_{12}\, y = b_1$$
$$a_{21}\, x + a_{22}\, y = b_2$$

El número de soluciones es infinito;
las rectas son coincidentes.

■ Ejemplo 58

Explicar si el sistema de ecuaciones tiene solución.

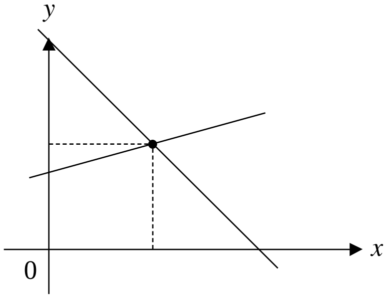
$$4x - 6y = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$-2x + 3y = 0 \qquad \text{(II)}$$

Al multiplicar la ecuación (II) por (–2), obtiene la ecuación (I):

$$(-2)(-2x) + (-2)(3y) = (-2)(0)$$
$$4x - 6y = 0$$

Luego entonces, se trata de la misma recta, solamente multiplicada por un escalar; es decir, el sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

Caso 3



$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

El sistema tiene solución única;
las pendientes de las rectas son diferentes.

$$m_1 \neq m_2$$

■ Ejemplo 59

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$3x + 4y = 3 \qquad \text{(I)}$$
$$x - 2y = -4 \qquad \text{(II)}$$

Se resolverá por el método de igualación.

Paso 1. Se despeja y de la ecuación (I) y se obtiene:

$$y = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x$$

Paso 2. Se despeja y de la ecuación (II) y se obtiene:

$$y = 2 + \frac{x}{2}$$

Paso 3. Se igualan las variables despejadas; por eso, el método se llama *de igualación*,

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x = 2 + \frac{x}{2}$$

Paso 4. Se despeja la variable x de la expresión anterior:

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x = 2 + \frac{x}{2}$$
$$\frac{3}{4} - \frac{8}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x$$
$$-\frac{5}{4} = \frac{5}{4}x$$
$$x = -1$$

Paso 5. Una vez que se encontró el valor de una de las variables, se sustituye ese número en cualquiera de las dos ecuaciones. Se considera la expresión (II) para encontrar el valor de y:

$$-1 - 2y = -4$$
$$-2y = -4 + 1$$
$$y = \frac{3}{2}$$

Paso 6. Se forma el punto que se buscaba:

$$(x, y) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

Paso 7. Se comprueba que dicho punto satisfaga ambas ecuaciones:

Ecuación (I)

$$3\,(-1) + 4\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$-3 + 6 = 3$$

$$3 = 3$$

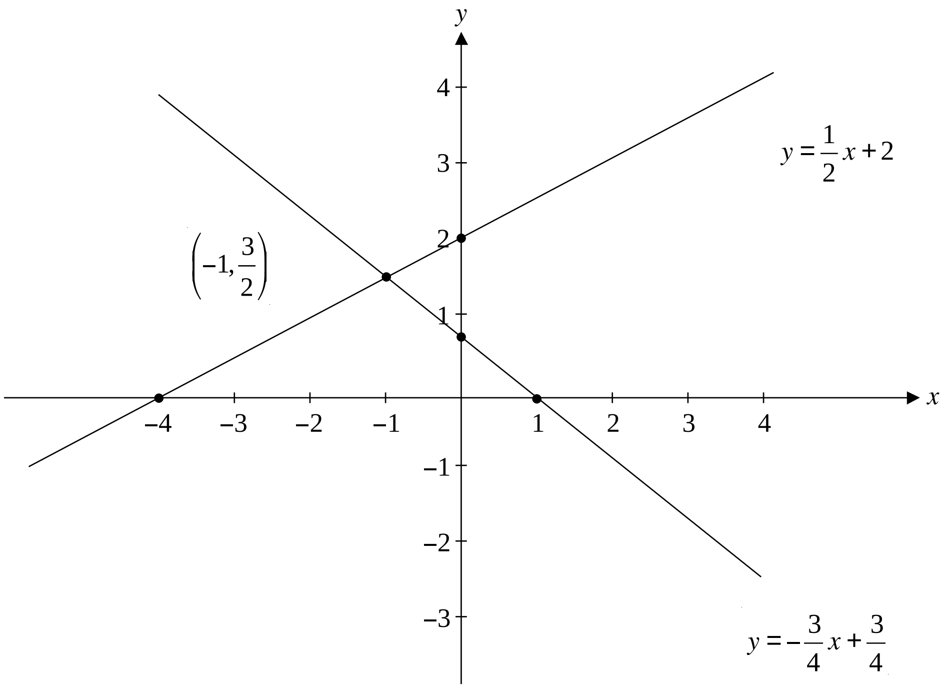
Ecuación (II)

$$(-1) - 2\left(\frac{3}{2}\right) = -4$$

$$-1 - 3 = -4$$

$$-4 = -4$$

Si se grafican las ecuaciones anteriores, se obtiene:



Al dibujo anterior se le conoce como *método gráfico*.

■ Ejemplo 60

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x - 4y = -16 \qquad \text{(I)}$$
$$x + y = 1 \qquad \text{(II)}$$

Se resolverá por el método de reducción, también llamado de *suma* o *resta*.

Paso 1. Se multiplica por (–2) a la ecuación (II) y el sistema queda de la manera siguiente:

$$2x - 4y = -16 \qquad (\text{I}')$$
$$-2x - 2y = -2 \qquad (\text{II}')$$

Paso 2. Se suman las expresiones (I′) y (II′):

$$\begin{array}{r} 2x - 4y = -16 \\ \hline -2x - 2y = -2 \\ 0 - 6y = -18 \end{array}$$

Paso 3. Del resultado de la suma se obtuvo una ecuación con una incógnita; ahora despeje:

$$-6y = -18$$
$$y = \frac{-18}{-6}$$
$$y = 3$$

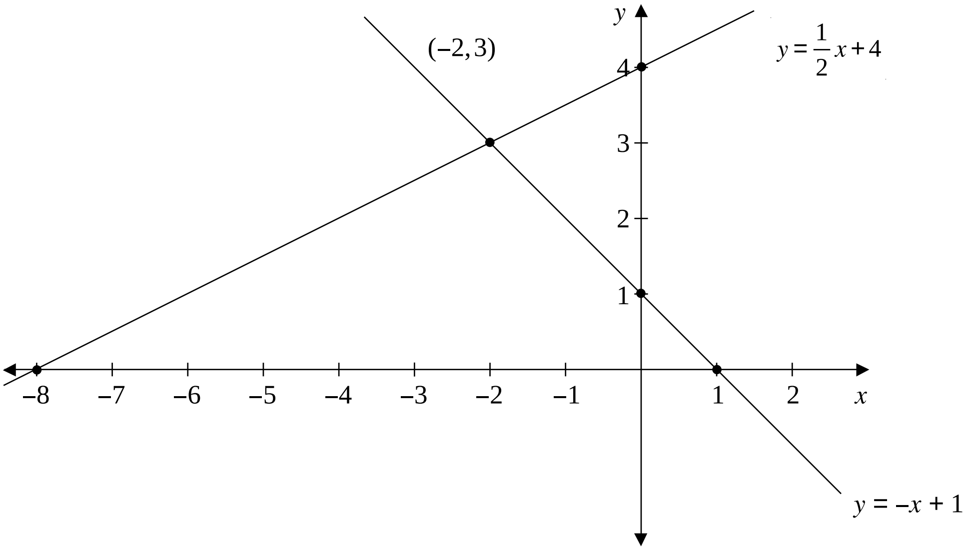
Paso 4. Se sustituye el valor de $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones. Se considera la ecuación (II), $x + y = 1$:

$$x + 3 = 1$$
$$x = 1 - 3$$
$$x = -2$$

Paso 5. Se obtiene el punto $(x, y) = (-2, 3)$ y se comprueba en (I) y en (II):

(I)
$$2(-2) - 4(3) = -16$$
$$-4 - 12 = -16$$
$$-16 = -16$$

(II)
$$-2 + 3 = 1$$
$$1 = 1$$



■ Ejemplo 61

Resolver este sistema de ecuaciones por el método de determinantes.

$$2x + 3y = 4$$
$$3x + 4y = 5$$

Paso 1. Se calcula el determinante formado por los coeficientes de las variables:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(3) = 8 - 9 = -1$$

$$\Delta = -1$$

Se puede presentar el caso donde $\Delta = 0$, lo cual indica que el sistema no tiene una solución única, o bien, no tiene solución.

Paso 2. Para conocer el valor de la variable *x,* se calcula el determinante formado por los términos constantes en la primera columna y los coeficientes de la variable *y* en la segunda columna; este determinante se divide entre el que fue calculado en el paso 1:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{(4)(4) - (5)(3)}{-1} = \frac{16 - 15}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x = -1$$

Paso 3. En forma análoga, calcule el valor de la variable *y*. El determinante contendrá en la primera columna los coeficientes de las variables *x,* y, en la segunda, los términos *constantes*.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{10 - 12}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Paso 4. Los valores $(x, y) = (-1, 2)$ cumplen con ambas ecuaciones propuestas; ahora, compruebe:

(I)

$$\begin{aligned} 2(-1) + 3(2) &= 4 \\ -2 + 6 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} 3(-1) + 4(2) &= 5 \\ -3 + 8 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

El método de Cramer puede extenderse a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas; la mecánica del cálculo sufre cambios.

Para sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas o más, no es recomendable su resolución por los métodos de igualación, reducción o gráfico. Para ello existen varios algoritmos para la resolución de sistemas de ecuaciones; en esta obra se explicarán sólo dos: el método de Cramer, también llamado de *determinantes*, y el método de la matriz inversa.[†]

■ Ejemplo 62

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -3 \\ -3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

Paso 1. Se calcula el determinante formado por los coeficientes de las variables:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(-6 - 1) + 3(9 - 4) + 2(-3 - 8)$$

$$= -14 + 15 - 22 = -21$$

Paso 2. Para conocer el valor de la variable x, se calcula el determinante formado por los términos constantes en la primera columna y los coeficientes de la variable y en la segunda columna, mientras que la tercera columna está formada por los coeficientes de la variable z. El resultado se divide entre el determinante calculado en el paso 1:

[†] Se sugiere utilizar el paquete de cómputo MacStat.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-3\ (-6 - \ 1) + 3\ (-3 - 4) + 2\ (1 - 8)}{-21}$$

$$= \frac{+21 - 21 - 14}{-21} = \frac{-14}{-21} = \frac{2}{3}$$

Paso 3. Para encontrar el valor de la variable y, el determinante estará formado como sigue: los elementos de la primera columna serán los coeficientes de la variable x, los de la segunda columna serán las constantes, en la tercera y última, serán los coeficientes de la variable z. El determinante se dividirá entre Δ:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{2\ (-3 - 4) + 3(9 - 4) + 2\ (-12 - 4)}{-21}$$

$$= \frac{-14 + 15 - 32}{-21} = \frac{-31}{-21} = \frac{31}{21}$$

Paso 4. Por último, se encontrará el valor de la variable z; en forma análoga, el determinante estará formado de la siguiente manera: la primera y segunda columnas por los coeficientes de las variables x y y, respectivamente, en tanto que la tercera y última columna se formará con los términos constantes. Como siempre, se divide entre Δ.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{2(8 - 1) + 3(-12 - 4) - 3(-3 - 8)}{-21}$$

$$= \frac{14 - 48 + 33}{-21} = \frac{-1}{-21} = \frac{1}{21}$$

Paso 5. Los valores para las variables son:

$$x = \frac{2}{3} \qquad y = \frac{31}{21} \qquad z = \frac{1}{21}$$

Por último, se estudiará la forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales por medio de la matriz inversa.

Puesto que toda matriz multiplicada por su inversa da como resultado la matriz identidad. Entonces:

$$Ax = b$$

Si multiplica ambos miembros de la igualdad por A^{-1}, en el primer miembro obtiene el vector x, y en el segundo $A^{-1}\,b$, es decir:

$$\begin{aligned} A^{-1}\;\; Ax &= A^{-1}\,b \\ I\,x &= A^{-1}\,b \\ x &= A^{-1}\,b \end{aligned}$$

■ Ejemplo 63

Resolver el sistema de ecuaciones por medio de la matriz inversa:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ -3z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

Paso 1. Exprese el sistema de ecuaciones de la forma

$$Ax = b$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Paso 2. Una vez que se conoce A, se calcula su inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Realice la operación siguiente:

$$x = A^{-1}\,b$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -5 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Paso 4. Se comprueba que los resultados obtenidos satisfagan las ecuaciones propuestas.

(I)

$$\begin{aligned} -2 - (-5) + 2\,(-1) &= 1\\ -2 + 5 - 2 &= 1\\ 5 - 4 &= 1\\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} -3\,(-1) &= 3\\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} 3\,(-2) - 2\,(-5) - 1 &= 3\\ -6 + 10 - 1 &= 3\\ 10 - 7 &= 3\\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Resumen

Puesto que el investigador emplea la estadística inferencial para generalizar los resultados de una muestra a la población objetivo, y ya que tanto la población como la muestra son conjuntos de mediciones, fue necesario desarrollar el tema de conjuntos y funciones. Debido a que la información presente puede interactuar con las leyes del álgebra de conjuntos, así como los diagramas de Venn-Euler y de Carroll (cuando se considere o no el orden de los elementos que constituyen a los conjuntos), se está en el contexto del análisis combinatorio[†] y álgebra de conjuntos, relaciones y funciones, que son los elementos básicos para desarrollar con éxito la teoría de probabilidad. Ésta, entre otras cosas, formaliza a la estadística como modelo matemático donde interviene un elemento aleatorio. Tanto el modelo estadístico como el matemático ayudan a describir fenómenos determinísticos e indeterminísticos. Por otra parte, las matrices son el elemento básico para desarrollar los procesos estocásticos y, junto con los sistemas de ecuaciones, se podrán construir los modelos de regresión lineal simple y múltiple.

Ejercicios

3.1 ¿Cuál de los siguientes enunciados es un conjunto finito?

a) Los estudiantes que asisten a la Universidad.
b) Los números negativos.
c) Las letras del abecedario.
d) Las mujeres profesionales de un país.
e) Los presidentes de los países latinoamericanos.
f) Todas las chicas hermosas de su grupo.

[†] También conocido como *análisis de posibilidades*.

3.2 Dado el conjunto $\{a, b, c\}$:

a) Enuncie todos los subconjuntos y cuántos son.
b) ¿Cuáles de los anteriores son propios?

3.3 Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

¿Cuál es A'?

3.4 Dados los siguientes conjuntos, defina cualquier relación que exista entre ellos e ilustre estas relaciones por medio de un diagrama de Venn:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$U = \{x \mid x$ es un entero positivo, mayor que cero y menor que 11$\}$

3.5 A 12 personas se les pregunta qué tipo de transporte público utilizan para acudir a su trabajo. Las dos formas de trasladarse son:

A = Autobús
M = Metro
A y M = Autobús y Metro

Construya un diagrama de Venn en el que se resuman los resultados. Suponga que el conjunto universal incluye a las 12 personas, si

$A = \{1, 2, 4, 7, 9, 10, 12\}$
$M = \{2, 6, 3, 7, 9, 10\}$
$A \cap M = \{2, 7, 9, 10\}$

3.6 A partir de la información del problema 3.5, enuncie los conjuntos utilizando la definición por construcción.

3.7 Si las personas son las siguientes:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

y las que utilizan metro son:

$M = \{a, d, e, f, g, h, i\}$

las que utilizan autobús son:

$A = \{b, c, d, i, j, k, l\}$

De las siguientes expresiones, determine cuál es falsa (F) o verdadera (V).

1. $b \in A$
2. $a \in A$
3. $d \in M$
4. $d \in A$
5. $i \subset M$
6. $C \not\subset M$
7. $i \in M$
8. $i \notin U$
9. $A \subset U$
10. $U \supset M$

3.8 De los siguientes conjuntos, diga cuáles son iguales y cuáles similares.

$C = \{1, 3, 5, 7\}$
$D = \{\Delta, O, \square, ☆\}$
$E = \{1, 3, 5\}$

$F = \{7, 3, 5, 1\}$
$G = \{a, a, a\}$
$H = \{a, a, a, a\}$

3.9 A partir de los datos del problema 3.7, ubíquelos en un diagrama de Venn-Euler.

3.10 En un grupo de 100 estudiantes de secundaria, 60 son hombres, de los cuales 45 fuman. De las 40 mujeres, 10 no fuman. Ubíquelos en un diagrama de Carroll.

3.11 Dados los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

encuentre:

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $B \cap C$
d) $A \cap A'$
e) $A \cap A \cup A \cup B$
f) $B \cap U$
g) $\overline{A} \cap \overline{B} \cup C$
h) $A \cup B$
i) $A \cap B \cap C$
j) $A \cap (B \cup C)$
k) $C \cap (A \cup B)$
l) $(A \cap C) \cup B$
m) $(A \cap B) \cup C$
n) $\overline{A} \cap \overline{B}$
o) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

3.12 Ilustre con un diagrama de Venn-Euler los incisos a, b, c, d, e, f, del problema anterior.

3.13 Dados los conjuntos

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3, -4, -5\}$
$B = \{-2, -4, 0, 2, 4\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

encuentre:

a) $A \cup (B \cup C)$
b) $A \cap (B \cup C)$
c) $(A \cap C) \cup B$
d) $C \cap (A \cup B)$

3.14 Se realizó una encuesta a 1000 personas en relación con sus adquisiciones en distintas librerías. Los resultados de la investigación revelaron que:

300 personas compraron en la librería *A*.
200 en la *B*.
250 en la *C*.
50 en la *A* y *B*.
75 en la *A* y *C*.
60 en *B* y *C* únicamente.
25 en las 3.

Por medio de un diagrama de Venn-Euler diga:

a) ¿Cuántas personas no compraron en ninguna de las ellas?
b) ¿Cuántas compraron únicamente en la *A*?
c) ¿Cuántas compraron solamente en la *B* y *C*?

3.15 Dibuje un diagrama de Venn-Euler para cada uno de los conjuntos:

a) $(A \cup B)'$
b) $(A' \cap B')^C$
c) $A \cap B - (A \cap B \cap C)$

3.16 En la línea de producción se obtienen 900 focos en un día y pueden tener los defectos siguientes:

A = filamento roto
B = rosca dispareja
C = fisura

$n(A) = 39$ $\quad$ $n(A \cap B) = 15$
$n(B) = 19$ $\quad$ $n(A \cap C) = 21$
$n(C) = 43$ $\quad$ $n(B \cap C) = 12$
$n(A \cap B \cap C) = 8$

Expresе, utilizando las leyes de los conjuntos, cuántos artículos hay en cada uno de los siguientes incisos:

a) Los que tienen los defectos tipo B y C, pero no A.
b) Los que tienen defecto tipo B, únicamente.
c) Los que no tienen defectos.
d) Aquellos que tienen el defecto tipo A o B o C, pero no tienen B y C.
e) Exactamente un defecto.
f) Exactamente dos defectos.
g) Al menos un defecto.
h) Al menos dos defectos.
i) A lo sumo un defecto.
j) A lo sumo dos defectos.

3.17 En una encuesta a 120 personas, se les preguntó acerca de su preferencia de tres marcas de café (A, B, C); los entrevistados se clasificaron de acuerdo con sus nacionalidades y preferencias.

H = hondureños
M = mexicanos
Cu = cubanos

a) H y $A = 18$ $\quad$ Cu y $A = 9$
b) H y $B = 11$ $\quad$ Cu y $B = 19$
c) H y $C = 9$ $\quad$ Cu y $C = 12$
d) M y $A = 24$
e) M y $B = 8$
f) M y $C = 10$

a) ¿Cuántos entrevistados se encuentran en a, b, c, d, e, f?
b) ¿Cuántos de cada nacionalidad existen en total?

3.18 A 61 personas de una escuela (entre profesoras y alumnos) se les preguntó sobre su color favorito:

M = niños
F = niñas
P = profesoras
V = violeta
R = rojo
A = azul
Am = amarillo

a) Hay 10 niños a quienes les gusta el rojo.
b) A seis niñas les encanta el rojo.
c) A tres profesoras les gusta el rojo.
d) A cinco niños les agrada el azul.
e) A tres niños les gusta el color amarillo.
f) A cuatro niños les agrada también el violeta.
g) 11 niñas prefieren el color azul.
h) A 12 niñas también les gusta el amarillo.
i) Una niña prefiere el violeta.
j) Para cuatro profesoras, el azul es su color favorito.
k) A una profesora le agrada el amarillo.
l) A una profesora le gusta el color violeta.

1. ¿Cuántos elementos hay en cada uno de los siguientes incisos?

a) $n(V) =$
b) $n(R \cup A) =$
c) $n(M \cup Am) =$
d) $n[P \cap (A \cup Am)] =$
e) $n(F \cap V)' =$
f) $n\left[M \cup (F \cup A')\right] =$
g) $n(F \cup V)' =$

2. Indique cuántos elementos hay en:

a) $n(M \cap R) =$
b) $n(F \cap R) =$
c) $n(M \cap R) =$
d) $n(M \cap A) =$
e) $n(M \cap Am) =$
f) $n(M \cap V) =$
g) $n(F \cap A) =$
h) $n(F \cap Am) =$
i) $n(F \cap V) =$
j) $n(P \cap A) =$
k) $n(P \cap Am) =$
l) $n(P \cap V) =$

3.19 Si A y B son dos conjuntos ajenos, calcule:

a) $n(A \cup B) =$
b) $n(A \cap B) =$

Si A y B son mutuamente excluyentes, calcular a y b.

3.20 Existen tres tipos de antígenos denotados por A, B y Rh. Todas las personas están clasificadas doblemente; si tienen el antígeno Rh (+) se denotan por R y si tienen el Rh (–), por R'. Pueden ser del tipo AB, A y B, o pueden ser O si no tienen el antígeno A ni B. Si Ω es el conjunto de todas las personas sanas

a) ¿Cuántos grupos sanguíneos existen?
b) Haga una lista de dichos subconjuntos.

3.21 A 100 personas se les hacen pruebas de sangre y se obtienen los datos siguientes:

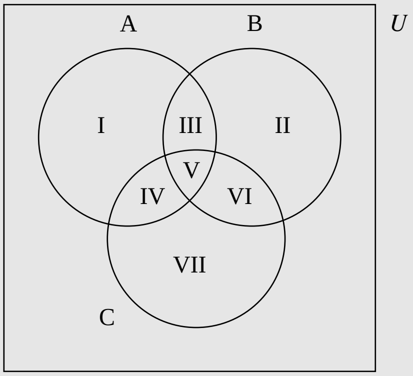
48 poseían el antígeno A.
50 el B.

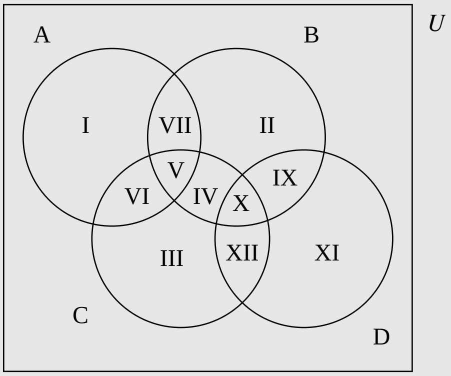
38 el R.
22 los A y B.
10 los A y R.
14 los B y R.
Cuatro los tres.

a) ¿Cuántas personas de dicha muestra poseen A, B y R'?
b) ¿Cuántas personas del grupo tienen el tipo O?

3.22 En un vuelo de cierta línea aérea viajan 178 hombres, 18 jóvenes, 10 mexicanos del sexo masculino, dos jóvenes mexicanos, 26 personas de nacionalidad mexicana y 14 jovencitas extranjeras. ¿Cuántos pasajeros se encuentran a bordo del avión?

3.23 Utilizando las operaciones y relaciones posibles entre conjuntos, para cada una de las regiones de los siguientes diagramas, exprese:

a)


b)


3.24 Las mujeres de un grupo de cierta escuela fueron clasificadas en:

A = altas, B = bajas, H = hermosas, L = listas, O = orgullosas, T = tímidas

Por consiguiente, había:

22 hermosas, listas y altas;
17 hermosas, listas y bajas;
13 altas, orgullosas y listas;
cuatro orgullosas, altas y tímidas;
18 orgullosas, listas y bajas;
11 hermosas, tímidas y altas;
siete bajas, hermosas y tímidas;
cinco tímidas, bajas y orgullosas

¿Cuántas mujeres hay en:

I) a) $A \cup B$?
b) $H \cup P$?
c) $A \cap P$?
d) $A \cup (P \cap L)$?
e) $A' \cup (P \cap A)$?
f) $(P \cap L) \cup (H \cap T) \cup B'$?
g) $(B \cap H \cap L) \cup (B' \cap H' \cap T')$?
h) en todo el grupo?

II) Escriba el significado de cada uno de los incisos anteriores.

3.25 Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{x: \mid x = 1, 2, 3, ..., 10\}$
$B = \{x: \mid 1 \leq x \leq 10\}$
$C = \{x: \mid x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$D = \{0, 10, 20, 30\}$

calcule:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cup C$
d) $A \cap C$
e) $A \cup D$
f) $A \cap D$
g) $B \cup C$
h) $B \cap C$
i) $B \cup D$
j) $B \cap D$
k) $C \cup D$
l) $C \cap D$
m) $A \cup B \cup C$
n) $A \cap (B \cup C)$
o) $A \cup (B \cap C)$
p) $A \cap B \cap C$
q) $C \cup (A \cap D)$
r) $(A \cup B) \cap (C \cup B)$

3.26 Simplifique: a) $(A \cup B) \cap (C \cup C')$ b) $(A \cup \varnothing) \cap B$ c) $[(A \cup B) \cap A']'$

3.27 Treinta y tres estudiantes prefieren el sistema trimestral en lugar del sistema semestral. Si la encuesta se realizó a 50 estudiantes de licenciatura y 35 de posgrado:

a) ¿Cuántos estudiantes prefieren el sistema semestral, si 23 estudiantes de licenciatura lo prefieren?
b) ¿Cuántos estudiantes de posgrado prefieren el sistema trimestral?

3.28 Una agencia noticiosa vende tres periódicos diferentes: *El imparcial*, *El correo* y *El noticioso*. 70 lectores compran *El imparcial*, 60 *El correo* y 50 *El noticioso*; 17 compran *El imparcial* y *El correo*; 15 *El correo* y *El noticioso*; 16 *El noticioso* y *El imparcial*, mientras que tres lectores compran los tres periódicos.

¿Cuántos lectores de estos periódicos existen?

3.29 Después que 100 ratones corrieron por un laberinto, un psicólogo reportó los datos siguientes: 50 ratones eran machos, 50 fueron previamente entrenados, 42 tomaron a la izquierda en la primera oportunidad, 21 fueron machos previamente entrenados, siete machos tomaron a la izquierda, 30 ratones previamente entrenados tomaron a la izquierda y cinco machos previamente entrenados tomaron a la izquierda.

a) Dibuje un diagrama de Venn y determine el número de:
  i) Hembras previamente entrenadas que tomaron a la izquierda.
  ii) Las hembras que tomaron a la derecha.
b) A cada una de las regiones del diagrama anterior, señale las relaciones entre dichos conjuntos.
c) Resuelva el problema utilizando un diagrama de Carroll.

3.30 Dibuje la gráfica del siguiente conjunto de pares ordenados e indique si es función o relación:

$A = \{(4, 1), (-1, -3)\}$

3.31 Encuentre el dominio y contradominio de la siguiente expresión y señale si es función o relación:

$B = \{(3, 5), (2, 5)\}$

3.32 Indique si es función o relación cada uno de los incisos siguientes:

a) $|y| = X$ c) $y = -|x + 2|$ e) $y = 5 - |x + 1|$
b) $y = |x - 5|$ d) $y = |x| - 5$

3.33 Calcule la ecuación de la recta, y su pendiente que pasa por los puntos A y B, donde: $A(6, -3)$ y $B(-2, 3)$

3.34 Construya la ecuación de la recta si la pendiente es $m = 4$ y pasa por el punto A $(2, -3)$.

3.35 Sea $y = 4x - 3$, encuentre la pendiente y la ordenada al origen.

3.36 Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$, y m_1 su pendiente; además, L_2 la recta que pasa por los puntos $C(2, -5)$ y $D(-1, 7)$, y m_2 su pendiente. Calcule las m_1 y m_2, grafique y concluya.

3.37 Dada la recta L_1, que tiene la ecuación $2x - 3y = 12$ y la recta L_2 cuya ecuación es $3x + 3y = 6$, dibuje un esquema de cada recta y obtenga las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas:

a) Por el método gráfico.
b) Indique cuáles son sus pendientes y ordenadas al origen.
c) Calcule las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas algebraicamente.

3.38 Dados tres puntos: $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ y $C(7, 2)$, por medio de sus pendientes determine si los tres se encuentran en la misma línea (son colineales).

3.39 Dada la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^2 = A \cdot A$.

3.40 Sea la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^3.

3.41 Sea A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule la transpuesta de dicha matriz (A^T).

3.42 Sea A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Compruebe que $AB = (BA)^T$

3.43 Dada la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{-1}.

3.44 Sea B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule B^{-1}.

3.45 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$2x - 8y = 5$
$-3x + 12y = 8$

Resuélva utilizando:

a) El método gráfico.
b) Cualquier método algebraico.

3.46 Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$3x + y = 0$
$2x - 3y = 0$
Resuelva por

a) El método gráfico.
b) Determinantes.

3.47 Del sistema de ecuaciones

$x - 3y = 4$
$-4x + 2y = 6$
Resuelva por:

a) El método gráfico.
b) Determinantes.

3.48 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$x - 2y + 3z = 11$
$4x + y - z = 4$
$2x - y + 3z = 10$

Por el método de:

a) Determinantes.
b) Usando la matriz inversa.
c) Utilizando MacStat.

3.49 Sea el siguiente sistema:

$3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9$
$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6$
$-x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3$

a) Resuelva por medio de la matriz inversa.
b) Utilizando MacStat.

3.50 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 400$
$2x_2 + 5x_3 = -200$
$-2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1$

a) Resuelva utilizando MacStat.
b) Por matrices.

Capítulo 4

Análisis combinatorio

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector sea capaz de explicar las nociones fundamentales del análisis combinatorio, también conocido como cálculo de posibilidades; además solucionará los ejercicios que se presentan para reconocer su aplicación en las ciencias sociales, del comportamiento y de la salud.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Explicar los siguientes conceptos: simbología y notaciones, combinaciones, ordenaciones, permutaciones, coeficiente multinomial, así como el teorema del binomio.
- Aplicar los procedimientos de los principios fundamentales de conteo.
- Generalizar los principios de conteo en el algebra de conjuntos y funciones.
- Diferenciar entre combinaciones, permutaciones y ordenaciones.
- Desarrollar ejemplos y aplicaciones de diagramas de árbol.
- Explicar el principio de la multiplicación y de la adición en el conteo.
- Plantear situaciones reales (cotidianas) donde se aplique el análisis combinatorio.
- Reconocer la relación de los contenidos de éste capítulo con los capítulos anteriores (con relación a los modelos determinísticos), para establecer los fundamentos de los probabilísticos.
- Establecer las bases para obtener todas las posibles muestras de una población determinada.

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se analizaron algunos conceptos estadísticos y matemáticos que son básicos para la utilización adecuada de la estadística, así como para realizar algunos estudios, investigaciones o experimentos, cuando el resultado esté completamente determinado. Por lo general, a estos *modelos* en los cuales los efectos del cambio (tanto en los parámetros como en las variables de interés) puedan determinarse previamente, aun antes de efectuar dicho experimento, estudio o investigación (también se puede considerar una evaluación), se les conoce como *determinísticos*. Pocas veces se utilizan en situaciones donde participa la conducta del ser humano, debido a que su comportamiento no se rige por leyes inexorables, análogas a las de la física o la química. Por ello se han desarrollado modelos estadístico-matemáticos, donde interviene la incertidumbre o aleatoriedad; a estos modelos se les suele conocer como *no determinísticos*, *estocásticos*, *aleatorios* o *probabilísticos*, ya que están basados en la probabilidad de ocurrencia de dichos eventos o fenómenos.

En este capítulo se describirá la manera de identificar todos los resultados o eventos posibles que puedan ocurrir en un fenómeno o experimento dado, de ahí el nombre de *análisis combinatorio*, también conocido como *análisis de posibilidades*.

En este texto, el interés radica en los conceptos de probabilidad aplicable a situaciones en las cuales exista un conjunto finito o contable de eventos discretos posibles. Por tanto, el primer paso es desarrollar formas de conteo de dichos eventos posibles.

EXPERIMENTOS

Un experimento es cualquier actividad, operación o procedimiento, bien definido, en el cual el resultado se observa y se mide, pero que no puede predecirse con certeza. Según Pavlov, *la observación recoge lo que ofrece la naturaleza; la experimentación, en cambio, toma de la naturaleza lo que desea*.

Se sabe que los resultados de un experimento suelen variar cuando se efectúan diversas mediciones del mismo fenómeno, aun cuando sea el mismo observador. Es común encontrar que los resultados varían de una observación a otra debido a que no pueden anticiparse con exactitud.

Aun el resultado de un único ensayo al azar no puede predecirse; la experiencia con una secuencia de experimentos ha revelado una clase muy útil de regularidad. Un modelo o una estructura matemática que describa tal regularidad es de gran valor y la teoría de la probabilidad ha desarrollado modelos para estos experimentos aleatorios.

La estadística realiza inferencias del modelo teórico diseñado para un experimento dado y utiliza los resultados recientes, pero lleva a cabo el experimento una o varias veces para obtener datos. Por lo general, no es posible conocer el modelo verdadero en forma detallada y esto se debe a que uno obtiene los datos y los utiliza como la base para llegar a estimaciones acerca de aspectos desconocidos del modelo real. Dichas conclusiones son muy cercanas a la realidad para los propósitos prácticos.

Cuando aplique la matemática a cualquier situación real, es necesario construir un modelo teórico.

■ Ejemplo 1

La segunda ley de Newton del movimiento establece que un objeto que está sujeto a una fuerza, se mueve con una aceleración proporcional a dicha fuerza. Ese modelo queda definido por la ecuación $F = ma$, donde la fuerza está en función de la masa y la aceleración del objeto. Esta ley establece que ese modelo matemático describe con toda precisión el movimiento de un objeto.

> Asimismo, dicha ley no es demostrable desde un punto de vista lógico, pero puede comprobarse en forma experimental. Más aún, la ecuación básica conduce matemáticamente a varias consecuencias que pueden verificarse; por ejemplo, la distancia de un objeto que cae en un tiempo determinado se deriva de esta ecuación. Esta consecuencia en el modelo se verifica, entonces, dejando caer objetos y midiendo los tiempos de caída.

Muchos de los modelos de la física clásica y de otras ciencias o disciplinas son determinísticos. Esto significa que, dada una configuración inicial de los elementos que participan, el resultado de un experimento queda completo y determinado con precisión por la ecuación del modelo. Existen muchos fenómenos en los cuales los mecanismos que los originan son tan complejos y las configuraciones iniciales tan difíciles de medir, que cualquier intento para aplicar un modelo determinístico es inútil. Pero se requiere alguna descripción matemática de este fenómeno.

Cuando ocurre el nacimiento de un bebé, existen dos posibilidades: niño o niña. La proporción en que ocurren estos eventos se llama *probabilidad*; si esta proporción se va acercando a un determinado valor (constante), se le denomina *regularidad estadística*.

En este capítulo se analizará la manera de contar todos los posibles resultados de ciertos experimentos.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

Para conocer todos los posibles resultados (eventos) de un experimento determinado, es necesario contar el número de elementos de las combinaciones entre varios conjuntos; una forma es utilizar los diagramas de Venn-Euler, de Carroll o ambos, y otra es emplear los diagramas de árbol.

Diagramas de árbol

Es un esquema que muestra lógica y explícitamente todos los posibles resultados (eventos) por obtener de un experimento.

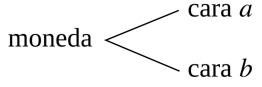
Se ejemplificará este método utilizando casos sencillos, pero aumentando el grado de dificultad de los mismos.

■ Ejemplo 2

Al lanzar una moneda al aire, cuando cae muestra la cara a o la cara b:

Figura 4.1 Ejemplos de diagramas de árbol: a), b), c) y d).

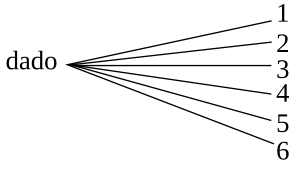
a)



■ Ejemplo 3

Si se lanza un dado con seis caras numeradas de 1 a 6, los resultados observados son:

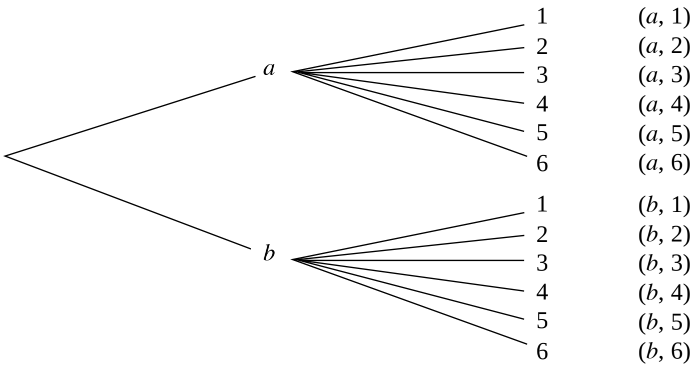
b)



■ Ejemplo 4

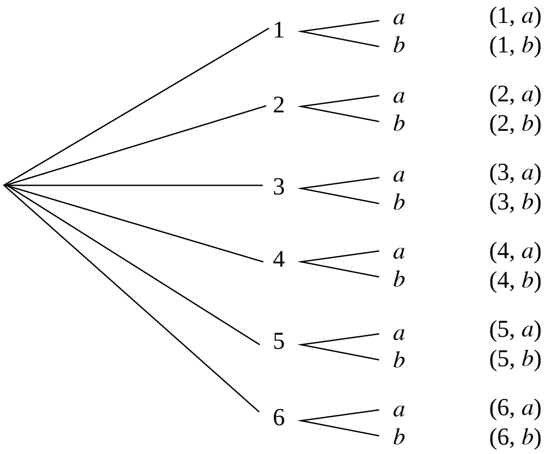
Si se hace el experimento de lanzar simultáneamente el dado y la moneda, los resultados que se obtendrán son los siguientes:

c)



o también,

d)



Como $(1, a) = (a, 1)$

$\vdots \qquad \vdots$

$(6, b) = (b, 6)$

Ambos diagramas de árbol representan el mismo conjunto de resultados, debido a que $(1, a) = (a, 1)$ y así sucesivamente; esto es porque el orden de las características no afectan al resultado. Suele llamárseles combinaciones.

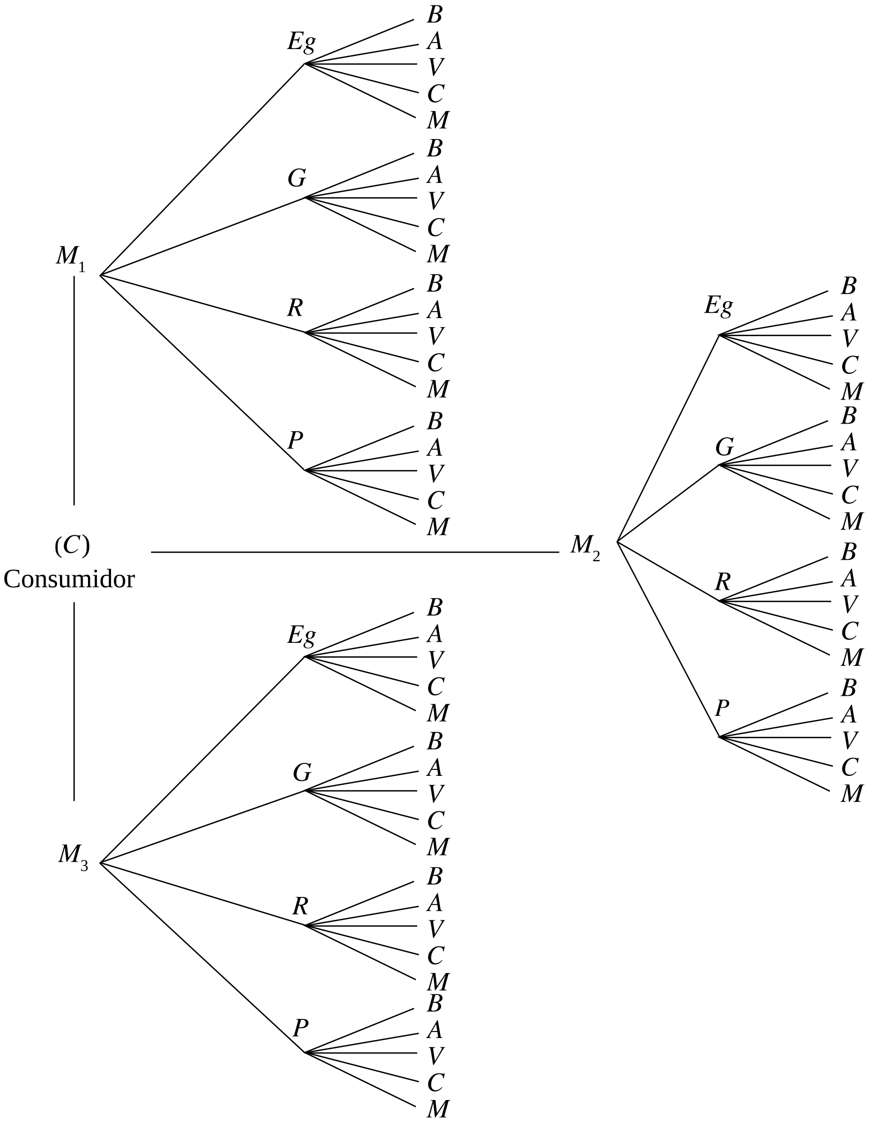
■ Ejemplo 5

En una investigación de mercado, un consumidor se enfrenta a lo siguiente: si desea comprar un refrigerador, visita una tienda que distribuye tres marcas de refrigeradores, cada marca viene en cuatro tamaños y en cinco colores. ¿Cuántos diferentes refrigeradores existen para escoger, según marca, tamaño y color?

Donde:

C = Consumidor
M = 1, 2, 3 (tres marcas diferentes)
Eg = Extra grande
G = Grande
R = Regular
P = Pequeño

B = Blanco
A = Amarillo
V = Verde
C = Cobre
M = Madera



El diagrama de árbol es un medio básico para mostrar un *esquema de conteo*.

En la situación anterior de los refrigeradores, la simetría del esquema de conteo hace más simple utilizar una fórmula en lugar de un diagrama. En otras situaciones, este método es más útil para aclarar que todas las posibilidades han sido contadas una sola vez. El diagrama de árbol es particularmente valioso cuando todas las combinaciones, en una o más de las partes de él, se dan de la misma manera para cada una de sus ramas. Sin embargo, la dificultad del uso de dicho método aumenta al incrementarse el número de todos los resultados posibles.

■ Ejemplo 6

En un examen de opción múltiple formado por 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro alternativas, habrá $4^{10} = 1\,048\,576$ diferentes formas de responder a las preguntas, lo cual sería imposible de representar en un diagrama de árbol.

Principio de la multiplicación

Este principio se ejemplificará con el caso de los refrigeradores. ¿Cuántas posibilidades de elegir un refrigerador tiene una persona?

Se tiene:

A_1 = Opciones de marca
A_2 = Opciones de tamaño
A_3 = Opciones de color

$A_1 = M_1, M_2, M_3$ (las tres marcas de refrigerador).
$A_2 = Eg, G, R, P$ (los cuatro tamaños del refrigerador).
$A_3 = B, A, V, C, M$ (los cinco colores del refrigerador).

Donde $n(A_1) = 3$

$n(A_2) = 4$

$n(A_3) = 5$

Entonces, el número de refrigeradores diferentes entre los que se podrá elegir es: $(3) \times (4) \times (5) = 60$
A partir de lo anterior, se puede ver que el siguiente principio se cumple:

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_{k-1} \times A_k) =$$

$$n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot (A_3) ... n(A_{k-1}) \cdot n(A_k)$$

Principio de la adición

Caso 1

Sean A_1 y A_2 conjuntos ajenos, no vacíos y subconjuntos de U; entonces:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2)$$

El siguiente principio se cumple:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + ... + n(A_{k-1}) + n(A_k)$$

Caso 2

Pero si los conjuntos no son ajenos, entonces:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$$

Y para tres conjuntos:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2)$$
$$-n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

■ Ejemplo 7

En un experimento se lanzan dos dados; todos los resultados posibles se muestran en la matriz siguiente:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

A este conjunto de todos los posibles resultados del experimento se le conoce como *espacio muestral* o *espacio de eventos*.

Para facilitar este ejemplo, se considerará que cada pareja que forma la matriz anterior es el resultado del experimento de lanzar dos dados, en donde el primer elemento corresponde al primer dado y el segundo elemento al segundo dado.

Caso 1

a) Si el primer dado muestra el número 1 y el segundo es cualquier valor, los resultados son:

$$n(A_1) = 6 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

b) ¿Cuántos resultados arroja la siguiente condición?

A_1 = cualquier resultado del primer dado y
A_2 = que el segundo muestre el número uno, entonces

$$n(A_2) = 6 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$

c) $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$[†] $= 6 + 6 - 1 = 11$

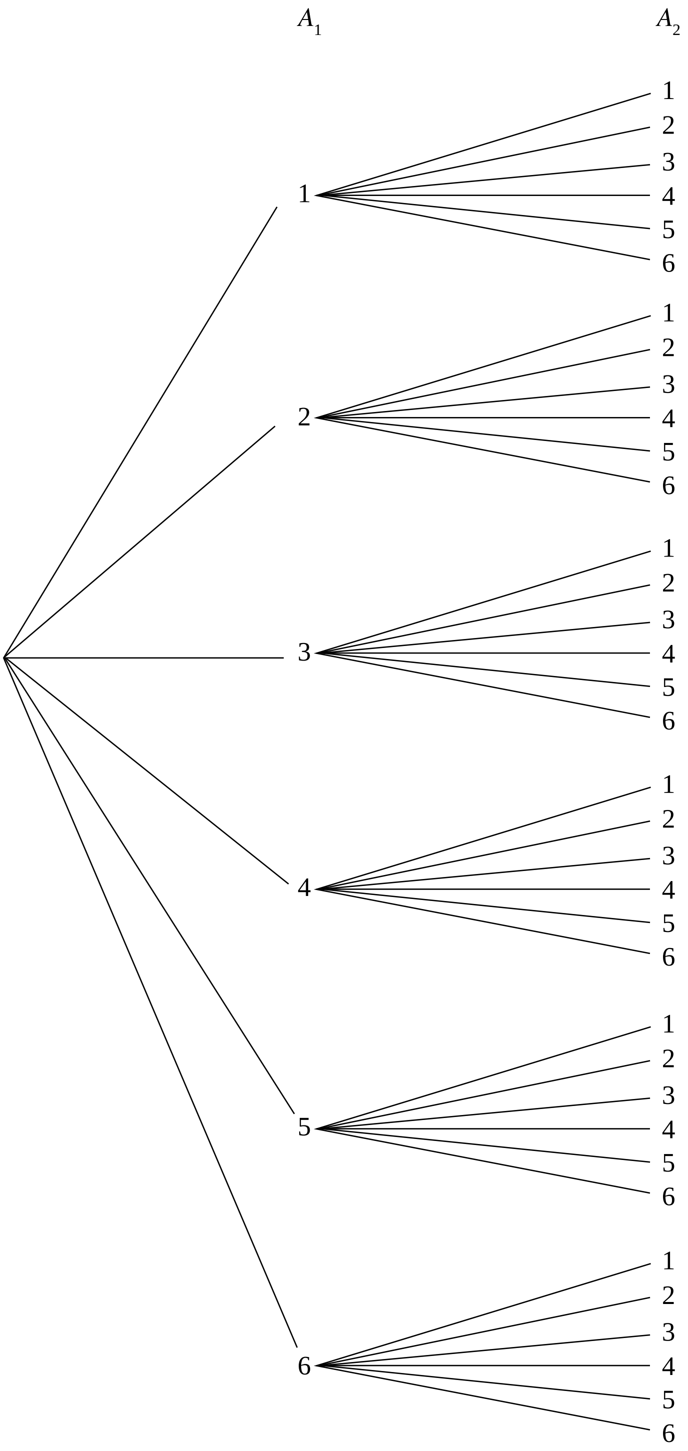
d) De todos los resultados posibles, excluir los que contiene el número 1, llamando este conjunto de eventos A_3.

Al observar el espacio muestral y excluyendo los resultados que tienen 1, se obtiene:

$$n(A_3) = 25$$

[†] Si $A_1 = 1$ y $A_2 = 1$ entonces $n(A_1, A_2) = n(A_2, A_1)$ y sólo se considera una sola vez.

Figura 4.2 Diagrama de árbol al tirar simultáneamente dos dados



PERMUTACIONES (*Pn, r*)

Una permutación es un arreglo de tamaño r, tomado de n objetos, en donde el orden de los r elementos es importante.

Cuando $r < n$

$$P_{n,\,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde:

$n!$ = es el "factorial de un número n", $n \geq 0$ y n debe ser un entero, $n \in \mathbf{Z}$.[†] El factorial de un número es el producto sucesivo decreciente de los factores que lo componen hasta llegar a la unidad:

$$n! = n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\;...\;[n-(n-1)]$$

■ Ejemplo: 8

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{120}$$

Algunas propiedades de $n!$ son:

i) $0! = 1$

ii) si $a + b = c$, entonces, $(a + b)! = c!$, análogamente para la resta.
si $a - b = d$, entonces, $(a - b)! = d!$

■ Ejemplo 9

$$(5 + 3)! = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{40\,320}$$

$$(5 - 2)! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

iii) si $\frac{a}{b} = e$, entonces, $\left(\frac{a}{b}\right)! = e!$

■ Ejemplo 10

$$\left(\frac{10}{5}\right)! = 2! = 2$$

$$\text{cuando } \frac{a!}{b!},\ a > b$$

■ Ejemplo 11

$$\frac{10!}{5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5\,!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot = 30\,240$$

Cuando $r = n$

$$P_{n,\,r} = n!$$

[†] Z es el conjunto de los números enteros.

■ Ejemplo 12

Encontrar la permutación de cinco elementos de tamaño 5, es decir de las formas en que se pueden ordenar cinco elementos.

$$P_{5,5} = 5! = 120$$

Cuando $r < n$ se le suele llamar *ordenación* y se denota por

$${}_nO_r,\ O_{n,r},\quad O^n_r,\ {}_nP_r,\ P_{n,\,r},\ P^n_r$$

Circulares

Cuando los objetos se encuentran arreglados en forma circular, el número de permutaciones se obtiene de la manera siguiente:

Caso 1

$\boldsymbol{n = r}$

$$PC_{(n,n)} = (n - 1)!$$

■ Ejemplo 13

El director de una empresa desea ser democrático y llama a seis de sus colaboradores a una junta. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar las siete personas *alrededor* de la mesa circular?

$$PC_{(7,7)} = (7\text{–}1)! = 6! = 720$$

Caso 2

$\boldsymbol{n \neq r}$

$$PC_{(n,\,r)} = \frac{n!}{r(n-r)!}$$

■ Ejemplo 14

Si se tiene a 10 integrantes en la administración y sólo siete asisten a la junta, ¿de cuántas formas se pueden sentar alrededor de una mesa circular?

$n = 10$
$r = 7$

$$PC_{(10,7)} = \frac{10!}{7(10-7)!} = \frac{10!}{7(3!)} = \frac{10!}{7(6)} = \frac{10!}{42}$$

$$PC_{(10,7)} = 86\ 400$$

COMBINACIONES

En las combinaciones, si dos conjuntos tienen los mismos elementos, sin tomar en cuenta su orden, se consideran iguales.

Cuando el conjunto tiene n elementos, se dice que se pueden formar 2^n subconjuntos, de los cuales $(2^n - 1)$ son "no vacíos" (capítulo 3). Dichos subconjuntos son todas las combinaciones posibles que se pueden obtener del conjunto de n elementos, tomados de un tamaño determinado.

■ Ejemplo 15

De un grupo de tres personas, ¿cuántos subgrupos de tamaño 3 se pueden formar?, ¿cuántos de tamaño 2?, ¿cuántos de tamaño 1?

Sean las personas (a, b y c).

i) Un grupo de tres personas $(a, b, c) = (a, c, b) = (b, a, c) = (b, c, a) = (c, b, a) = (c, a, b)$

Como no importa el orden de las personas, los grupos son iguales.

ii) Si los subgrupos por formar son de dos personas, se tienen tres combinaciones: (a, b), (a, c) y (b, c)

como $(a, b) = (b, a)$ se considera sólo una combinación,
$(a, c) = (c, a)$ se considera sólo una combinación,
$(b, c) = (c, b)$ también,

se habla sólo de tres subgrupos.

iii) Para el caso de subgrupos con una sola persona, se pueden formar tres: (a), (b), (c).

Sumando todas las combinaciones anteriores se tienen $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ subconjuntos o grupos diferentes.

En general, para denotar el número de combinaciones que se pueden obtener de un conjunto de n elementos tomados de r diferentes tamaños, se utiliza la simbología siguiente:

$$C_{(n,r)},\ C_r^n,\ {}_nC_r,\ \binom{n}{r} \text{ donde } r < n$$

Si $n = r$, todas las combinaciones de n elementos de tamaño r es un solo conjunto. Como en el ejemplo del grupo de tres personas tomadas de tamaño 3, se habla de las mismas tres personas que forman el grupo.

Al generalizar, tiene que:

$$C_{(n,\,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

De la expresión anterior, observe que:

$$r\,!\ \left[C_{(n,r)}\right] = \frac{n!}{(n-r)!} = P_{(n,\,r)}$$

■ Ejemplo 16

En el de las tres personas tiene:

i) $n = 3$, $r = 3$

$$C_{(3,3)} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!(0)!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

ii) $n = 3$, $r = 2$

$$C_{(3,2)} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!(1)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$$

iii) $n = 3$, $r = 1$

$$C_{(3,1)} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$$

COEFICIENTE MULTINOMIAL O PARTICIONES

Cuando se mencionó en el inciso anterior los subconjuntos de un conjunto dado implícitamente, se hacía referencia a *particiones*. Más adelante, en una población de estudio, se hacen particiones en términos de edad, ocupación, ingreso, etcétera. (véase el capítulo 5).

■ Ejemplo 17

Indicar cuántas palabras diferentes se pueden formar con el término:

Lisa, 4! = 24 palabras diferentes, considere que todas las letras son diferentes.

Lola, $\frac{4!}{2!}$ = 12 palabras diferentes, en este caso, dos de las letras se repiten.

A estas 12 palabras diferentes se les conoce como *particiones ordenadas*.

Chihuahua $\frac{9!}{3!\ 2!\ 2!} = \frac{362\,880}{24} = 15\,120$ palabras diferentes.

En general, las particiones ordenadas (PO) se obtienen utilizando

$$(PO) = \frac{n!}{r_{1!}\ r_{2!}\ r_{3!} \cdots r_{\kappa!}}$$

donde las r son las letras que se repiten.

Una de las aplicaciones de los conceptos anteriores, tales como las combinaciones, permutaciones, diagramas de árbol y, en general, las técnicas de conteo, tendrán su aplicación en la probabilidad, que es un modelo teórico muy importante para desarrollar las distribuciones probabilísticas y, generalmente también, para establecer las bases de la estadística.

TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio utiliza dos conceptos definidos en este capítulo: las combinaciones y el factorial.

1. En este caso las combinaciones serán los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{r}$$

2. El factorial de un número se tomará como: $n! = n(n - 1)!$
   Si hacemos $n = 1$ aplicando la fórmula anterior:

$$1! = 1(1 - 1)! = 1 \cdot 0!$$

Despeje 0! de la expresión anterior:

$$\frac{1!}{1} = 0! \Rightarrow 0! = 1$$

Para el desarrollo binomial se requieren dos factores (a, b) y un exponente n.

$$\begin{gathered}(a + b)^0 = 1 \\ (a + b)^1 = (a + b) \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots\end{gathered}$$

y así sucesivamente.

Si únicamente se consideran los coeficientes numéricos de las expresiones anteriores, se tiene un arreglo conocido como *triángulo de Pascal*:

Figura 4.3 Triángulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & \qquad & (a + b)^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & (a + b)^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & (a + b)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & (a + b)^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & (a + b)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & (a + b)^5
\end{array}$$

En general, las propiedades del desarrollo binomial son:

1. Existen $n + 1$ términos en el desarrollo.
2. La suma de los exponentes de a y b en cualquier término es n. El exponente de a disminuye en una unidad, y el exponente de b aumenta en una unidad de un término al siguiente.
3. El primer término en el desarrollo es:

$$a^n \text{ o lo que es igual } \binom{n}{0} a^n b^0$$

El segundo término es:

$$\frac{n}{1}\ a^{n-1}\,b \text{ o, en forma semejante, } \binom{n}{1} a^{n-1}\,b$$

El tercer término es:

$$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2}\,b^2 \text{ o de igual modo } \binom{n}{2} a^{n-2}\,b^2$$

y así sucesivamente.

El último término es:

$$b^n \text{ o lo que es igual } \binom{n}{n} b^n$$

La fórmula general para cualquier n entero positivo es:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \binom{n}{2} a^{n-2}\,b^2 + \dots$$

$$+ \binom{n}{r} a^{n-r}\,b^r + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Si se introduce la notación de suma:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\,b^i$$

■ Ejemplo 18

Desarrolle: $(a+b)^4$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3\,b + \binom{4}{2} a^2\,b^2 + \binom{4}{3} a\,b^3 + \binom{4}{4} b^4$$

Resumen

Casi todos los métodos no determinísticos están basados en un principio de aritmética elemental y de conocimientos de permutaciones, combinaciones y, en general, de las reglas de conteo.

De acuerdo con este principio, el número total de formas en que dos acciones consecutivas, E_1 y E_2, pueden llevarse a cabo (una acción seguida por la otra), es simplemente el producto del número de formas en que E_1 y E_2 pueden realizarse de manera separada. Definido en forma de regla, este principio de conteo se reduce a dos:

Regla 1. Si la acción E_1 puede llevarse a cabo en n_1 formas, y si la acción E_2 puede realizarse en n_2 formas, entonces su acción conjunta, E_1 seguida por E_2, puede ocurrir en $n_1 \cdot n_2$ formas.

Regla 2. La mayor parte de los cálculos probabilísticos están basados en la suposición de que todas las permutaciones de los resultados son igualmente probables.

Ejercicios

4.1 Un granjero tiene tres campos, cada uno debe ser cultivado, ya sea con maíz o trigo.

a) Construya un diagrama de árbol para representar las maneras en que este experimento puede desarrollarse.
b) Enumere los elementos generados por el diagrama de árbol.

4.2 En un partido de tenis de dos jugadores, uno gana tres de cinco sets; el juego se puede extender a tres, cuatro o cinco sets. Describa, por medio de un diagrama de árbol, los posibles eventos del partido y las probables combinaciones de sets en que puede ganar un jugador.

4.3 Un estudiante intenta ordenar su horario de verano; quiere tomar tres clases durante las horas 8:00, 9:00, 10:00 y 11:00. Las clases en que está interesado se ofrecen como sigue:

8:00	9:00	10:00	11:00
Arte	Música	Química	Música
Inglés	Arte	Matemáticas	Inglés
Matemáticas	Biología		

Las condiciones que el estudiante desea satisfacer en su ordenamiento son:

a) No tomar tres clases consecutivas.
b) No tomar matemáticas y ciencias juntas.
c) No tomar dos ciencias.
d) No acomodar música y arte consecutivas.

Organiza el horario por medio de un diagrama de árbol.

4.4 En un pequeño restaurante del centro hay un letrero que dice: “Si quiere usted comer con variedad, visite este restaurante. Hay más de 200 opciones diferentes todos los días”. Al ver el menú, el comensal encuentra la siguiente lista:

A escoger entre:
Sopa o ensalada.
Tres platillos diferentes.
Dos clases de papas.
Tres diferentes tipos de verduras.
Café, té o leche.
Postre.

¿Cuántos diferentes postres debe ofrecer el restaurante para que el letrero sea verdadero? Entonces, ¿cuál sería el número exacto de diferentes comidas que se tendría ahora?

4.5 En una clase de apreciación de pintura se muestran 10 colores a los estudiantes y se les pide que escojan los cinco que más les gusten y hagan una lista de ellos en el orden de su preferencia. ¿Cuántas listas diferentes se pueden hacer?

4.6 Un químico desea observar el efecto de la temperatura, la presión y la cantidad de catalizador sobre la producción de un compuesto particular por medio de una reacción química. Si en el experimento decide usar dos niveles de temperatura, tres de presión y dos de catalizador, a) ¿cuántos experimentos deben llevarse a cabo de modo que cada combinación temperatura-presión-catalizador se considere una sola vez?, b) realice un diagrama de árbol.

4.7 Una universidad clasifica a sus estudiantes como hombre (H), mujer (M); de primero, segundo, tercero, cuarto año y, por último, si aprueban o no un examen final de conocimientos en cada grado:

a) Dibuje un diagrama de árbol.
b) Encuentre el número de clasificaciones posibles.

4.8 Una agencia ofrece tres diferentes tipos de motores en siete modelos y en 14 colores. ¿Cuántos autos distintos debe tener la agencia para satisfacer al cliente?

4.9 En un robo a un banco, un hombre perceptivo dijo que la matrícula del auto en que los ladrones huyeron era un número de seis dígitos, del cual las dos primeras cifras eran 35. Aunque no recuerda el resto de las demás, está seguro de que los dígitos eran todos diferentes. ¿Cuántas matrículas de auto debe revisar la policía?

4.10 Cierta distribuidora de helados ofrece 32 sabores diferentes. ¿Cuántos helados dobles se pueden escoger si

a) el orden de las bolas de helado es importante?
b) el orden de las bolas de helado no es importante?

4.11 Se quiere saber cuántas matrículas de automóviles pueden formarse si cada una consta de tres dígitos y tres letras:

a) Si no se repiten letras ni números.
b) Se pueden repetir letras y números.
c) Considerando la condición en que primero sean dígitos y después letras, y ambos casos tanto para a) como para b).

Se tomarán en cuenta 26 letras y 10 dígitos (de cero a nueve).

4.12 En un popular juego de lotería, en el que se pueden seleccionar seis números de 51, ¿cuántas combinaciones pueden formarse?

4.13 ¿De cuántas formas pueden colocarse 12 cuentas de diferente color, para formar un collar?

4.14 Considere el problema anterior, si en las 12 cuentas existen tres grupos de diferente color con cuatro cuentas cada uno, ¿cuántos collares diferentes pueden formarse?

4.15 Si se tienen 6 objetos ($n = 6$), calcule todas las combinaciones posibles, cuando $r = 6$, $r = 5$, $r = 4$, $r = 3$, $r = 2$, $r = 1$, $r = 0$.

4.16 Si en una reunión hay siete mujeres y cinco hombres, ¿cuántas parejas (hombre-mujer) se forman?

4.17 En una asociación de solteros, durante un mes se inscribieron 230 hombres y 400 mujeres. ¿Cuántas parejas heterosexuales pueden formarse?

4.18 Quince niños cumplen las condiciones establecidas por un entrenador de futbol y son aceptados por el grupo. ¿Cuántos equipos diferentes de 11 integrantes pueden formarse?

4.19 Un examen está integrado de 10 preguntas y si el estudiante debe escoger seis de ellas, ¿cuántos posibles exámenes pueden formarse?

4.20
a) ¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse con el nombre Nadia?
b) ¿Cuántos con Patricia?
c) ¿Cuántos con Gabriela?
d) ¿Cuántos con Kalimán?
e) ¿Cuántos con Johana?

4.21 Una pareja tiene r hijos y cada uno de éstos tiene r hijos, etcétera.

a) ¿Cuántos bisnietos tendría?
b) Suponga que la pareja inicial y todos sus descendientes continúan vivos y casados, excepto los bisnietos. ¿Cuántos lugares se deben considerar para la cena de Navidad, si todos traen a sus propias familias?
c) ¿Cuál es el tamaño de la familia, si $r = 6$?

PARTE 3

Modelos no determinísticos

> *La felicidad consiste en tener confianza*
> *un uno mismo y en la benevolencia del azar.*
>
> Anónimo

Capítulo 5

Muestreo

Mtra. Yvón Angulo Reyes
Instituto de Investigaciones Sociales, UNAM

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es presentar los aspectos básicos de la teoría del muestreo de manera accesible a los lectores que por primera vez se enfrentan a ella.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Comprender los conceptos básicos del muestreo.
- Realizar una lectura crítica de los diseños metodológicos que involucren la realización de encuestas.
- Diferenciar los diferentes tipos de muestreo.
- Describir las principales características del muestreo probabilístico y del muestreo no probabilístico.
- Enunciar para el caso del muestreo no probabilístico en qué consiste el de juicio, cuotas, y bola de nieve.
- Utilizar el muestreo adecuado para llevar a cabo una investigación, experimento o estudio determinado.
- Discriminar las ventajas y desventajas de los diferentes tipos de muestreo.
- Explicar las bases del muestreo probabilístico.
- Describir el muestreo estratificado y el muestreo por conglomerados.
- Identificar cuándo se debe recurrir al diseño de muestras complejas.
- Implementar muestras complejas.
- Enunciar el teorema central del límite.
- Aplicar el teorema central del límite.

INTRODUCCIÓN

De manera cotidiana se suscita la necesidad de tomar decisiones; como se trata de que sean lo más acertadas posible, se percata de que la información con que se cuenta juega un papel determinante en la toma de decisiones y, por tanto, en su resultado. En algunos casos, esa información será suficiente, pero en otros no, por lo que tendrá que hacerse acopio de información adicional.

Esta situación no es muy distinta cuando se trata de tomar decisiones en otros ámbitos, por ejemplo, el diseño de alguna política, evaluación de la efectividad de algún medicamento, evaluación de una campaña publicitaria o política, efectividad en un tratamiento, calidad en los procesos, estudios de opinión, etc. Al igual que en las decisiones cotidianas, se necesita información, la cual puede ser generada de distintas maneras.

Existen diversas formas de captar la información, la cual depende de los propósitos del estudio. Asimismo, la forma de recabar la información depende de distintos factores, entre los que se encuentran los propósitos con los que se va a utilizar el tipo de información requerida, así como la población a la cual se desea conocer, y los recursos de tiempo y dinero con que se cuente. No está por demás decir que el principal elemento que determina la forma de generar la información es el objetivo para el que se utilizará. Un aspecto más importante de resaltar, es que para los casos referidos, la información será sobre una población específica, la cual conforma nuestro universo o población de estudio.

A manera de introducción se menciona que cuando se tiene la posibilidad de extraer la información de todos y cada uno de los elementos de la población de estudio, se habla de la realización de un censo. En caso contrario, es decir, cuando se toma información de un subconjunto de elementos, más pequeño que la población, entonces se tiene una muestra.

Cuando lo que se desea es contar únicamente con un subconjunto (muestra) de la población a partir de la cual se quiere conocer algo acerca de la población, este subconjunto puede ser seleccionado mediante distintos métodos. Cuando sus elementos son seleccionados de acuerdo con una probabilidad conocida y distinta de cero, se está hablando de un muestreo probabilístico, en caso contrario, será un muestreo no probabilístico.

En este capítulo se abordan estos dos tipos de muestreo, se describen las diferencias entre uno y otro, así como los alcances en cuanto a la información que se genera.

ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

Censo y muestra

Cuando se está ante un problema de investigación que plantee el conocimiento de determinado fenómeno y se requiera generar información para tal fin, en principio existen dos posibilidades. La primera es tomar información de todos y cada uno de los elementos de la población de interés; es decir, realizar un censo; y la segunda, tomar información de una parte, generalmente pequeña, pero representativa de la población de estudio.

Pero, ¿cómo decidir entre realizar un censo o tomar una muestra? Como se mencionó antes, a diferencia de una muestra, en el censo o enumeración completa se recurre a la “medición” de *toda* la población, con lo cual se esperaría obtener información precisa acerca de lo que se desea conocer. Sin embargo, no siempre es conveniente la realización de un censo, contrario a lo que se pudiera pensar de primera impresión. Es decir, no siempre el censo proporciona mejores resultados que la muestra, debido a que, en la práctica, existen algunas situaciones que ocasionan que el censo pueda tener fallas importantes, entonces es más confiable la utilización de una muestra. El tipo de errores comunes a un censo se asocian principalmente con problemas de cobertura, porque suelen ser selectivos, o con problemas de control de calidad en el levantamiento de la información. Situaciones que pudieran ser mejor controladas si se tuviera un menor número de casos.

Otros aspectos que pueden ayudar a decidir entre la elaboración de un censo o una muestra, son los costos en uno y otro caso, así como la rapidez y oportunidad con que se genere la información. En cuanto a los costos y la rapidez, es obvio, al tener que llevar a cabo en la muestra un número menor de mediciones, el costo se reduce y se obtiene con mayor rapidez la información. Por consiguiente, se contará con información más oportuna. Este punto es fundamental cuando lo que se requiere es contar con información para la toma de decisiones, o en fenómenos en los cuales su dinámica implique cambios rápidos que deban ser identificados de manera oportuna.

Para ilustrar lo anterior considere el siguiente ejemplo: suponga que desea conocer el tipo de música preferida por los estudiantes de una universidad. Si se decidiera por un censo, tendría que preguntar a todos y cada uno de los estudiantes de la universidad cuál es su música predilecta. Bajo estas circunstancias, el resultado que obtendría sería un listado “exacto” y “exhaustivo” de la música que les gusta a todos los estudiantes.

El hecho de realizar el censo en la universidad implica que debe interrogar a todos y cada uno de los estudiantes inscritos en el momento del censo. Lo que contempla la búsqueda y entrevista de quienes no asistieron o estén ausentes por cualquier otro motivo (intercambios, permisos, etc.). Puesto que se trata de un censo, se tendría que buscar y entrevistar a todos independientemente del lugar o situación en la que se encuentren,[†] lo cual tendría implicaciones en cuanto a costos y tiempo.

Por otro lado, si se decide por preguntarle sólo a una muestra representativa, el número de casos que debe buscar fuera de la universidad, porque no asistieron, disminuye considerablemente.

Población objetivo

Una tarea importante en el proceso de investigación es la definición clara y concreta de la población objetivo. Se entiende como población objetivo la conformada por los elementos que cumplan con determinadas características en un tiempo y espacio. Por tanto, un primer paso para llegar a la población objetivo es definir de manera clara y exhaustiva las características de los elementos que harán identificar a aquellos que pertenecen a la población objetivo y a los que no.

Si se retoma el ejemplo de los universitarios. La población objetivo estará conformada por todos y cada uno de los estudiantes inscritos durante el presente ciclo escolar. De igual manera, si únicamente se desean conocer los gustos musicales de los de nuevo ingreso, entonces la población objetivo estará constituida por todos aquellos estudiantes inscritos al primer año durante el actual ciclo escolar.

En algunas ocasiones, por diversos motivos, no es posible acceder de manera completa a la población objetivo, por tanto, se tendrá que hacer referencia a la llamada población investigada.

[†] Este ejercicio se plantea con el supuesto de que la entrevista tendría que ser cara a cara. ¿De qué otra manera pudiera ser? En una población que de cierta manera puede considerarse como “cautiva”, donde es posible tener cierto control de todos sus integrantes, se cuenta con otras alternativas, por ejemplo, las encuestas vía correo electrónico, lo cual disminuye costos y en algunos casos tiempo.

Marco de muestreo

En la medida en que se tenga bien definida la población objetivo, se podrá contar con un listado que contenga todos los elementos que la integran. A este listado se le conoce como marco de muestreo.

Para el ejercicio que se ha venido siguiendo, el marco de muestreo estará conformado por los nombres de todos y cada uno de los estudiantes de la universidad o los inscritos al primer año, durante el presente ciclo escolar, según sea el caso.

Por tanto, un marco de muestreo será el medio físico a partir del cual pueden identificarse de manera directa o indirecta todos los elementos de la población (Méndez, Eslava; 2004).

En términos ideales se esperaría que el marco de muestreo coincidiera con la población objetivo; sin embargo, esto no siempre ocurre. Es decir, puede suceder que el marco contenga elementos que no sean considerados como parte de la población, o que no contenga todos los que interesan.

La primera situación no representa problema alguno, ya que a partir del marco que contenga toda la información, puede extraerse un listado de todos los que en realidad conforman la población objetivo. Si retoma el caso de los universitarios, podría suceder que como marco se cuente con el listado de todos los inscritos durante el ciclo escolar, y los que interesan son únicamente los de primer ingreso. Entonces, lo que tendría que hacer es extraer del listado de todos los inscritos uno que incluya únicamente a los de recién ingreso.

A diferencia del escenario anterior, se tiene un problema más complicado cuando el marco no contiene a todos los elementos de la población. Ante esta situación existen dos posibilidades, la primera es intentar complementar la información del marco con otras fuentes de información, con otros marcos. En caso de que esto no sea posible, entonces se tendrá que reconocer este problema como una limitación importante y redefinir la población objetivo.

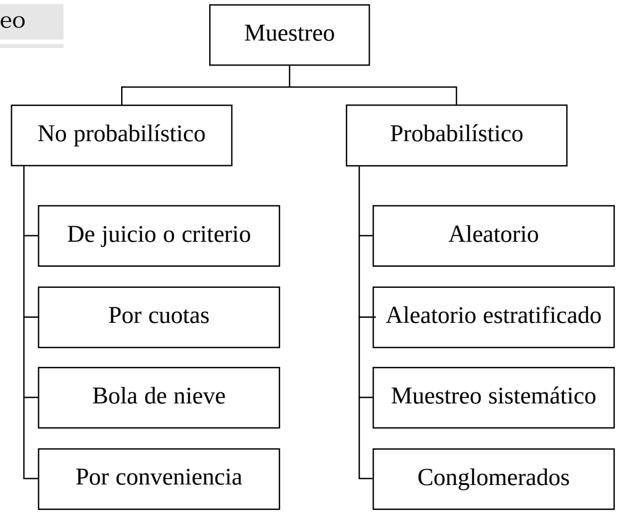
De nuevo considere el ejemplo de los universitarios. Suponga que en la universidad se cuenta con sistemas escolarizado y abierto, y que el registro de las inscripciones se realiza por separado. Si lo que desea es conocer el gusto musical de todos los inscritos durante el ciclo escolar, entonces, si se toma únicamente el marco de los inscritos en el sistema escolarizado, la información sólo estará haciendo referencia a este grupo, por lo que para considerar a todos, también tendrá que tomarse en cuenta el marco de los inscritos en el sistema abierto. De esta manera se contará con dos marcos complementarios que cubren a toda la población, sin que existan traslapes.

TIPOS DE MUESTREO

Existen diferentes formas para tomar una muestra, la elección entre una u otra depende de los propósitos para los que se utilizará la información, el conocimiento previo del fenómeno de estudio, así como los recursos con los que se cuente.

De manera general se distingue entre dos tipos de muestreo, los no probabilísticos y los probabilísticos. Cuando se extrae una muestra en donde todos y cada uno de los elementos del marco muestral cuentan con probabilidad de selección distinta de cero, entonces se trata de un muestreo probabilístico, en caso contrario, se tratará de muestreo no probabilístico. Entre los no probabilísticos se cuentan el de juicio, por cuotas, bola de nieve y por conveniencia; en tanto que los probabilísticos son el aleatorio simple, aleatorio estratificado, sistemático, por conglomerados, y las posibles combinaciones que puedan realizarse entre éstos.

Figura 5.1 Tipos de muestreo



¿Cuáles son las ventajas de un muestreo probabilístico y uno no probabilístico? y, por tanto, ¿cuándo es conveniente utilizar uno y cuándo el otro? La respuesta depende de una serie de factores que serán abordados en los siguientes apartados.

El muestreo probabilístico consiste en tomar una muestra de manera aleatoria a partir de un marco muestral, en donde todos y cada uno de los elementos del marco tienen una probabilidad conocida y distinta de cero de salir en muestra. La selección de la muestra se realiza con base en fundamentos de la teoría de probabilidad, lo cual permite hacer una evaluación objetiva de los resultados y, por ende, se está en posibilidad de conocer el grado de precisión y confianza de los mismos. Por tanto, en el muestreo probabilístico, una vez definida la población de estudio, configurado el marco de muestreo y definida la forma de selección, la conformación de la muestra no depende de los criterios selectivos o preferencias del investigador.

A diferencia del muestreo probabilístico, en el no probabilístico la conformación de la muestra depende en gran medida de los "criterios" del investigador, entonces, no hay una manera objetiva de asignar probabilidades de selección a los elementos del marco de muestreo, en caso de que se conozca. Este último punto es importante, porque en algunas ocasiones, aunque quisiera utilizarse un muestreo probabilístico, no se lograría por la imposibilidad de contar con un marco muestral, así, se recurre a un muestreo no probabilístico.

En resumen, en general puede decirse que se recomienda el uso del muestreo probabilístico cuando se desea conocer de manera objetiva la precisión y confianza de los resultados obtenidos, para lo que deberá contar con marco de muestreo confiable. En tanto que si lo que se desea es obtener información de cierta población para la cual es difícil contar con un listado confiable, o únicamente se desea conocer información de manera exploratoria, el método de muestreo que se utilizará será uno no probabilístico. En este caso, le toca al investigador argumentar la representatividad de la muestra, la cual dependerá en gran medida del objetivo de la investigación.

MUESTREO NO PROBABILÍSTICO

En el muestreo no probabilístico, la representatividad de la muestra depende de criterios no probabilísticos, es decir, la inclusión o no de un elemento en la muestra se determina en gran medida por el criterio de los investigadores y, en algunos casos, de los propios entrevistadores y no de un proceso aleatorio, por lo que no se está en posibilidades de conocer las probabilidades de inclusión en muestra de cada uno de los elementos de la población objetivo.

Por otro lado, a partir de la definición general, anteriormente mencionada, en la que se considera que un muestreo probabilístico requiere de un marco muestral para conocer la probabilidad de selección de cada uno de los elementos que conformarán la muestra, para el caso del muestreo no probabilístico, este no es un requisito.

De juicio

La característica principal de este tipo de muestreo es que tanto el tamaño de muestra como la elección de los elementos están sujetos al juicio del investigador, esto es, para realizar un estudio mediante este tipo de muestreo debe recurrirse a la experiencia que se tenga. Es decir, la muestra se forma con los elementos que el investigador considera (según su juicio) que son los más representativos de la población que va a estudiar.

El juicio del investigador se rige por el conocimiento y experiencia que tenga sobre el tema. Por consiguiente, el éxito y la eficacia de la muestra dependen de la opinión del investigador que haya seleccionado los elementos. En virtud de que el conocimiento y experiencia dependen de la persona que realiza el muestreo, entonces, la muestra estará sujeta a estas características. Esta subjetividad en la selección de los elementos de la muestra es lo que hace que se clasifique como un muestreo no probabilístico.

Existen muchas situaciones en las que el muestreo de juicio es útil y aun aconsejable. Un caso puede ser cuando es muy complicado contar con un marco de muestreo confiable que permita obtener una muestra probabilística. Por ejemplo, suponga que desea hacer un estudio acerca de la opinión de los líderes de organizaciones sociales informales acerca de la situación política del país. Es difícil que exista un listado completo de todos estos líderes, y armarlo resultaría muy costoso, en cuanto a tiempo y recursos económicos. Por consiguiente, una opción en este caso es que el investigador realice un listado de los líderes “más representativos” que él considere que deben ser encuestados.

Por cuotas

Para el caso del muestreo por cuotas, al igual que las muestras generadas por muestreo de juicio, tampoco son probabilísticas. Sin embargo, el muestreo por cuotas permite obtener muestras representativas en cuanto a la distribución de algunas variables relevantes de la población.

Esta representatividad se basa principalmente en la obtención de un número específico de casos, de acuerdo con las variables que se consideren más relevantes. Sin embargo, al igual que en el muestreo de juicio, la selección de los elementos de la muestra no es probabilística, como se verá a continuación.

El procedimiento general del muestreo por cuotas es el siguiente:

1. Variables relevantes. Un primer paso es identificar las variables que van a permitir asignar cuotas. Estas variables se definen de acuerdo con la importancia o la posible influencia que pudieran tener sobre el fenómeno que está estudiándose (por ejemplo, sexo, escolaridad, edad, ingreso, etcétera).
2. Recabar información sobre la distribución de las variables relevantes para la población objetivo. Con esta información se asigna el número de casos de acuerdo con la distribución porcentual de dichas variables.

3. Asignar a cada entrevistador el número de cuestionarios a aplicar, así como la distribución de los mismos de acuerdo con las variables relevantes.

En este último, donde se realiza el proceso de selección[†] de los entrevistados, es donde se introduce el sesgo de los entrevistadores, ya que ellos deciden a quién entrevistar y no hay manera de saber la probabilidad de selección de cada uno de los incluidos en muestra.

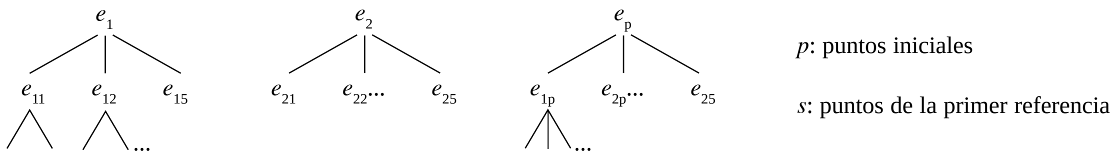
Bola de nieve

Al igual que en los casos anteriores, cuando no se cuenta con un marco de muestreo confiable o cuando es muy difícil contactar a la población objetivo, es recomendable un muestreo por bola de nieve.

El muestreo de bola de nieve involucra los siguientes pasos:

1. Definición de la población objetivo.
2. Elección de uno o varios elementos para el inicio del levantamiento.[††] En este punto es donde se define, directa (consciente) o indirectamente (inconscientemente), la composición final de la muestra.
3. A cada uno de los elementos encuestados se le solicitará referencia de otro u otros elementos que cumplan con las características de la población objetivo. Estas referencias serán los siguientes integrantes de la muestra. Y así sucesivamente, hasta un determinado número de referencias o hasta que de acuerdo con los criterios del investigador, se cuente con la información suficiente. En consecuencia con este procedimiento, la composición de la muestra se conocerá hasta el final.

Figura 5.2 Esquema general del muestreo por bola de nieve



Como se puede apreciar a partir de la descripción anterior, si bien la selección de los primeros contactos puede ser hecha a partir de métodos probabilísticos, en caso de que se cuente con un marco de muestreo, la inclusión de los siguientes elementos ya no será probabilística, pues depende de que hayan sido mencionados por los primeros. Es decir, este tipo de muestreo se considera no probabilístico debido a que al ir constituyendo la muestra a partir de referencias de encuestados, no se tiene manera de conocer la probabilidad de selección de todos los elementos de la población; más aún, puede ocurrir que no todos los elementos de la población tengan posibilidad de quedar incluidos en la muestra, debido a que quizá no tengan relación alguna con los puntos de inicio o con los mencionados en referencias posteriores (es decir, que se trate de puntos aislados).

[†] Más que una selección es una elección de personas a encuestar.

[††] En algunos estudios estos puntos de inicio se seleccionan en forma aleatoria, con la finalidad de evitar la introducción de sesgos por parte de los investigadores y darle cierta objetividad a la muestra.

■ Ejemplo 1

Suponga que busca realizar un estudio de la opinión que tienen los empresarios acerca de la aprobación de determinada ley arancelaria. A primera vista puede decirse que, aunque es complicado, se podría contar con un marco de muestreo confiable, lo cual sería de gran ayuda. Sin embargo, por otro lado, se percata de que es complicado hacer contacto con los empresarios. Por tanto, un muestreo por bola de nieve es recomendable, ya que únicamente se tendrá que garantizar el contacto con un número reducido de empresarios, los cuales remitirán con empresarios conocidos por éstos, lo que facilitará su inclusión en la muestra para conformar la muestra final.

Por conveniencia

Cuando una muestra está conformada únicamente por elementos disponibles o con los más dispuestos, entonces se trata de una muestra por conveniencia. A diferencia del muestreo de juicio, en el que se buscan elementos que a juicio del investigador sean los convenientes, una muestra por conveniencia estará constituida por los que se "tengan a la mano".

Obvio, este tipo de muestreo tiene muchas ventajas prácticas; sin embargo, sus resultados sólo harán referencia a los que fueron entrevistados y no a un grupo más grande.

A pesar de esto, el muestreo por conveniencia tiene aplicaciones importantes, por ejemplo en estudios de mercado en los cuales se desee realizar la evaluación de un producto, o cuando se quiere llevar a prueba el diseño de algún cuestionario (prueba piloto en una encuesta), etcétera.

MUESTREO PROBABILÍSTICO

Parta de que el objetivo básico del muestreo probabilístico es entender el comportamiento de determinado fenómeno, así como el grado de precisión con que se conoce, es decir, se desea estimar lo mejor posible el valor de una determinada variable y conocer la magnitud del posible error que esté cometiéndose.

Por tanto, cuando sea necesario contar con el grado de representatividad de una muestra, así como con los errores de muestreo, es recomendable el uso de un muestreo probabilístico.

Pero, ¿qué implica un muestreo probabilístico? Básicamente el conocimiento de las probabilidades de selección (de estar en la muestra) de cada uno de los elementos de la población objetivo y, por ende, que sea posible conocer las probabilidades de selección de todas y cada una de las posibles muestras que se puedan tomar de la población.[†] Este hecho es el que da sustento al muestreo probabilístico, ya que a partir de dicha distribución muestral será posible aplicar las leyes de probabilidad en dicho espacio y, por tanto, calcular los estimadores deseados con sus respectivos niveles de confianza y errores de muestreo.

Si bien la aplicación de un muestreo probabilístico requiere el cumplimiento de ciertos requisitos, existen ventajas considerables para su uso en determinadas circunstancias; por ejemplo, el hecho de conocer la precisión con que están obteniéndose los resultados disminuye la posibilidad de tomar decisiones equivocadas.

[†] Al conjunto de todas estas posibles muestras es lo que se conoce como espacio muestral y su distribución como distribución muestral.

FUNDAMENTOS DE MUESTREO PROBABILÍSTICO

Conceptos básicos

Como se mencionó en secciones anteriores, el objetivo del muestreo es estimar los parámetros desconocidos de una población a partir de una muestra. Considere una población en la cual los valores de la variable de estudio están representados por X_i, un parámetro se define como una función que resume los valores de esta variable[†] en el total de la población.

Por ejemplo, si se considera como variable de estudio (X), la edad de las personas que asisten a un determinado evento. Entonces un parámetro será la edad promedio de todos los asistentes.

Cuando lo que se tiene es un valor calculado (estimado) a partir de los valores de una muestra, entonces de lo que se trata es de un estimador[††] del parámetro poblacional. Para el ejemplo anterior, si la edad de los asistentes se calcula a partir de una muestra, entonces se tendrá una estimación de la edad promedio de los asistentes.

Dos situaciones importantes se desprenden de lo anterior. La primera, que lo deseable es que el estimador fuera lo más parecido al parámetro, y la segunda es que así como se tomó una muestra para estimar el parámetro, bien pudo haberse sacado otra muestra en otros integrantes que proporcionaran otra información y, por tanto, un valor del estimador diferente.

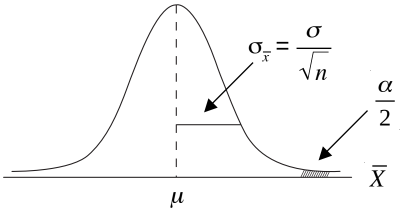
En el primer punto, a lo que está haciéndose referencia es a la precisión con que se desea estimar un parámetro, es decir, qué tan alejado está el estimador del parámetro. En tanto que el segundo punto se refiere a la posibilidad de tener más de una muestra y, entonces, más de una estimación del parámetro. Como cada muestra estará integrada por elementos distintos, es de suponer que algunas estimaciones sean más precisas que otras, es decir, que estén más cercanas al parámetro.

A la distribución de los valores de los estimadores de todas las muestras posibles de tamaño n se le conoce como distribución muestral. Es decir, a partir de cada n (tamaño de muestra) dado, se podrán obtener tantas estimaciones del parámetro como combinaciones posibles de muestras distintas de tamaño n sea posible extraer, las cuales generarán una distribución muestral para cada n.

Lo que menciona el Teorema central del límite[†††] es que a medida que el tamaño de las muestras se va incrementando (es decir, que n vaya siendo más grande), la distribución de la media (distribución muestral) tiende a tener distribución normal, sin que la distribución de la variable que se mide tenga necesariamente distribución normal en la población.

Por tanto, si se tiene un tamaño de muestra n fijo, la distribución muestral del promedio tendrá la siguiente representación.

Figura 5.3 Distribución muestral del promedio



[†] Ejemplos de medidas son la media, el total, la proporción, varianza, etcétera.

[††] Un estimador puede ser sesgado o insesgado, consistente o no.

[†††] Teorema fundamental en estadística.

En donde μ es el valor del parámetro en la población y el resto de los valores son las estimaciones calculadas a partir de cada una de las muestras posibles ($\bar{X}$), las cuales se encuentran alrededor de μ y se van concentrando más a medida que n aumenta, ya que $\bar{X}$ se distribuye como una normal con parámetros (μ, $\sigma^2_{\bar{X}}$), donde $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$ y $\sigma_{\bar{X}}$ es la desviación estándar de la distribución muestral, conocido como error estándar de la distribución de $\bar{X}$.

Si se retoma la idea de utilizar el muestreo probabilístico para obtener una estimación del parámetro lo más cercano posible, esto con probabilidad de ocurrencia alta, lo anterior se puede poner en los siguientes términos.

$$P\ (\mu - d \le \bar{X} \le \mu + d) = 1 - \alpha \tag{I}$$

es decir, lo que se desea es que la estimación de la media se encuentre alejada al parámetro en, a lo más, d, con una probabilidad de (1 – α). Al valor d se le conoce como precisión o error de estimación, en tanto que (1 – α) es la confianza con la que esperamos que ocurra esta precisión.

Por tanto, dado que $\bar{X}$ se distribuye como una normal $\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$, si lo que se quiere es que el estimador cumpla (I) con una confianza del 95%, es decir,

$$P(\mu - d \le \bar{X} \le \mu + d) = 0.05 \tag{II}$$

como

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma^2}{n}},\ Z \sim N(0,1)$$

entonces (II) es equivalente a

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.05$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma^2}{n}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.05$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

En consecuencia

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{d}$$

de donde,

$$n = Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{d^2} ,$$

y para el caso específico de 95% de confianza,

$$n = 1.96^2 \frac{\sigma^2}{d^2}$$

Por ende, éste será el tamaño de muestra necesario para tener estimaciones con una precisión d, y confianza $(1 - \alpha)$ con varianza conocida.[†] El caso que acaba de esbozarse hace referencia a un tamaño de muestra cuando se desea estimar la media poblacional. Por otra parte, se ve que el tamaño de la muestra depende directamente de la variación del fenómeno estudiado.

Sin embargo, este resultado puede ser extendido para el caso en que se desea estimar una proporción poblacional, como caso particular de la media.

Por consiguiente, el cálculo del tamaño de muestra para estimar una proporción con determinada precisión y confianza, se realizará como:

$$n = Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \frac{pq}{d^2} \text{ , dado que } \sigma^2 = pq$$

donde para el cálculo se utilizarán igualmente estimaciones de p y q.

■ Ejemplo 2

Calcular el tamaño de muestra, necesario para estimar la proporción de personas que participan en alguna organización formal, esto con un nivel de confianza de 95% y errores de estimación no mayores a 3 puntos porcentuales. Además, se sabe que en una encuesta anterior se encontró que sólo 25% de la población pertenecía a alguna organización. Entonces:

$$n = \frac{1.96^2(0.25)(0.75)}{0.03^2}$$

$$n = 801 \text{ casos}$$

En caso de que no se tuviese una estimación anterior de la proporción, se podría utilizar como valor de p, 0.5, con lo que se obtendría un tamaño de muestra de 1068 casos, y errores de estimación conservadores.

El cálculo del tamaño de la muestra anterior se realizó con el supuesto de que las muestras serían extraídas en forma probabilística. A continuación, se abordarán distintas maneras en que pueden ser extraídas estas muestras probabilísticas, dependiendo de la información con la que se cuente y el propósito que se tenga, así como para lo que se deseen obtener las estimaciones.

[†] Cuando no se conoce la varianza será posible reunir estimaciones de estudios anteriores u obtener una aproximación a partir de una prueba piloto, $\frac{n}{N} < 0.1$ poblaciones infinitas.

El diseño de la muestra consiste en la descripción de la forma en que se tomarán los elementos de la población para integrar la muestra, su tamaño, así como la manera en que se calcularán los estimadores. En los siguientes apartados se abordan los diseños básicos de muestreo, se describen la forma de selección de la muestra y la forma de sus estimadores.

Muestreo aleatorio simple

El muestreo aleatorio simple o muestreo irrestricto aleatorio forma la base de la mayor parte de los diseños de muestreo, así como de las encuestas científicas que se llevan a la práctica. El muestreo aleatorio simple es el más sencillo de los métodos probabilísticos, que permite obtener estimaciones de alguna característica de la población, así como una medida de la confianza y error de las estimaciones hechas. Según Scheaffer: “Si un tamaño de muestra n es seleccionado de una población de tamaño N, de tal manera que cada muestra posible de tamaño n tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, el procedimiento de muestreo se denomina irrestricto aleatorio. A la muestra así obtenida se le llama muestra irrestricta aleatoria”.[†]

Selección de una muestra irrestricta aleatoria (*mia*)

Un método al que se acude para la selección de una muestra irrestricta aleatoria (*mia*) es a través del uso de tablas de números aleatorios. Una de estas tablas consiste en arreglos de números formados a partir de los enteros de 0 a 9, en proporciones aproximadamente iguales, sin tendencias en el patrón en que se generaron los dígitos. Por consiguiente, para contar con una *mia* bastará con tomar de manera aleatoria un conjunto de puntos de la tabla, con la seguridad de que los puntos seleccionados tuvieron la misma probabilidad de salir, que los no seleccionados, puesto que todos fueron generados de manera independiente y con la misma probabilidad de selección. Actualmente, debido a consideraciones prácticas, en una computadora se puede simular este procedimiento para generar las tablas de números aleatorios.

Uso de la tabla de números aleatorios

Para ejemplificar el uso de la tabla de números aleatorios, suponga que en una escuela desea modificar el plan de estudios si en dicha escuela hay un grupo de 40 profesores y desea obtener una muestra de 4 para conocer su opinión acerca de dicha modificación.

Paso 1. Se enumera a los profesores del 1 al 40; en la tabla de números aleatorios, los dígitos se escogerán de dos en dos, porque el tamaño de la población es $N = 40$ (número de dos dígitos).

Paso 2. Para dar inicio a la selección de los cuatro profesores, en la tabla de números aleatorios se toman en forma arbitraria una columna y un renglón; suponga que se seleccionan el reglón 60 y la columna 4 y se leen los pares de dígitos en las columnas 4 y 5, lo que da 13, 02, 18, 74, 59, 13, 74, 33; se omiten tanto los números mayores de 40 como los números repetidos.

Cualquier punto de inicio puede ser usado y uno puede moverse en cualquier dirección predeterminada, siguiendo siempre el mismo patrón de movimiento. Si va a utilizarse más de una muestra en cualquier problema, cada una debe tener su propio punto de inicio.

[†] Sheaffer Richard, L., *Elementos de muestreo*, Iberoamérica, México, 1991.

Paso 3. Se continúan leyendo los pares de dígitos hasta que se obtienen cuatro unidades diferentes, es decir, 13, 02, 18, 33. Cada uno de estos números tiene relacionado el nombre de algún profesor, el cual formará parte de la muestra de cuatro profesores seleccionados.

El método anterior deja de ser práctico cuando el número de personas que se quiere seleccionar es muy grande, por lo que es de utilidad el empleo de paquetes estadísticos u hojas de cálculo para la selección de una muestra irrestricta aleatoria.

Tamaño de muestra para una *mia*

La fórmula para el tamaño de muestra de un muestreo irrestricto aleatorio es la siguiente:

$$n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{d^2}$$

De acuerdo con la expresión anterior, pareciera que el tamaño de muestra es independiente del tamaño de la población, lo cual llevaría a algunas contradicciones. Por ejemplo, cuando se tienen poblaciones relativamente pequeñas, resulta que el tamaño de muestra es mayor que la población.

■ Ejemplo 3

A partir del ejemplo en el que se estimó la proporción de personas que participan en alguna organización social, con una confianza del 95% u error de estimación no mayor a 3 puntos porcentuales, calcular el tamaño de muestra necesario para estimar la proporción en una población de tamaño $N = 300$.

Como se vio en el ejemplo mencionado, el tamaño de muestra necesario es

$$n = \frac{1.96^2(0.25)(0.75)}{0.03^2}$$

$$n = 801 \text{ casos}$$

El tamaño de muestra es casi más del doble de la población total. Este hecho es consecuencia de un supuesto (no mencionado) que se realizó al momento de la deducción de la fórmula y es que están suponiéndose poblaciones infinitas,[†] por lo que el tamaño de la población no afecta. Pero cuando este supuesto no se cumple tiene que realizarse una corrección “por finitud”, la cual implica, *a grosso modo*, la relativización del tamaño de muestra al tamaño de la población. La corrección que debe realizarse es la siguiente:

$$n = \frac{n'}{1 + \frac{n'}{N}}$$

[†] Este supuesto se hace en el momento del cálculo de la varianza de la muestra.

Por tanto, el tamaño de muestra para el ejemplo anterior será de

$$n = \frac{881}{1 + \frac{881}{300}}$$

$$n = 224 \text{ casos}$$

Es decir, poco más de dos terceras partes de la población total estarán incluidas en la muestra.

Estimadores para una *mia*

Como se ha mencionado a lo largo del capítulo, el objetivo de una encuesta por muestreo es tratar de determinar (estimar), a partir de un subconjunto de la población total, algunos valores poblacionales (parámetros) que permitan conocer a la población en la medida de lo posible.

Entre los parámetros básicos que ayudan a esta caracterización se encuentran la media o proporción, el total poblacional, la varianza de estos parámetros y los intervalos de confianza.

Estimador de la media poblacional

Parta de un ejemplo. Suponga que recién se realizó una encuesta sobre la percepción que tienen las personas de 18 años en adelante acerca de si la constitución es adecuada para el país o no,[†] y que se seleccionó una muestra aleatoria de tamaño 600 de una población total de 10 000. A partir de esta información, ¿cuál es el valor estimado de la proporción de población que está a favor de que la constitución es adecuada y cuáles son sus errores de estimación?

$$N = 10\,000$$

$$n = 600 \text{ casos seleccionados de manera aleatoria}$$

A partir de la muestra se encontró que 400 de las 600 personas mencionaron estar de acuerdo con que la constitución es adecuada para las necesidades del país.

Por tanto, una estimación del parámetro poblacional de las personas que están a favor, viene dado por:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = p$$

donde x_i es el valor observado del i-ésimo elemento de la muestra. Por consiguiente, para el caso de este ejercicio se tiene que en 400 de las 600 observaciones $x = 1$, y en 200 $x = 0$. Así,

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{600} = \frac{400}{600} = 0.666$$

[†] Encuesta del Instituto de Investigaciones Jurídicas. Para este caso en particular fue supuesto un tamaño de población mucho menor al real.

y la varianza estimada de p es:

$$V(p)=\frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)=\frac{pq}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

aplicando los valores del ejercicio se tiene

$$V(p)=\frac{(0.66)(0.34)}{600}\left(\frac{10\ 000-600}{10\ 000}\right)$$

$$V(p) = 0.00037037(0.94)$$

$$V(p) = 0.000348148$$

y el intervalo de confianza alrededor de p sería,

$$p \pm 1.96\sqrt{0.000348148}$$

$$p \pm 1.96(0.018658728)$$

$$p\ \pm\ 0.03657,\ \text{es decir,}\ \ 0.667\ \pm\ 0.03657$$

¿Qué se puede decir de los resultados anteriores? Con la muestra de 600 casos obtenida con una muestra irrestricta aleatoria, se estima que aproximadamente el 66.6% de la población está de acuerdo con que la constitución es adecuada. Este dato por sí solo no da información de qué tan confiable es la estimación, para esto se toma el intervalo de confianza

$$(0.630097, 0.703237)$$

es decir, con una confianza del 95% espera que la verdadera proporción (valor poblacional) se encuentre entre los anteriores dos valores, o lo que es lo mismo, que con 95% de confianza la estimación realizada estará alejada del valor poblacional en, a lo sumo, 0.03657 puntos.

Puesto en porcentajes, con 95% de confianza, la estimación que se realizó, de acuerdo con la cual 66.7% de las personas está a favor de que la constitución es adecuada, estará alejada del parámetro (verdadero valor poblacional), en, a lo más, 3.68 puntos porcentuales.

Para el caso de la varianza estimada de la media, se tiene:

$$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

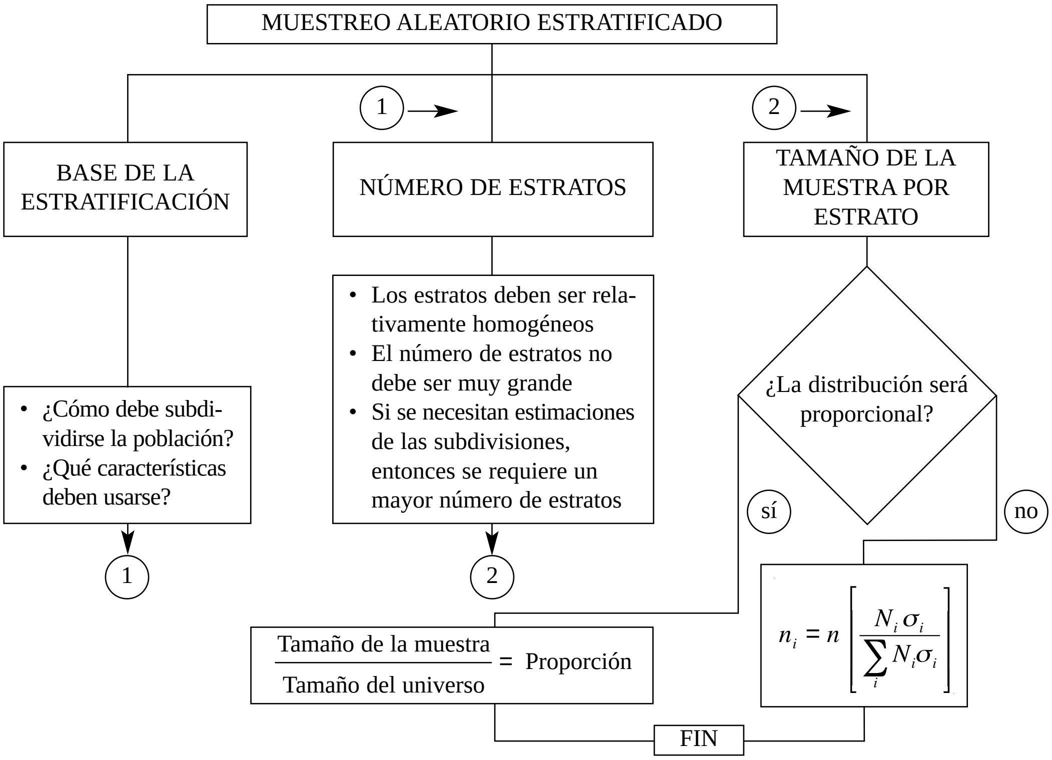
en donde σ^2 se estima como

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\overline{X})^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{X}^2}{n-1}$$

Muestreo aleatorio estratificado

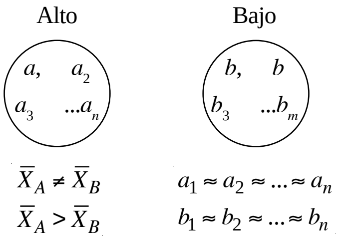
Básicamente, el muestreo estratificado consiste en aprovechar las características de la población para tener estimaciones más precisas. Es decir, la aplicación de un muestreo estratificado supone el conocimiento (o sospecha), por parte del investigador, del comportamiento de algunas características de la población con relación al tema que está investigándose.

Figura 5.4 Ejemplo de muestreo aleatorio estratificado



Por ejemplo, admita que desea saber el promedio de videojuegos que los niños de entre 6 y 10 años de una escuela conocen. Es claro que la variable de interés, número de videojuegos conocidos, está estrechamente relacionada con el nivel socioeconómico de la familia del niño. Es decir, se esperaría que un niño de familia del estrato socioeconómico alto conociera un mayor número de videojuegos que un niño de estrato bajo y que, a su vez, el número de videojuegos que conocen los niños del estrato alto fuera muy similar. Puesto en términos más formales, lo que se tiene son dos estratos (subconjuntos) muy diferentes entre sí (estrato socioeconómico alto y bajo), pero con integrantes muy similares.

Figura 5.5 Muestreo aleatorio estratificado



En situaciones como la anterior, es recomendable el empleo del muestreo estratificado, con lo que se esperaría tener mayor precisión en las estimaciones, además de que existe la posibilidad de hacer estimaciones por separado para cada uno de estos grupos (estratos) si el tamaño de muestra en cada estrato permite tener precisión (*d*) aceptable.

En resumen, el muestreo aleatorio estratificado consiste en, primero, identificar una o algunas variables de estratificación. Esta variable debe hacer referencia a determinada característica de la población que esté correlacionada con la variable de estudio y ser capaz de identificar subgrupos heterogéneos entre sí y homogéneos al interior; segundo, en cada uno de estos estratos, seleccionar de manera aleatoria una muestra de tamaño n_i, que es el tamaño de muestra de cada uno de los estratos.† Y por último, una vez que se cuente con información de los estratos se procederá a realizar las estimaciones.

Estimaciones de proporciones

Para el caso del ejemplo anterior, se tienen dos estratos: estratos socioeconómicos alto y bajo. Cada uno de ellos con N_i niños, es decir, el estrato socioeconómico alto con N_1 niños y el estrato bajo con N_2 niños, de manera que $N_1 + N_2 = N$, donde N es el total de niños de entre 6 y 10 años en la escuela.

Para cada uno de los estratos se asignó n_i niños como tamaño de muestra, $n_i = 15$ niños para el estrato socioeconómico alto y $n_2 = 25$ para el bajo, de manera que $n_i + n_2 = n$, con el tamaño total de la muestra n, necesario para obtener estimaciones del *mae* (muestreo aleatorio estratificado).

Por tanto, si supone que

N = 180 niños de entre 6 y 10 años
$N_1 = 70$
$N_2 = 110$

y que se asignó un tamaño de muestra para cada estrato de $n_1 = 15$ y $n_2 = 25$, a partir de los cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

Estrato 1 (alto)					Estrato 2 (bajo)				
10	7	11	9	12	4	7	5	3	6
9	10	12	11	9	8	5	3	6	4
13	12	10	9	11	4	6	5	5	4
					3	6	5	3	4
					6	7	4	5	7

Estimar el número de videojuegos que conocen en promedio los niños de 6 a 10 años en una determinada escuela.

El número promedio estimado de videojuegos está dado por

$$\bar{x}_{st} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} N_i \, \bar{x}_i \quad \text{en donde}$$

---

† Existen diferentes formas de determinar el valor de n_i, más adelante son abordadas algunas de ellas.

$\bar{x}_i$ es el promedio de videojuegos que los niños conocen en cada uno de los estratos i.

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i}{n_1} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_i}{n_2}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_i = 155 \qquad \sum_{i=1}^{n_2} x_i = 125$$

$$n_1 = 15 \qquad n_2 = 25$$

de donde

$$\bar{x}_1 = 10.33 \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = 5.0$$

En consecuencia

$$\bar{x}_{st} = \frac{1}{180}\left[(70)(10.33) + (110)(5.0)\right]$$

$$\bar{x}_{st} = 7.07$$

Es decir, los niños de entre 6 y 10 años de cierta escuela, conocen en promedio 7.07 videojuegos. Para completar esta información, se calculará el intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$\bar{x}_{st} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\bar{x}_{st})}$$

en donde

$$V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{L} N_i^2 \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right) \frac{s_i^2}{n_i}$$

para el ejercicio anterior

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i^2)^2}{n_i - 1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n_i \bar{x}_i^2}{n_i - 1}$$

$$s_1^2 = \frac{1637 - 15(10.33)^2}{15 - 1} \quad \text{y} \quad s_2^2 = \frac{673 - 25(5)^2}{25 - 1}$$

$$s_1^2 = 2.5976 \qquad s_2^2 = 2$$

de donde, sustituyendo estos valores en $V(\bar{x}_{xt})$ se tiene

$$V(\bar{x}_{st})=\frac{1}{180^2}\left[70^2\left(1-\frac{15}{70}\right)\frac{2.5976}{15}+110^2\left(1-\frac{25}{110}\right)\frac{2}{25}\right]$$

$$V(\bar{x}_{st})=\frac{1}{180^2}(1414.7173)$$

$$V(\bar{x}_{st})=0.043664114$$

Por ende, el intervalo de confianza alrededor de $\bar{x}_{st}$ es

$$7.07\pm 1.96\sqrt{0.04366411}$$

$$7.07\pm 0.4095608$$

es decir, el verdadero valor del promedio de videojuegos que conocen los niños está entre 6.66 y 7.48, con un 95% de confianza.

Si se hubiera utilizado una *mia,* desaprovechando la información para generar estratos, lo que se hubiera obtenido es que (para esto suponga que la muestra fue obtenida sin estrato)

$$\bar{x}=7.0$$

$$s^2 = 8.9743$$

$$V(\bar{x}_{st})=\frac{8.97}{40}\left(1-\frac{40}{180}\right)$$

$$V(\bar{x}_{st})=0.1744$$

el intervalo estará dado por (6.18, 7.82). Es decir, al desaprovechar la información para estratificar, se pierde en cuanto a precisión.

Afijación de la muestra

Por afijación de la muestra se entiende el hecho de distribuir el tamaño de muestra total (n) entre los distintos estratos existentes. Puede realizarse por distintos métodos, entre lo cuales se encuentran la afijación uniforme, proporcional, de mínima varianza y óptima. A continuación se hace una breve descripción de cada uno de estos métodos.

La afijación uniforme consiste en asignar el mismo número de casos para cada uno de los estratos, con lo cual se les está dando la misma importancia, independientemente de su tamaño. Cuando la afijación se realiza asignando el número de casos de manera proporcional al tamaño de cada estrato (número de elementos en cada estrato), entonces se tratará de una afijación proporcional.

En caso de que se desee tener estimaciones con varianza mínima, entonces se utilizará el método de Neyman. Finalmente, en la afijación óptima se considera el costo por unidad de muestreo, además de que se pide varianza mínima.

Muestreo por conglomerados

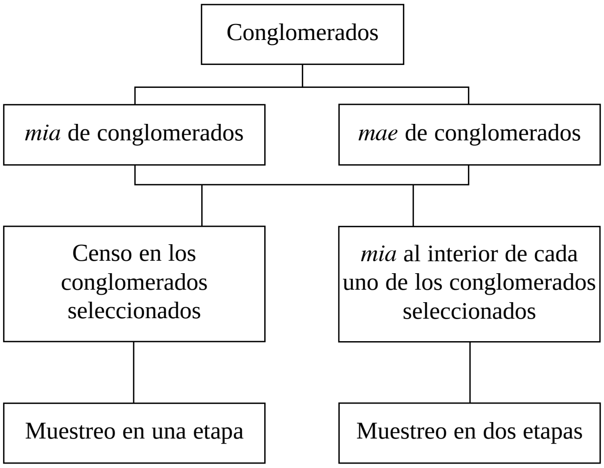
En los ejercicios propuestos en las secciones anteriores para la *mia* y para el *mae*, se partió del hecho de que era posible contar con un marco muestral para la selección de los elementos de la muestra. En el *mia* para la selección directa de n elementos del total, mientras que en el estratificado para la selección directa de n_i elementos en cada i-ésimo estrato.

Cuando para algún problema de investigación no existe un marco de muestreo o su construcción sea demasiado costosa, o cuando las unidades de muestreo se encuentran muy dispersas, al grado de impactar de manera importante en el costo del levantamiento, entonces se puede recurrir al uso del muestreo por conglomerados.

El muestreo por conglomerados consiste en considerar como unidades de muestreo agrupaciones (grupos, conjuntos) de elementos. De esta manera, sólo será necesario un listado (marco de muestreo) de estos conglomerados y no de todos los elementos.

Este tipo de muestreo puede hacerse en una o más etapas. Cuando en un muestreo se realiza la selección de n conglomerados y los m_i elementos de los n conglomerados son medidos, entonces se trata de un muestreo por conglomerados en una etapa, puesto que únicamente hubo una etapa de selección. Este procedimiento se puede hacer cuando los conglomerados no son muy grandes;[†] en caso contrario, a lo que se recurre es a la selección de una muestra de cada uno de los conglomerados seleccionados, en tal caso, se tratará de un muestreo por conglomerados bietápico.

Selección por conglomerados



[†] Pero esto no es recomendable cuando las unidades al interior de los conglomerados son muy parecidas entre sí, debido a que se pueden tener problemas de autocorrelación intraclase.

Por tanto, la selección de una muestra por conglomerados consiste en lo siguiente:

Primero, identificar agrupaciones (conglomerados) de elementos en la población, que puedan ser considerados como unidades de muestreo. Puesto que sólo se seleccionará un subconjunto de estos conglomerados, lo deseable es que sean lo más homogéneos entre sí, y lo más heterogéneos al interior, esto para garantizar que los que no salgan en muestra contengan la misma información que los que sí salen.

Se debe garantizar que todos y cada uno de los elementos de la población pertenezcan a uno y sólo a uno de los conglomerados, de manera que la intersección de estos subconjuntos sea vacía y su unión sea el total de la población.

Segundo, a partir del marco de conglomerados, se selecciona una muestra de conglomerados, ya sea con un *mia* o con un *mae*.[†]

Tercero, en caso de que el muestreo sea en una etapa, entonces se "medirán" (encuestarán) todas las unidades de los conglomerados seleccionados. En caso contrario, al interior de cada uno de los conglomerados se tomará nuevamente una muestra, como en la primera etapa de selección puede ser a través de un *mia* o un *mae*.

El uso del muestreo por conglomerados ofrece algunas ventajas, pero también desventajas. Entre las primeras se puede contar el hecho de que no se necesita un marco de muestreo de las unidades últimas (unidades de observación). Por otro lado, cuando se definen unidades geográficas como conglomerado, el costo de desplazamientos disminuye, puesto que sólo será necesario visitar algunas áreas para recolectar la información.

Esas ventajas son muy atractivas, sin embargo también tiene sus desventajas, las cuales se ven reflejadas principalmente en el descenso de la precisión de los estimadores.

■ Ejemplo 4

En una ciudad se desea conocer cuántos libros en promedio leen los niños que se encuentran inscritos en 6º grado de primaria en escuelas públicas.

En este caso podría decirse que se cuenta con un marco de muestreo (listado) de todos los alumnos de 6º grado de las escuelas públicas, entonces, ¿por qué no elegir directamente un *mia*? Si se hiciera un *mia*, habría la posibilidad de que la muestra tuviera niños de todas las escuelas, o de la mayoría de ellas, por lo que se tendría que ir a todas, y el costo en cuanto a tiempo y recursos económicos sería alto.

Por tanto, puesto que en general se puede considerar que las escuelas del gobierno son similares entre sí, entonces, cada una de las escuelas puede tomarse como un conglomerado y, a partir del listado de todas las escuelas, hacer una selección de algunas de ellas.

Suponga que en total se tienen 120 escuelas de gobierno en la ciudad, y que se seleccionan de manera aleatoria 10 de ellas. Estimar el promedio de libros leídos por los niños. Se supone que una vez seleccionada la escuela, se pregunta a todos los niños de 6º grado cuántos libros leyeron el año pasado.

[†] Tanto en la *mia* como en el *mae* se asignan probabilidades iguales de salir en muestra a cada una de las unidades de muestreo. Para el caso de muestreo por conglomerados, se puede seguir el mismo procedimiento. Sin embargo, puesto que en el muestreo por conglomerados, éstos pueden tener tamaños distintos, entonces existe la posibilidad de realizar su selección con probabilidades distintas, en particular se puede hacer con probabilidades proporcionales al tamaño de los conglomerados (número de integrantes).

Por tanto,

N = 120 Total de escuelas en la ciudad
n = 10 Total de escuelas en muestra
m_i = Número total de niños de 6º grado en la escuela i, donde i = 1, 2, ... n
x_i = Número total de libros leídos por los niños de la escuela i

La información del número de libros leídos por los niños de 6º grado de las escuelas en muestra es la siguiente:

Conglomerado	m_i	x_i
1	60	180
2	50	125
3	53	190
4	70	132
5	65	151
6	58	92
7	62	75
8	74	120
9	45	104
10	56	62

$$\text{Como} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \text{, entonces} \quad \bar{x} = \frac{1,31}{593} = 2.076$$

es decir, el promedio de libros leídos por niño se calcula considerando el total de libros en los conglomerados en la muestra entre el total de niños de los conglomerados en ella.

La varianza de $\bar{x}$ se calcula como

$$V(\bar{x}) = \frac{N - n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}m_i)}{Nn\bar{M}^2 \quad n-1}$$

con M igual al número total de niños en todas las escuelas. Por tanto, $\bar{M}$ = si 56.7, entonces

$$V(\bar{x}) = \frac{120-10}{120(10)(56.7)^2} = \frac{18\ 231.82}{9}$$

$$V(\bar{x}) = 0.05782873$$

de donde se obtiene el intervalo de confianza

$$\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\bar{x})}$$

$$\bar{x} \pm 1.96\sqrt{0.05783}$$

$$2.076 \pm 0.4713$$

es decir, en promedio, los niños de 6º grado de las escuelas públicas leen entre 1.61 y 2.55 libros en el año, esto con un 95% de confianza.

En este caso se contó con información acerca del número total de niños en las escuelas, cuando no se tiene esta información, una buena aproximación se realiza como:

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$$

Muestras complejas

De acuerdo con lo que se ha visto a lo largo del apartado, para la aplicación de cada uno de los tipos de muestreo que se han descrito es necesario el cumplimiento de determinadas condiciones, las cuales son principalmente en cuanto al tipo de información necesaria, es decir, en cuanto al marco de muestreo. Según lo planteado hasta este momento, para realizar un muestreo aleatorio simple es necesario contar con un marco de muestreo (listado) de todos y cada uno de los elementos que integran la población, de entre los cuales se realizará la selección directa de una muestra; lo mismo sucede en el caso del muestreo aleatorio estratificado, para el cual es necesario contar con información que permita realizar una estratificación (clasificación) de todos y cada uno de los elementos de la población, así como el listado de todos los elementos pertenecientes a cada uno de los estratos, para posteriormente realizar la selección directa de una muestra en cada uno de los estratos; en tanto que para el caso del muestreo por conglomerados, el cual pareciera ser el menos exigente en cuanto a cantidad de información. Se requiere del listado de todos y cada uno de los conglomerados, a partir del cual se realizará la selección directa de una muestra de ellos.

Como se puede observar, la aplicación de cada uno de estos tipos de muestreo requiere de determinada información. Pero, ¿qué pasa cuando no se cuenta con esa información? Por ejemplo, considere que desea realizar una encuesta a nivel nacional sobre la percepción que tienen los mexicanos, de 18 años y más, acerca de lo adecuada que resulta la constitución política del país.[†] Vea las posibilidades de muestreo con las que contaría hasta este momento.

Si deseara aplicar un muestreo aleatorio simple, lo que se requiere es un listado de todos los mexicanos de 18 años y más residentes en el país, en el momento de la aplicación de la encuesta. Este listado

---

[†] El diseño del esquema de muestreo completo de la Encuesta Nacional de actitudes, percepciones y valores, se puede consultar en http://www.bibliojuridica.org/libros/3/1324/16.pdf. Esta encuesta fue realizada por especialistas del Instituto de Investigaciones Jurídicas en colaboración con el Instituto de Investigaciones Sociales de la UNAM.

deberá contar con información que permita identificar de manera única a cada uno de los mexicanos, así como información acerca de su ubicación. De acuerdo con lo que se ha visto hasta este momento, a partir de este listado de cerca de 59 millones de mexicanos,[†] se realizará la selección de manera directa a partir de la generación de números aleatorios o muestro sistemático.[††] ¡Demasiado complicado! Ante la imposibilidad de contar con un listado con estas características y lo poco práctico que resulta realizar de esta manera la selección de los integrantes de la muestra,[†††] se tiene que recurrir a métodos "indirectos" de selección (diferentes etapas de selección).

Si lo que se quisiese es hacer un muestreo aleatorio estratificado, clasificando de acuerdo al tamaño de localidad, o por estratos socioeconómicos, por ejemplo, la necesidad de un marco de muestreo por individuos no se salva. Es decir, puesto que la selección de la muestra se tendría que realizar al interior de cada uno de los estratos, entonces, se requiere de un listado exhaustivo de todos los mexicanos incluidos en cada uno de los estratos, y realizar la selección directa en cada uno de ellos.

Por otro lado, a diferencia de los dos casos anteriores, para un muestreo por conglomerados, el marco muestral estará conformado por todos y cada uno de los conglomerados, los cuales para este caso en particular podrían ser los municipios, localidades, AGEB's,[††††] etc. Los conglomerados generalmente son unidades mayores que las unidades de observación. A partir del listado de todos los conglomerados, se selecciona de manera directa una muestra de conglomerados, al interior de los cuales se realiza la recolección de la información de todos los elementos que los conformen. Por tanto, la información con la cual se construyó la muestra fue el listado de todos los conglomerados y el listado de los elementos de un número limitado de conglomerados.

Esquema de muestreo en una sola etapa

Como se puede observar en la descripción anterior, la información necesaria para realizar la selección de la muestra depende de las especificaciones del tipo de muestreo que se desea realizar, el cual, por lo demás, está determinado por los objetivos de la investigación.

Una particularidad de cada uno de los esquemas de muestreo mencionados en los apartados anteriores es que se llega a la muestra a través de una etapa de selección. Es decir, en cada uno de los esquemas seleccionados, la muestra es consecuencia de la selección directa de los elementos. A este tipo de esquema de muestreo se le llama muestreo en una etapa.

En situaciones reales de muestras con alcance geográfico muy grande, es poco factible que se pueda aplicar el muestreo en una sola etapa debido principalmente a la imposibilidad de contar con un marco de muestreo con las características para hacer un muestreo de este tipo.[†††††] Entonces, a lo que se recurre

---

[†] De acuerdo con información del Censo General de Población y Vivienda del 2000, la población de 18 años y más en el país fue de 58 772 635.

[††] Suponiendo que el listado no tienen algún orden en particular, es decir, que su arreglo es aleatorio.

[†††] En caso de que se pudiera contar con un listado con estas características, el problema de la selección de la muestra quedaría resuelto con los paquetes estadísticos que tienen la opción de extraer muestras simples de manera muy sencilla.

[††††] Las Áreas Geoestadísticas Básicas (AGEB) son áreas geográficas delimitadas de acuerdo con criterios establecidos por el INEGI, las AGEB son la extensión territorial, que corresponde a la subdivisión de las AGEM (Áreas Geoestadísticas Municipales), constituye la unidad básica del Marco Geoestadístico Nacional y, dependiendo de sus características, se clasifican en dos tipos; Áreas Geoestadísticas Básicas Urbanas y Áreas Geoestadísticas.

[†††††] Además, debido a la forma en la que se selecciona a los elementos de la muestra, su dispersión es muy grande, lo cual, si bien tiene ventajas en cuanto a los estimadores, en la parte logística del levantamiento de la información, se vuelve demasiado complejo y costoso.

en estos casos es al diseño de muestras que consideren más de una etapa de selección y, en algunos casos, se combinan estos tres tipos de muestreo. Es decir, antes de llegar a la selección directa de la unidad de observación, se realiza la selección de unidades mayores.

Esquemas complejos de muestreo

De manera general, los muestreos complejos hacen referencia a que antes de la selección de las unidades de observación (unidades últimas de muestreo), se hizo la selección de unidades de muestreo más grandes, en una o varias etapas. Por tanto, para realizar un muestreo complejo se requiere definir cuántas etapas de selección se realizarán, así como las unidades de muestreo que se tomarán en cada una de las etapas, y la forma en la que se llevará a cabo la selección de cada una de estas unidades en cada una de las etapas.[†]

■ Ejemplo 5

Suponga que se desea conocer la percepción que tienen los universitarios acerca de la Constitución de los Estados Unidos Mexicanos, y con lo que se cuenta únicamente es con el listado de todas las universidades del país.

De acuerdo con el enunciado anterior, no se tiene a la mano el listado de todos los alumnos inscritos en todas las universidades y su recolección resulta por demás compleja. Pero con lo que sí se cuenta es con un listado de todas las universidades. Por consiguiente, las etapas y unidades de muestreo para un esquema de muestreo complejo podrían quedar especificadas de la siguiente manera.

Etapa de selección	Unidad de muestreo
1a. etapa	**Unidad primaria de muestreo:** Universidades **Marco de muestreo:** Listado de todas las universidades del país. **Estratificación:** En este nivel se puede aplicar una estrategia de estratificación, considerando dos estratos (universidades públicas o privadas); esto siempre y cuando se considere que las opiniones vertidas por los estudiantes están relacionadas con el tipo de universidad a la que asisten.
2a. etapa	**Unidad secundaria de muestreo:** Grupos de alumnos.[††] **Marco de muestreo:** Listado de todos los grupos de las universidades seleccionadas.
3a. etapa	**Unidad terciaria de muestreo:** Unidad última de muestreo, alumnos inscritos. **Marco de muestreo:** Listado de todos los alumnos inscritos en las universidades seleccionadas en la segunda etapa de muestreo.

[†] La Encuesta Nacional de Prácticas y Consumo Culturales realizada en 2003 empleó un diseño de muestra complejo, el cual se puede consultar en la dirección http://sic.conaculta.gob.mx/encuesta/encuesta.zip.

[††] En este caso se está suponiendo que las universidades tienen manera de clasificar a cada uno de los alumnos en uno y sólo un grupo. Otra manera en la que se puede realizar el muestreo es a través de la selección de clases, aunque esta forma tiene más inconvenientes que la selección por grupos debido a que si bien todos los alumnos están al menos en una clase, algunos pertenecen a más de una, con lo que se estaría corriendo el riesgo de estar considerando más de una vez a un mismo alumno. Por tanto, para este ejercicio considere que es posible asignar a cada uno de los alumnos a un grupo.

Para que un universitario sea seleccionado, con anterioridad debió haber sido seleccionado su grupo, así como la universidad en la que se encuentra inscrito; es decir, se tiene una especie de selección condicionada.

Estrategia de selección. La estrategia de selección empleada en cada una de las etapas de muestreo no necesariamente es la misma, sino más bien depende en gran medida del tipo y cantidad de información con la que se cuente. Por consiguiente, para el caso anterior será posible tener los siguientes esquemas de muestreo.

Etapa de selección	**Estrategia de selección**
1a. etapa	• Selección aleatoria de conglomerados (universidades). En caso de que se haya realizado estratificación, esta selección se realizaría en cada uno de los estratos de manera independiente. • Selección con probabilidad proporcional al tamaño del conglomerado (es decir, al número de alumnos inscritos en cada universidad). • En caso de que se haya decidido estratificar, selección de conglomerados al interior de cada uno de los estratos, ya sea con muestreo aleatorio simple o con probabilidad proporcional.
2a. etapa	• Selección aleatoria de grupos. • Selección de grupos con probabilidad proporcional.
3a. etapa	• Selección aleatoria de estudiantes al interior de cada uno de los grupos. • Selección sistemática de estudiantes en cada grupo.

Efecto de diseño

Obvio esta forma de hacer la selección de la muestra (esquema de muestreo) tiene costos en cuanto a la precisión de los estimadores. Estos costos se denominan *efecto de diseño*. El efecto de diseño es el costo asociado a la estimación de una muestra, debido a que no se utilizó un muestreo aleatorio simple. El efecto de diseño[†] no es otra cosa que el cociente entre la varianza del diseño de muestra utilizado y la varianza que se hubiese obtenido si se hubiera aplicado un muestreo aleatorio simple.

$$DEF = \frac{V(diseño)}{V(mia)}$$

Dependiendo del esquema de muestreo que se haya utilizado el factor se alejará o se acercará a uno. Este factor también se puede calcular para los casos en que la muestra es obtenida en una sola etapa, con un muestreo distinto al *mia*.[††]

[†] Generalmente para hacer referencia al *efecto de diseño* se utiliza la abreviatura *DEF* por su escritura en inglés, *Design effect*.

[††] Si la muestra se obtuvo con un muestreo aleatorio simple, el valor del *DEF* es 1.

Muestras extraídas en una sola etapa

i) Si la muestra fue extraída en una sola etapa y se utilizó un muestreo estratificado, entonces:

$$V(mae) \leq V(mia)$$

Por lo que el *DEF* será menor que 1, es decir, se tiene una ganancia en cuanto a precisión.[†]

ii) En tanto, si lo que se utiliza es un muestreo por conglomerados, entonces la relación entre las varianzas de los dos muestreos será la siguiente.

$$V(mia) < V(mconglomerados)$$

Es decir, a diferencia del caso anterior, al utilizar un muestreo por conglomerados,[††] la varianza es mayor, por lo que el *DEF* asociado a este esquema de muestreo será mayor que uno.

Este hecho es de gran importancia, puesto que como se vio en el apartado del cálculo del tamaño de muestra, la magnitud de la varianza tendrá repercusiones en el tamaño de la muestra.

La expresión para el cálculo del tamaño de muestra considerando el efecto de diseño es la siguiente:

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^{2}\sigma^{2}}{d^{2}} * DEF$$

Por tanto, si se emplea una *mia*, el tamaño de muestra no se verá afectado, puesto que el valor del *DEF* será uno. Manteniendo los mismos niveles de confianza y precisión, si se aplica un *mae*, el tamaño de muestra suficiente, será menor al del *mia*, en virtud de que el *DEF* será menor que uno. En tanto que si se aplica un muestreo por conglomerados, el tamaño de muestra necesario para obtener estimaciones con los mismos niveles de confianza y precisión, será mayor que el requerido para la *mia* o el *mae*, puesto que el *DEF* será mayor que uno.

Muestras extraídas en más de una etapa

En virtud de que el efecto de diseño no es más que la varianza asociada al esquema de muestreo aplicado, para el caso de las muestras extraídas en dos etapas es de esperar que el efecto de diseño sea mayor que uno, debido a que en cada una de las etapas de selección se tienen pérdidas en cuanto a precisión.

El cálculo de las varianzas para esquemas de muestreo complejo no es sencillo, sin embargo, en caso de que se utilice un diseño complejo, será necesario calcular el *DEF* asociado a éste y utilizarlo para el análisis, en caso contrario, se corre el riesgo de calcular errores estándar demasiados pequeños, con lo que se estaría sobreestimando su precisión.

De manera general, el cálculo de la varianza de un esquema de muestreo complejo se realiza partiendo de la última etapa de selección, calculando las estimaciones de los totales y varianzas, de acuerdo con la estrategia de selección empleada en cada una de las etapas.

[†] Para mayor explicación vaya al apartado de “Muestreo aleatorio estratificado” de este capítulo.

[††] Es decir, el costo asociado a no contar con información suficiente para poder realizar otro tipo de muestreo se ve reflejado en la mayor varianza obtenida en las estimaciones.

Cuando se esté considerando la posibilidad de utilizar un esquema de muestreo complejo debe evaluarse muy bien la conveniencia del mismo. La sencillez del esquema de muestreo se verá retribuida cuando se realice el análisis de la encuesta. Cada etapa de muestreo que se agregue, cada estratificación que se realice, se verá reflejada en la complejidad para el análisis, así como en el incremento del tamaño de la muestra. Por tanto, debe sopesarse muy bien la utilización de un diseño complejo, y si aún así se decide que es la mejor opción, se deberá dar mucha importancia a la definición de las etapas de selección y a las unidades de muestreo.

Resumen

Generar información no es una tarea fácil. Requiere de atención y dedicación de la toma de decisiones a partir del objetivo de la investigación. Se requiere tener conocimiento acerca de los distintos métodos, de sus virtudes y desventajas. En este capítulo se presentaron diversas estrategias de muestreo, tanto probabilísticas como no probabilísticas, las cuales por sí solas o combinadas, representan excelentes herramientas para la generación de información. La construcción del esquema de muestreo adecuado depende de diversos factores entre los que se encuentran el conocimiento que se tenga del fenómeno (aspecto) que se desea estudiar, el tipo de información con que se cuenta para realizar el diseño de la muestra, los recursos financieros, así como los conocimientos acerca de los tipos de muestras que se pueden realizar. En este último aspecto, a lo largo del capítulo se proporcionaron los elementos básicos para tener un panorama general del diseño de distintas estrategias de muestreo.

Ejercicios

* **5.1** ¿Cuál es la principal características de un muestreo de tipo probabilístico y uno no probabilístico?

* **5.2** ¿En qué casos es recomendable utilizar un muestreo probabilístico?

* **5.3** ¿Cuándo es preferible utilizar una muestra en lugar de un censo?

* **5.4** ¿En qué consiste el muestreo irrestricto aleatorio?

* **5.5** ¿Qué es un marco de muestreo?

* **5.6** ¿En un muestreo irrestricto aleatorio, qué elementos determinan el tamaño de muestra?

5.7 Suponga que desea saber qué porcentaje de los niños de una escuela primaria toman cursos extraclase. En total la escuela tiene 450 alumnos inscritos. Calcular los tamaños de muestra asociados con un nivel de confianza del 95% y diferentes niveles de precisión (2, 3, 4 y 5 puntos porcentuales). ¿Cuál es el comportamiento del tamaño de muestra conforme va disminuyendo la precisión?

Nota: Los ejercicios marcados con un * son para discusión en clase.

5.8 Repita el ejercicio anterior, pero ahora manteniendo fijo el nivel de precisión 5 puntos porcentuales, y variando el nivel de confianza (80%, 85%, 90%, 95% y 99%). ¿Cuál es el comportamiento del tamaño de la muestra?

*** 5.9** ¿Cómo es la varianza de un muestro aleatorio por conglomerados comparada con la de un muestreo estratificado?, ¿por qué?

5.10 Suponga que se cuenta con la información del número de hijos vivos de una muestra de 100 mujeres. Y que esta muestra fue tomada de una población total de 550 mujeres, 260 del área rural y 290 del área urbana. Calcular la media y varianza del número promedio de hijos, *a*) suponiendo que la muestra fue extraída con un *mia*, y *b*) suponiendo que se utilizó estratificación de acuerdo con el lugar de residencia, es decir, urbano o rural.

Rural (47)					***Urbano (53)***					
4	7	4	5	1	2	1	3	3	1	3
5	8	3	6	3	3	2	4	4	2	3
7	5	5	7	4	4	1	7	1	2	4
4	4	3	3	7	1	2	5	2	4	
6	6	4	2	3	2	1	4	2	2	
3	6	5	3	6	3	2	5	2	4	
6	2	2	3	8	1	2	2	3	1	
7	4	1	4		2	2	3	4	4	
3	3	7	5		3	3	4	5	2	
7	8	8	8		4	5	5	1	2	

*** 5.11** En una escuela secundaria se desea estimar el número promedio de horas al día que los estudiantes de primer grado ven la televisión. Suponga que en total se tienen 140 escuelas en la ciudad. ¿Qué tipo de muestreo se recomienda para estimar el promedio de horas diarias que los estudiantes ven la televisión? Defina la población objetivo y el esquema de muestreo que se proponga.

5.12 Siguiendo con el ejercicio anterior. Suponga que de las 140 escuelas se toman 10 de manera aleatoria, y al interior de cada una de ellas se pregunta a todos los niños de primer grado el número de horas al día que ven televisión. La información para cada uno de las escuelas es la siguiente.

Escuela	**Número de niños en primer grado en la escuela *i***	**Número total de horas que los niños de primer grado de la escuela *i* ven la televisión**
1	60	180
2	50	75
3	53	132
4	70	185
5	65	240
6	58	180
7	62	98
8	74	170
9	45	150
10	56	65

¿Qué tipo de muestreo es el que se está aplicando? Calcule el número promedio de horas que los niños de primer grado ven la televisión, así como el intervalo de confianza alrededor de este valor.

*** 5.13** Suponga que desea realizar un estudio para conocer los hábitos de juego de los asistentes a las casas de juegos. ¿Cómo definiría la población de estudio?, ¿qué tipo de muestreo recomienda?, ¿por qué?

*** 5.14** A partir de una encuesta nacional se estimó que el número promedio de libros que leen los mexicanos es de 2.93, con un 90% de confianza y margen de error no mayor a 1.75 puntos porcentuales. ¿Cómo deben interpretarse estos valores?

5.15 Un profesor de una facultad desea estimar el tiempo que debe darle a sus estudiantes para resolver un examen estándar que está elaborando. Con tal propósito toma una muestra aleatoria de 15 estudiantes y les aplica el examen. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla. Estime el tiempo promedio para terminar el examen y, por tanto, el tiempo que el profesor debe darles a sus 135 alumnos, así como el límite de error de estimación.

Tiempo (en minutos)		
65	80	65
83	60	83
60	70	73
75	90	74
92	90	80

Nota: Los ejercicios marcados con un * son para discusión en clase.

Capítulo 6

Cálculo probabilístico

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que, con base en los contenidos y ejercicios propuestos en este capítulo, el lector sea capaz de realizar los aprendizajes específicos para conocer, comprender y generalizar el cálculo probabilístico así como el de los procesos estocásticos.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Explicar en qué consiste la probabilidad.
- Identificar los fundamentos de las escuelas a) objetivista, b) subjetivista y c) frecuentista.
- Reconocer las condiciones y/o axiomas que se utilizan en el cálculo probabilístico.
- Identificar las condiciones que hacen que un evento sea mutuamente excluyente.
- Explicar las características de la probabilidad condicional.
- Reconocer las propiedades de los eventos independientes.
- Identificar las diferencias entre eventos mutuamente excluyentes e independientes.
- Definir la probabilidad marginal.
- Desarrollar los procedimientos propios del teorema de Bayes.
- Describir en qué consiste la probabilidad a priori y la probabilidad a posteriori.
- Aplicar los procedimientos desarrollados previamente, propios del cálculo probabilístico, en la solución de problemas reales.
- Manejar los conceptos asociados a los procesos estocásticos y las cadenas de Markov.
- Elaborar hábilmente diagramas de transición, a partir de las características de una aplicación.
- Combinar la construcción de diagramas de transición a un diagrama de árbol y a su matriz correspondiente.

INTRODUCCIÓN

En la interpretación del concepto de probabilidad se han seguido tres escuelas. La primera, **clásica** o **de juegos**, la considera una actividad que pudiera conducir a los resultados previstos, sin olvidar que el efecto particular observado en cualquiera de sus etapas tambien está generado por el azar. En el siglo XVII, esta escuela tenía como principal interés determinar la probabilidad de éxito en los juegos de azar. En este caso, los experimentos en cuestión eran tirar un dado, girar la ruleta, manejar las cartas, etc. Los matemáticos de ese siglo, B. Pascal, P. Ferment y P.S. Laplace, entre otros, fueron quienes más contribuyeron a formalizar los conceptos de probabilidad. Considera "espacios muestrales equiprobables", por lo que espera *resultados igualmente probables*, *implica resultados* a priori *y por consiguiente es subjetiva.*

La segunda escuela es la **subjetivista** o **bayesiana**, la cual utiliza los resultados *a priori* para calcular la probabilidad de ocurrencia de varios estados del universo de eventos (tambien llamado "espacio de eventos"), en una etapa particular del experimento que se trata.

El conocimiento *a priori* es la forma en que surgirá la distribución de probabilidades, dadas las consideraciones de la naturaleza del experimento que va a realizarse.

Por otra parte, el enfoque subjetivista permite al investigador asignar probabilidades o eventos particulares (algunos posibles resultados del experimento que se realiza), el grado de confianza en algo, está en la mente y varía de persona a persona.

Como se mencionó, la escuela subjetivista, tambien conocida como **bayesiana** (en este libro, "bayesiana" significa el deseo de incorporar probabilidades subjetivas en el análisis estadístico), es contraria a los autores de la escuela clásica que no deseaban incorporar presentimientos subjetivos en probabilidad a la estructura formal del análisis estadístico, pues no creían que de esta manera el concepto de probabilidad pudiera aplicarse a la verosimilitud de ocurrencia de varios acontecimientos en un experimento sin repetición.

La tercera escuela, tambien llamada **de probabilidad estadística** o **de regularidad estadística**; al estudiar el fenómeno en condiciones constantes (o casi), cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito, las proporciones en que el fenómeno ocurre son muy estables. No se puede predecir el resultado al estudiar uno o pocos elementos, pero **si "n" es grande es posible la predicción, con un error mínimo**, *"Ley de los grandes números"* sustentada por Bernoulli (1713). Ésta implica una regularidad estadística; al estudiar un fenómeno aleatorio muchas veces, en condiciones casi constantes (población) los diferentes resultados ocurren con una proporción casi constante (estable) a esta proporción se le llama probabilidad. Es decir, que la constancia de proporciones es igual a las probabilidades. *Quetelet*, la llama **regularidad estadística**, que es la base de la **probabilidad frecuentista**. Aunque la definición de los resultados de interés (espacio muestral) y las condiciones de estudio (población) es *subjetiva*; sin embargo, los valores en los que se estabilizan las frecuencias relativas o probabilidades son *objetivas*. Para entender, describir y predecir fenómenos aleatorios, se pretende conocer dichas probabilidades. En este *enfoque objetivo*, la variación impredecible de la evidencia es tal que la frecuencia relativa con la que pertenece a cualquier conjunto en el dominio de la evidencia, tiende a estabilizarse alrededor de un valor idealizado, la **probabilidad**, siempre y cuando el número de observaciones se hiciese infinitamente grande.

Debido a que el observador tiene una ignorancia total o parcial, es decir, una incertidumbre acerca del resultado de una investigación, su actitud estará eventualmente en desventaja al adivinar qué ocurrirá. En un sentido, la probabilidad refleja la incertidumbre acerca del resultado de un experimento, por lo que aquella puede pensarse como el lenguaje matemático de ésta, la cual es la misma para el investigador como para el juego de azar.

En los últimos años se ha incrementado el uso de los modelos probabilísticos, debido a que presentan muchas ventajas al aplicarse a situaciones reales. En ellos interviene un conjunto de variables aleatorias, las cuales se rigen por ciertos parámetros, como tiempo o espacio. A los procesos aleatorios también se les conoce como *procesos estocásticos*.

En toda investigación o estudio, una vez que se han recopilado datos empíricos se adopta un modelo teórico (alguna distribución teórica de probabilidades estadísticas), con el objeto de extraer más información de los datos. Si la adaptación es buena, las propiedades del conjunto de datos pueden aproximarse a las de ese modelo. De manera similar, a un proceso real que posea las características de un proceso aleatorio se le podrá adaptar un proceso estocástico. De este modo, el conocimiento de las propiedades y características del proceso estocástico es altamente deseable para una mejor comprensión del fenómeno real en estudio.

Las incertidumbres asociadas a diferentes ámbitos (como el comportamiento humano y las ciencias sociales o de la salud) se adaptan de manera adecuada a los modelos probabilísticos y los procesos estocásticos.

Estos modelos podrían utilizarse para analizar:

- Movilidad social de los individuos.
- Movilidad industrial de trabajadores o empleados.
- Sistemas educativos.
- Procesos de una enfermedad.
- Sistemas de información.

Definiciones, símbolos y terminología

En nuestro lenguaje es común utilizar las expresiones *probablemente*, *probabilidad de, es posible que suceda, es probable que*, etc. Esas frases o palabras se usan para marcar la ocurrencia de un fenómeno, evento o experimento; en esta sección se analizarán, en forma sucinta, los conceptos matemáticos de probabilidad, así como los símbolos y la terminología.

Aún no existe una interpretación única para definir *probabilidad*. Los estadísticos, filósofos y científicos en la materia no han podido homogeneizar el concepto, por lo que existen tres interpretaciones más usuales:

a) *Frecuencia relativa*. Este enfoque es una aproximación empírica del concepto de probabilidad; existe cuando se tiene un número muy grande de observaciones o repeticiones del mismo fenómeno o evento. A continuación, se enunciará una definición un poco más formal.

Si un experimento se ejecuta n *veces en las mismas condiciones y hay* x *resultados*, $x \leq n$ *en que ocurrió un evento (hecho, suceso), entonces una estimación de la probabilidad de ese evento es la razón* x/n, *siempre que* $n \to \infty$. (n *es grande*)

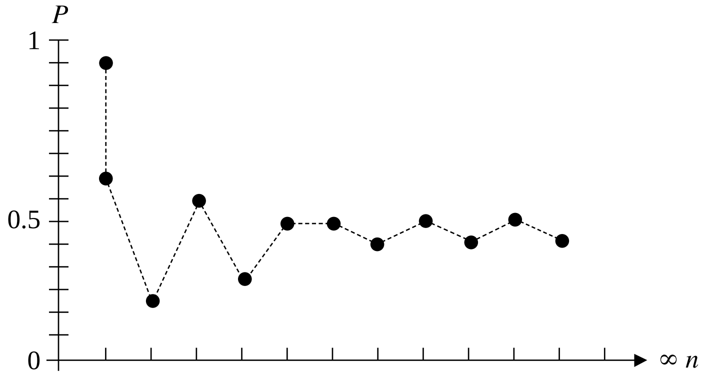
Algunos autores manejan el concepto de eventos "equiprobables" para decir que los posibles resultados de un experimento son igualmente probables o tienen las mismas condiciones.

■ Ejemplo 1

La probabilidad de obtener águila al tirar una moneda es igual a la razón del número de modos en los que puede ocurrir el evento (uno: un águila) al número total de formas que el resultado del experimento pueda acontecer (dos: águila o sol), siempre que éste se repita *n* veces ($n \to \infty$).

Así pues, la probabilidad de que caiga águila es $\frac{1}{2}$. Es importante notar que la posibilidad obtenida al usar esta regla se refiere a la frecuencia de ocurrencia. Tal relación se describe en la figura siguiente.

Figura 6.1 Se refiere al proceso $n \rightarrow \infty$ y estabilización de las frecuencias relativas.



b) *Teoría clásica*. La definición clásica de probabilidad fue dada por Laplace y desde entonces se ha repetido en casi todos los libros sobre teoría de probabilidades. En su forma primitiva dice: *probabilidad es la razón del número de casos favorables al número total de casos igualmente posibles*.

Algunos autores manejan el concepto de probabilidad *a priori* (antes de); es decir, que se determina una vez que se conoce la naturaleza del experimento. A continuación, se presentan dos casos de probabilidad clásica:

- La probabilidad de obtener un 3 al tirar un solo dado.

Casos favorables = 1

Todos los casos posibles = 6

$$\text{Teoría clásica} = \frac{\text{Núm. de casos favorables del experimento}}{\text{Núm. de casos posibles del experimento}}$$

Entonces, la probabilidad de obtener un 3 al tirar un solo dado es de $\frac{1}{6}$.

- La probabilidad de sacar un as de una baraja que consta de 52 cartas (existen 4 ases).

y entonces

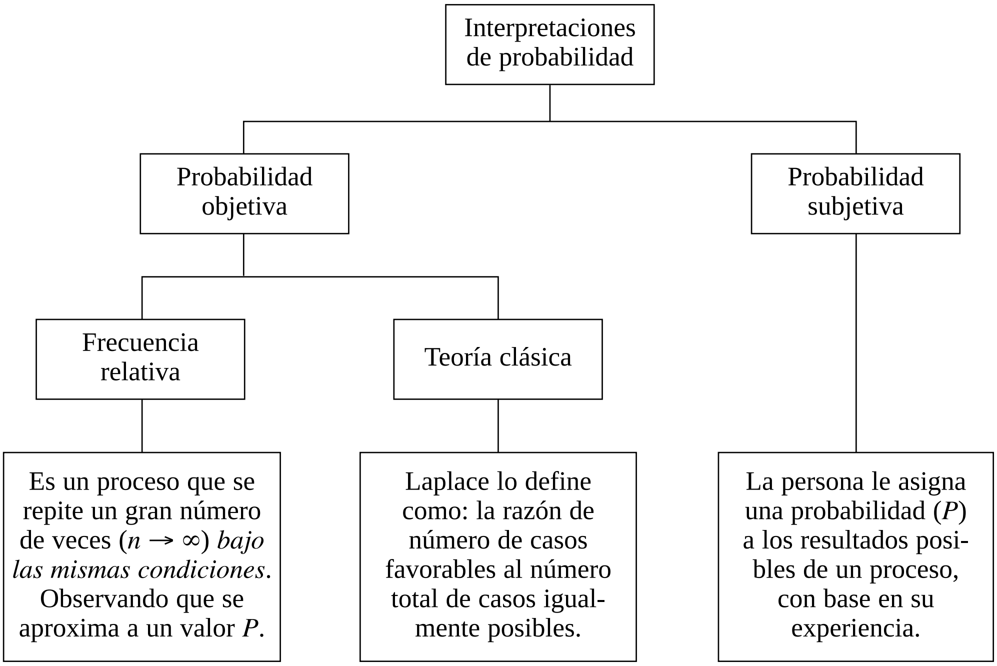
$$\left(\frac{\text{4 ases}}{\text{total de cartas}}\right) = \frac{4}{52}$$

c) *Probabilidad subjetiva*. Las probabilidades obtenidas mediante el enfoque de frecuencia relativa reciben el nombre de *probabilidades objetivas*, ya que se derivan de hechos. Sin embargo, hay numerosas situaciones en las que no se puede emplear el enfoque objetivo, es decir, situaciones en las que los resultados no son igualmente probables y no se dispone fácilmente de datos históricos. En este caso, se debe hacer una evaluación *subjetiva* de probabilidad.

Las probabilidades subjetivas son el resultado de un esfuerzo por cuantificar las expectativas o creencias respecto a algo.

En suma, la probabilidad subjetiva es una evaluación personal de la posibilidad de *que* ocurra un evento. (Para una mejor apreciación de las definiciones de probabilidad, véase la figura 6.2.)

Figura 6.2 Esquema de las definiciones de probabilidad.



Es un proceso que se repite un gran número de veces ($n \rightarrow \infty$) *bajo las mismas condiciones*. Observando que se aproxima a un valor *P*.

Laplace lo define como: la razón de número de casos favorables al número total de casos igualmente posibles.

La persona le asigna una probabilidad (*P*) a los resultados posibles de un proceso, con base en su experiencia.

SÍMBOLOS Y TERMINOLOGÍA

Experimento: es cualquier actividad bien definida capaz de repetirse en condiciones esencialmente estables, pero en la que está presente la incertidumbre.

Espacio muestral: es el conjunto que está formado por todos los posibles resultados de un experimento, denotado por Ω.

Evento o suceso: es un subconjunto del espacio muestral. Si el subconjunto está formado por un solo resultado del espacio muestral, entonces se denomina *evento simple*. Si el subconjunto está formado por más de un resultado posible, se llama *evento compuesto*. Ambos se denotan con una letra mayúscula (*E, A*, etcétera).

A continuación se presenta parte de la terminología (respecto de probabilidad) que se usará en los siguientes capítulos.

$P\ (A)$ = Probabilidad de que ocurra el evento *A*.

$P\ (\bar{A}) = P\ (A') = P\ (A^c)$ = Probabilidad de que no ocurra el evento *A,* también llamada *probabilidad del complemento de A*.

$P\ (A \cap B)$ = Probabilidad de que ocurran el evento *A* y el *B*, también llamada *probabilidad de la intersección*; se suele denotar como $P\ (AB)$.

$P(A \cup B)$ = Probabilidad de que ocurra el evento A o el B, también llamada *probabilidad de la unión*.

$P(A \mid B)$ = Probabilidad de que ocurra A, condicionado a que ocurrió, ocurre B. (Véase la sección “Probabilidad condicional”).

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

A todo evento en el espacio muestral se le asigna una probabilidad, que se da en términos de números reales, y debe cumplir con las siguientes condiciones:

i) $P(E) \geq O$, para toda $E \subset \Omega$.
   No existen probabilidades negativas.

ii) $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ para todo E y $F \subset \Omega$ y $E \cap F = \varnothing$.
   La probabilidad del conjunto universal es igual a uno, o sea, la suma de todas y cada una de las probabilidades de que se compone el espacio muestral, $\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$.

iii) $P(\Omega) = 1$ para todo Ω.
   La probabilidad de ocurrencia de un evento deberá estar siempre en un intervalo [0, 1].

■ Ejemplo 2

Se lanza una vez un dado no cargado.[†]

El espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Es el conjunto de todos los posibles resultados (Ω).

Sea E_1 = Obtener un 1 en la tirada.

$P(E_1)$ = Probabilidad de obtener un 1 en la tirada.

$$P(E_1) = \frac{1}{6}$$

Como E_1 consta de un solo elemento del espacio muestral, se le considera un *evento simple*.

Al considerar todo el espacio muestral, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{6} P(E_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$P(E_2)$ = Probabilidad de obtener un 2.

Hasta $P(E_6)$ = Probabilidad de obtener un 6.

De ahí que el experimento sí cumple con los axiomas de probabilidad.

Sea E_7 = Obtener un 2 o un 5 en la tirada.

$P(E_7)$ = Probabilidad de obtener un 2 o un 5 en la tirada de un dado no cargado:

$$P(E_7) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Como E_7 está formado por los elementos del espacio muestral, entonces se le llama *evento compuesto*.

[†] Con $n \rightarrow \infty$ *a priori*, subjetivamente se da por equiprobable.

Teoremas: $P(\varnothing) = 0$ y $P(E^c) = 1 - P(E)$
Ahora, se desea calcular la siguiente probabilidad:

$P(\overline{E}_7) = P(E_7^c) = P(E_7') =$ Probabilidad de no obtener un 2 o un 5 en la tirada de un dado no cargado:

$$P(E_7^c) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Es decir, excluya los eventos E_2 y E_5

$$P(E_2) = \frac{1}{6}$$

$$P(E_5) = \frac{1}{6}$$

Una forma alterna de solución es:

$$P(E_7') = 1 - P(E_7)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(E_7') = \frac{2}{3}$$

PARTICIONES

La cardinalidad de un conjunto $n(E)$ = número de elementos de E; $n(\varnothing) = 0$.

Sean $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ subconjuntos del conjunto Ω. La colección de subconjuntos, $A_1, A_2, ..., A_n$ forman una partición de Ω si y sólo si

i) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \Omega$
ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$ para toda $i \neq j$

Para mayor claridad, la definición anterior se analizará con este ejemplo:
Una empresa está constituida por 200 empleados, de los cuales 110 son hombres y 90 mujeres.

Ω = Todos los empleados de la empresa, $n(\Omega) = 200$
A_1 = Todos los hombres que trabajan en la compañía $n(A_1) = 110$
A_2 = Todas las mujeres que trabajan en la compañía $n(A_2) = 90$

Ahora, se verificará que en verdad A_1 y A_2 forman una partición de Ω.

i) $A_1 \cup A_2 = \Omega$
{hombres} o {mujeres} = Ω
sí cumple *i*).

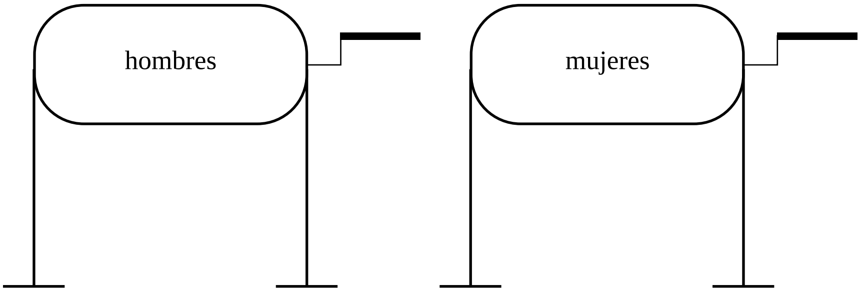
ii) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = 110 + 90 - 0 = 200$

Como no existen elementos en común, la intersección es igual a vacío.

Así, los subconjuntos A_1 y A_2 son una partición del conjunto Ω. Es importante hacer notar que si no cumple una de las dos condiciones, deja de ser partición.

Suponga que en la fiesta de fin de año se desea dar premios a algunos de los empleados. Para ello se tienen dos tómbolas, una para hombres y otra para mujeres (figura 6.5).

Figura 6.3



Sean $P(A_1)$ = Probabilidad de que un hombre obtenga el premio

$$P(A_1) = \frac{1}{110}$$

$P(A_2)$ = Probabilidad de que una mujer obtenga el premio

$$P(A_2) = \frac{1}{90}$$

La definición y el ejemplo explicado en la presente sección, constituyen la base para entender algunos conceptos que se analizarán más adelante.

Si realiza una sola rifa, entonces la probabilidad que salga premiado un hombre es $\left(\frac{110}{200}\right)$ y la probabilidad de que salga premiada una mujer es $\left(\frac{90}{200}\right)$:

$$\left(\frac{90}{200}\right) + \left(\frac{110}{200}\right) = \frac{200}{200} = 1$$

Eventos mutuamente excluyentes (*me*)

Dos o más eventos se consideran mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno automáticamente elimina la posibilidad de la ocurrencia de los otros.

Ahora se está en condiciones de establecer que todos los subconjuntos de una *partición* son eventos mutuamente excluyentes. En forma gráfica se presenta en las figuras 6.4 y 6.5:

Figura 6.4

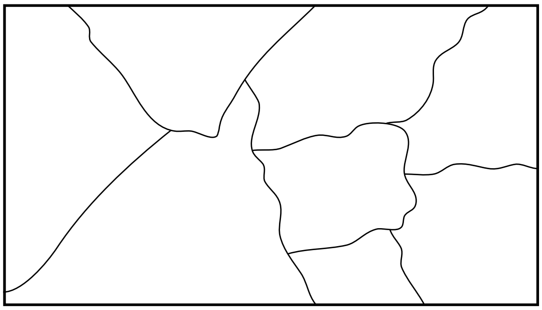
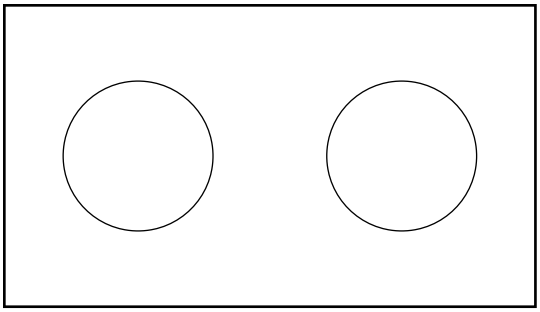


Figura 6.5

Diagrama de Venn-Euler:



Una base útil para entender la probabilidad es la habilidad para usar los conceptos y las relaciones que intervienen en ellas; para la comprensión del concepto de eventos mutuamente excluyentes, se utilizará un ejemplo.[†] Se describe el desarrollo académico de los 300 estudiantes que completaron el curso de matemáticas el semestre pasado. Los datos obtenidos se muestran en la tabla 6.1.

Observe que los 300 estudiantes se clasificaron con base en su calificación obtenida en el curso de matemáticas y también tomando en cuenta si son hombres o mujeres. La tabla contiene 10 celdas o casillas para consignar los datos. Las categorías están definidas en forma tal que cada estudiante es asignado para una y sólo una casilla; por ejemplo, 20 de los estudiantes han sido asignados para la celda asociada con la obtención de MB en matemáticas y formar parte del grupo de hombres. El número total de posibles resultados en el experimento corresponde al número total de elementos en el conjunto universal, el cual se define como el conjunto de todos los posibles resultados ($N = 300$). Puesto que un conjunto es una colección o grupo de elementos con una característica bien definida, en este caso, el espacio muestral consta de aquellos individuos que completaron el curso de matemáticas el semestre pasado.

[†] Tomado de R. Parsons, *Statistical analysis,* Harper & Row, Nueva York, 1974, p. 112.

Tabla 6.1

Calificación en matemáticas	**Hombres (evento 6)**	**Mujeres (evento 7)**	**Total**
(Evento 1) MB	20	5	25
(Evento 2) B	15	50	65
(Evento 3) S	5	90	95
(Evento 4) NA	0	80	80
(Evento 5) NP	0	35	35
Total	40	260	300

El número de subconjuntos puede ser identificado dentro del conjunto universal. Para ilustrar el subconjunto constituido por los individuos que forman el grupo de estudiantes masculinos, se tienen 40 estudiantes en la primera columna. El subconjunto de estudiantes que obtuvieron una S consiste en los 95 que forman parte del tercer renglón; asimismo, el subconjunto de estudiantes que obtuvieron S, pero de sexo masculino, son los 5 miembros tanto de la primera columna como del tercer renglón, es decir, los miembros de la casilla que es la intersección de esa columna y dicho renglón, etcétera.

(E_1) se refiere al evento 1. Éste es definido como *el estudiante seleccionado que obtuvo MB en matemáticas*. P (E_1) se refiere a la probabilidad de ocurrencia del evento 1. También puede ser interpretada como la “probabilidad de éxito”, donde éxito se define como el individuo seleccionado o escogido del conjunto universal y también es miembro del subconjunto designado como E_1. Se dice que ocurre el evento uno si cualquiera de los 25 individuos que obtuvieron MB en matemáticas pudieron ser seleccionados. Puesto que cada uno de los 300 individuos del conjunto universal tienen la misma oportunidad de ser seleccionados, P (E_1) es igual a la razón del número de elementos del subconjunto E_1 al número total de elementos del conjunto universal:

$$P\,(E_1) = \frac{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_1}{\text{Núm. de elementos del conjunto universal}} = \frac{n\,(E_i)}{n\,(\Omega)} = \frac{25}{300}$$

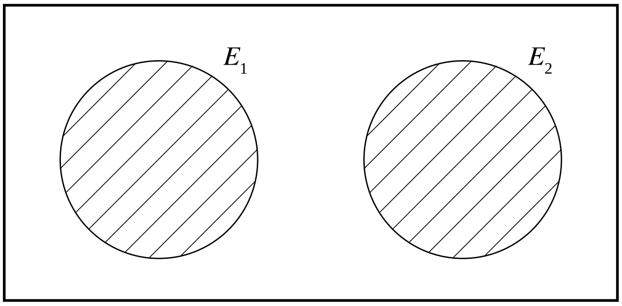
Los eventos mutuamente excluyentes cumplen estas dos propiedades:

1. $P\,(A \cup B) = P\,(A \text{ o } B) = P\,(A) + P\,(B)$
   La probabilidad de la unión de dos eventos es igual a la suma de las probabilidades de cada evento.
2. El complemento de un evento A es A^c; entonces $P\,(A^c) = 1 - P\,(A)$

$$\Rightarrow p\,(A) + P\,(A^c) = 1$$

Sea $P\,(E_1 \cup E_2)$ representado en un diagrama de Venn-Euler.

Figura 6.6



$$P\ (E_1 \cup E_2) = \frac{\textcircled{E_1}}{\boxed{N}} + \frac{\textcircled{E_2}}{\boxed{N}} = \frac{\textcircled{E_1} + \textcircled{E_2}}{\boxed{N}}$$

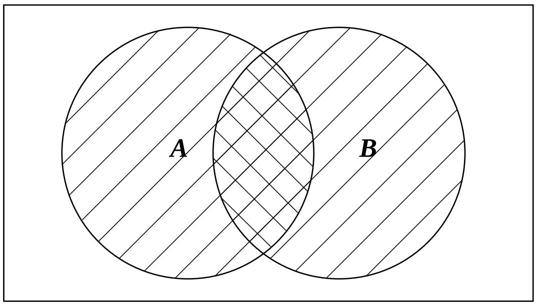
E_1 se refiere al subconjunto de estudiantes que obtuvieron MB en matemáticas. E_2 se refiere al subconjunto de estudiantes que obtuvieron B en matemáticas.

$$P\ (E_1) = \frac{n\textcircled{E_1}}{n\boxed{N}} = \frac{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_1}{\text{Núm. de elementos del conjunto universal}} = \frac{n\ (E_1)}{n\ (\Omega)} = \frac{25}{300}$$

$$P\ (E_2) = \frac{n\textcircled{E_2}}{n\boxed{N}} = \frac{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_2}{\text{Núm. de elementos del conjunto universal}} = \frac{n\ (E_2)}{n\ (\Omega)} = \frac{65}{300}$$

Al reconsiderar la regla general de adición:

$$P\ (A \cup B) = P(A) + P(B) - P\ (A \cap B)$$



La regla especial de adición:

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B),\ \text{si } A \cap B = \varnothing$$

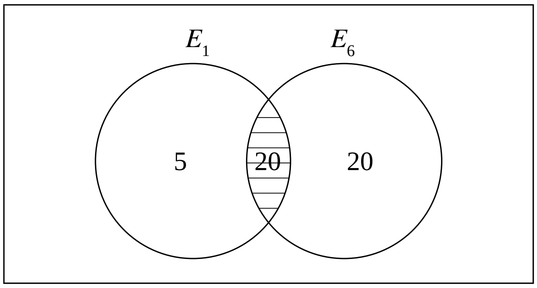
La función del término $P\ (A \cap B)$ es para rectificar el doble conteo que se lleva a cabo cuando se suman $P\ (A)$ y $P\ (B)$. La regla especial de adición no tiene el término $P\ (A \cap B)$, porque se aplica a eventos mutuamente excluyentes, ya que en este caso no hay intersección y, por tanto, tampoco doble conteo.

Si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia simultánea es igual a cero, es decir:

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{si } A \text{ y } B \text{ son } \boldsymbol{me}.$$

Al aplicar los conceptos anteriores, así como los axiomas de la probabilidad simple al ejemplo propuesto en la tabla 6.1, E_1 se refiere al subconjunto formado por aquellos estudiantes que obtuvieron MB en matemáticas y E_6 a los estudiantes que son hombres. Al presentar esta información en un diagrama de Venn-Euler se tiene (figura 6.7):

Figura 6.7



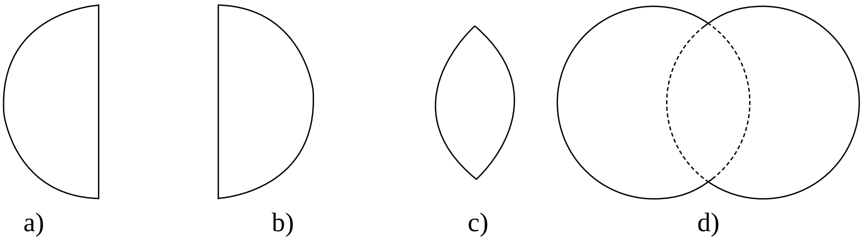
El número de MB que pueden ocurrir es igual a la suma de los miembros de los siguientes tres subconjuntos:

subconjunto $(E_6 \cap \overline{E}_1)$ + subconjunto $(\overline{E}_6 \cap E_1)$ + subconjunto $(E_6 \cap E_1)$ = subconjunto $(E_6 \cup E_1)$.

a) $(E_6 \cap \overline{E}_1)$ = Los 20 estudiantes hombres que no obtuvieron MB en matemáticas.
b) $(\overline{E}_6 \cap E_1)$ = Los cinco estudiantes que recibieron MB en matemáticas eran mujeres.
c) $(E_6 \cap E_1)$ = Los 20 estudiantes que eran hombres y también obtuvieron MB en matemáticas.
d) $(E_6 \cup E_1)$ = Los 45 estudiantes que obtuvieron MB o eran hombres.

En el lenguaje de los diagramas de Venn-Euler:

Figura 6.8



$$(E_6 \cap \overline{E}_1) \cup (\overline{E}_6 \cap E_1) \cup (E_6 \cap E_1) = E_6 \cup E_1$$

Una manera (más fácil) para determinar el número de elementos en el subconjunto $E_6 \cup E_1$, es la siguiente:

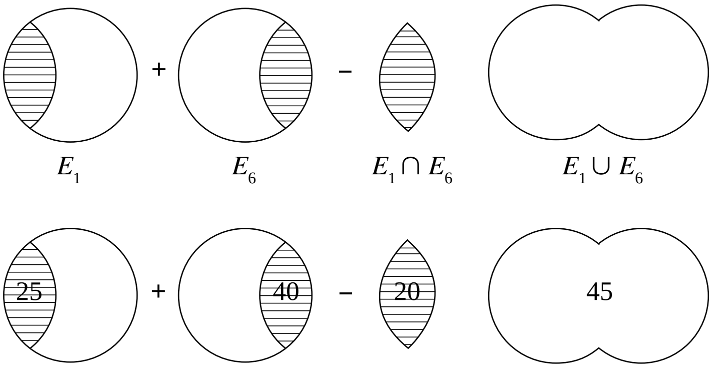
$$n(E_1) + n(E_6) - n(E_6 \cap E_1) = n(E_6 \cup E_1)$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix}\text{Los 25 estudiantes}\\ \text{que obtuvieron}\\ \text{MB en matemáticas}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Los 40 que eran}\\ \text{hombres}\\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Los 20 que obtuvieron}\\ \text{MB en matemáticas}\\ \text{y que eran hombres}\end{pmatrix}$$

= Los 45 estudiantes que obtuvieron MB eran hombres. En diagramas de Venn-Euler:

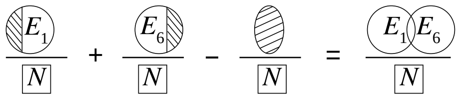
Figura 6.9



$$n\ (E_1) + (E_6) - n\ (E_1 \cap E_6) = n\ (E_6 \cup E_1)$$

Al dividir ambos lados de la expresión entre N (por ejemplo, el número de elementos del conjunto universal Ω), se mantienen las siguientes igualdades:

Figura 6.10



donde:

$$P\ (E_1) = \frac{n\ \textcircled{E_1}}{n\ \boxed{N}} \qquad P\ (E_6 \cap E_1) = \frac{n\ ▨}{n\ \boxed{N}}$$

$$P\ (E_6) = \frac{n\ \textcircled{E_6}}{n\ \boxed{N}} \qquad P\ (E_6 \cap E_1) = \frac{n\ ⚭}{n\ \boxed{N}}$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$P\ (E_1 \cup E_6) = P\ (E_1) + P\ (E_6) - P\ (E_1 \cap E_6) = \frac{25}{300} + \frac{40}{300} - \frac{20}{300} = \frac{45}{300}$$

A partir de la relación anterior, se puede derivar una regla general de adición:

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \cap B)$$

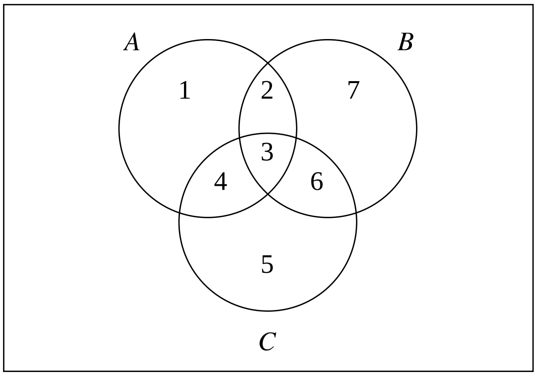
La probabilidad de la unión de dos eventos es igual a la probabilidad marginal de la primera, más la probabilidad marginal de la segunda, menos la probabilidad de su intersección.

La función del término $P(A \cap B)$ es rectificar el doble conteo que se lleva a cabo cuando se suman $P(A)$ y $P(B)$. La regla general de adición puede extenderse a la probabilidad de la unión de tres eventos. Para estos casos, la formulación de la regla es: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

■ Ejemplo 3

El conjunto A consta de cuatro regiones, etiquetadas 1, 2, 3 y 4 en el diagrama de Venn.

Figura 6.11

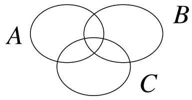


El conjunto B está formado por cuatro regiones, etiquetadas 2, 3, 6 y 7, y el C consiste en cuatro regiones, etiquetadas 3, 4, 5 y 6.

Observe los efectos de combinaciones de subconjuntos referidos en la regla general de adición:

Conjunto	A	=	1	+2	+3	+4			
Más conjunto	B	=		2	+3			+6	+7
Más conjunto	C	=			3	+4	+5	+6	
Menos conjunto	$(A \cap B)$	=		–2	–3				
Menos conjunto	$(A \cap C)$	=			–3	–4			
Menos conjunto	$(B \cap C)$	=			–3			–6	
Más conjunto	$(A \cap B \cap C)$	=			+3				
	$(A \cup B \cup C)$	=	1	+2	+3	+4	+5	+6	+7

Así, $(A \cup B \cup C) = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$. Por consiguiente:



$$\frac{}{\boxed{N}} = \frac{\text{Núm. de elementos de los nuevos subconjuntos formados por la unión de los tres subconjuntos}}{\text{Núm. total de elementos del conjunto universal } (\Omega)} = \frac{n\,(A \cup B \cup C)}{n\,(\Omega)} = P\,(A \cup B \cup C)$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Teorema. La probabilidad de que ocurra un evento *A*, dado que ocurrió el evento *B*, se llama *probabilidad condicional* de *A* dado *B,* y se expresa como sigue:

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)} \qquad P\ (B) \neq 0$$

Análogamente, la probabilidad condicional de *B* dado *A* se define como:

$$P\left(B \mid A\right) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (A)} \qquad P\ (A) \neq 0$$

La probabilidad condicional, como su nombre lo indica, está condicionada a un evento que ya sucedió o sucederá. En la vida diaria se dice: “*es posible que llueva, ya que está nublado*”, y la frase anterior está compuesta por dos eventos:

A = La probabilidad de que llueva.
B = El día está nublado.

Si regresa al ejemplo de la sección anterior, tiene lo siguiente: $P\ (E_1 \mid E_6)$ es una probabilidad condicional y se identifica por una raya vertical que separa E_1 y E_6. Este es el símbolo usado para representar la expresión *dado que*. Es decir, $P\ (E_1 \mid E_6)$ se refiere a la probabilidad que el evento E_1 ocurra, dado que, condicionado por información, puede ser que el evento E_6 ya haya ocurrido. La diferencia básica entre probabilidad condicional y las examinadas previamente es que, en el caso de la primera, las selecciones se realizan dentro del subconjunto indicado a la derecha de la raya, en tanto que, para $P\ (E_1)$, $P\ (E_1 \cup E_6)$ y $P\ (E_1 \cap E_6)$, las selecciones se llevan a cabo a partir del conjunto universal.

$$\begin{aligned} P\ (E_1) &= P\ (E_1 \mid \Omega) \\ P\ (E_1 \cup E_6) &= P\ (E_1 \cup E_6 \mid \Omega) \\ P\ (E_1 \cap E_6) &= P\ (E_1 \cap E_6 \mid \Omega) \end{aligned}$$

En ocasiones $P\ (E_1)$ se escribe como $P\ (E_1 \mid \Omega$ universo) (lo cual se lee *dado que la extracción es hecha fuera del espacio muestral*), que es la probabilidad de que el elemento seleccionado sea también un miembro del subconjunto E_1. Por lo regular se escribe $P\ (E_1)$.

A menos de que se afirme otra cosa, se supone que la selección se hace a partir del *espacio muestral*. Por lo común, el formato condicional se reserva para las ocasiones donde es necesario prestar atención al hecho de que las extracciones se efectúan a partir de un subconjunto del espacio muestral en lugar del mismo espacio.

$P\ (E_1 \mid E_6)$ se refiere a la probabilidad de que un individuo, seleccionado al azar del subconjunto E_6, sea también un miembro del subconjunto E_1; en el ejemplo, consiste en el grupo de los hombres. El evento se define: el individuo también es un miembro del subconjunto E_1 (el grupo que obtuvo MB).

$$P\ (E_1 | E_6) = \frac{\begin{array}{c}\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_6 \text{ que son} \\ \text{también miembros del subconjunto } E_1\end{array}}{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_6} = \frac{n\ (E_1 \cap E_6)}{n\ (E_6)} = \frac{20}{40}$$

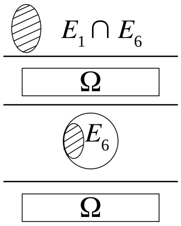
De manera semejante:

$$P(E_6 \mid E_1) = \frac{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_1 \text{ que son también miembros del subconjunto } E_6}{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_1} = \frac{n(E_1 \cap E_6)}{n(E_1)} = \frac{20}{25}$$

Reconsiderada la definición de probabilidad condicional, se estableció que $P(E_1 \mid E_6)$ se refiere a la probabilidad de que un individuo sea seleccionado del subconjunto E_6 y sea también miembro del subconjunto E_1.

Otra manera de establecerlo es la siguiente: “de los elementos que son miembros del subconjunto E_6, ¿qué porcentaje son también miembros del subconjunto E_1?” (Figura 6.12)

Figura 6.12[†]



$$P(E_1 \mid E_6) = \frac{n(\enclose{circle}{E_1} \cap E_6)}{n\,\enclose{circle}{E_6}^{\dagger}} = \frac{\text{Núm. de elementos de } E_1 \cap E_6}{\text{Núm. de elementos de } E_6} = \frac{n(E_1 \cap E_6)}{n(E_6)}$$

Un cociente no se afecta cuando numerador y denominador se dividen entre el mismo valor positivo. Dividiendo ambos, numerador y denominador, por separado, entre el número de elementos del espacio muestral, se obtiene:

$$P(E_1 \mid E_6) = \frac{\dfrac{n\,\enclose{circle}{E}}{n\ (\Omega)}}{\dfrac{n\,\enclose{circle}{E_6}}{n\ (\Omega)}} = \frac{\dfrac{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_1 \cap E_6}{\text{Núm. de elementos del espacio muestral } (\Omega)}}{\dfrac{\text{Núm. de elementos del subconjunto } E_6}{\text{Núm. de elementos del espacio muestral } (\Omega)}} = P(E_1 \mid E_6) = \frac{P(E_1 \cap E_6)}{P(E_6)} = \frac{\dfrac{n(E_1 \cap E_6)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(E_6)}{n(\Omega)}}$$

[†] El símbolo $\enclose{circle}{E_6}$ se interpreta como la representación de todo subconjunto E_6.

Por definición:

$$P\,(E_1 \cap E_6) = \frac{n\,\text{▨}}{n\;(\Omega)} \qquad\qquad P\,(E_6) = \frac{n\;(E_6)}{n\;(\Omega)}$$

La región sombreada es simplemente para destacar la región del subconjunto E_6 asociada a la intersección. Así pues,

$$P\,(E_1 \mid E_6) = \frac{P\,(E_1 \cap E_6)}{P\,(E_6)} = \frac{\dfrac{n\,(E_1 \cap E_6)}{1}}{\dfrac{n\,(E_6)}{1}} \times \frac{\dfrac{1}{n\,(\Omega)}}{\dfrac{1}{n\,(\Omega)}} = \frac{\dfrac{n\,(E_1 \cap E_6)}{n\,(\Omega)}}{\dfrac{n\,(E_6)}{n\,(\Omega)}} = \frac{P\,(E_1 \cap E_6)}{P\,(E_6)}$$

Multiplicando ambos lados $P\,(E_1 \mid E_6) = \dfrac{P\,(E_1 \cap E_6)}{P\,(E_6)}$ por $P\,(E_6)$ se generan las siguientes igualdades:

$$P\,(E_6) \times P\,(E_1 \mid E_6) = \frac{P\,(E_1 \cap E_6)}{P\,(E_6)} \times P\,(E_6)$$

Cancelando, se obtiene:

$$P\,(E_6) \times P\,(E_1 \mid E_6) = P\,(E_1 \cap E_6)$$

Entonces,

$$P\,(E_1 \cap E_6) = P\,(E_6) \times P\,(E_1 \mid E_6)$$

Un razonamiento análogo se aplica a $P\,(E_6 \mid E_1)$ y se obtiene la siguiente relación:

$$P\,(E_6 \mid E_1) = \frac{n\,\text{▨}}{n\,(E_1)} = \frac{\dfrac{n\,\text{▨}}{n\,(\Omega)}}{\dfrac{n\,(E_1)}{n\,(\Omega)}} = \frac{P\,(E_6 \cap E_1)}{P\,(E_1)}$$

Eventos independientes

Lema. Dos eventos, A y B, definidos en el mismo espacio muestral, se dice que son independientes si y solo si la probabilidad de la ocurrencia conjunta ($P\,(A \cap B)$) de A y B es igual al producto de sus respectivas probabilidades individuales:

$$P\,(A \cap B) = P\,(A)\,P\,(B)$$

Ahora, si se introduce el concepto de probabilidad condicional queda así:

i) $P\,(A \mid B) = P\,(A)$ si y sólo si $P\,(A \cap B) = P\,(A)\,P\,(B)$, siempre que $P\,(B) \neq 0$.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)}$$

ii) $P(B \mid A) = P(B)$ si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, siempre que $P(A) \neq 0$.

Como se apuntó en la sección anterior, $P(A \mid B)$ significa la probabilidad de que ocurra el evento A, dado que ocurra el evento B. Aplique el teorema:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Esta proporción brinda más información que el solo conocimiento de $P(A)$, llamada *probabilidad simple* o *no condicionada*. Cuando la ocurrencia de un evento A no depende de la ocurrencia de un evento B, entonces los eventos A y B son independientes, es decir, la ocurrencia de un evento no depende de la ocurrencia del otro.

El lema puede generalizarse para k eventos independientes, de la forma siguiente:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\ldots P(A_k)$$

■ Ejemplo 4

Suponga una urna que contiene dos bolas, una roja y una blanca. El experimento consiste en tomar una bola, anotar el color y devolverla a la urna. El procedimiento se repite dos veces. Para cada selección, la probabilidad de tomar una bola roja es $\frac{1}{2}$.

El espacio muestral está formado por el conjunto:

$$\Omega = \{RR, RB, BR, BB\}$$

La primera letra representa la primera extracción (bola *roja*) y la segunda letra representa la segunda extracción (bola *blanca*), es decir $\{RB\}$.

Sea Z_1 = Sacar una bola roja en la primera extracción:

$$Z_1 = \{RR, RB\}$$

la probabilidad de Z_1:

$$P(Z_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sea Z_2 = Sacar una bola roja en la segunda extracción:

$$Z_2 = \{RR, BR\}$$

la probabilidad de Z_2:

$$P(Z_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ahora, se desea conocer $Z_1 \cap Z_2$:

$$Z_1 \cap Z_2 = \{RR\}$$

la probabilidad es:

$$P\ (Z_1 \cap Z_2) = \frac{1}{4}$$

Por otra parte, se tiene que:

$$P\ (Z_1)\ P\ (Z_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P\ (Z_1 \cap Z_2)$$

Como los eventos Z_1 y Z_2 cumplen con la igualdad propuesta en el teorema, entonces se dice que los eventos son independientes.

¿EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES O INDEPENDIENTES?

¿Dos eventos pueden ser mutuamente excluyentes e independientes al mismo tiempo?

Si los eventos A y B son independientes, se cumple $P\ (B) = P\ (\ B \mid A)$. Esto significa que si el número de elementos del conjunto B es 10% del número de elementos del conjunto universal; entonces, el número de elementos del subconjunto ($A \cap B$) debe ser también igual a 10% del número de elementos del subconjunto A. Esto quiere decir que ($A \cap B$) debe contener algunos elementos. $P\ (B) = P\ (B \mid A)$ implica que:

$$\frac{n\,\boxed{B}}{n\,\boxed{\Omega}} = \frac{n\ ▨}{n\,\textcircled{A}};\ \text{donde ▨ representa } A \cap B$$

Por otro lado, si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, no pueden ocurrir asociadamente y el subconjunto ($A \cap B$) debe ser un conjunto nulo (vacío). Es evidente que ambas situaciones no pueden ocurrir al mismo tiempo; por consiguiente, *dos eventos no pueden ser mutuamente excluyentes e independientes al mismo tiempo*.[†]

Otra incongruencia es que, cuando los eventos A y B son independientes $P\ (B \mid A) = P\ (B)$, de cualquier forma; entonces, los eventos A y B son mutuamente excluyentes: $P\ (B \mid A) = 0$, $P\ (B \cap A) = 0$.

Otro modo de percibir la relación es pensar en términos de una tabla que describa los tipos de relación que pueden existir entre dos eventos (tabla 6.2).

La ocurrencia o no ocurrencia de un evento de ninguna forma afecta la probabilidad condicional de ocurrencia del otro evento, cuando son independientes:

$$P\ (B) = P\ (B \mid A) = P\ (B \mid \overline{A})$$

Considere un espacio muestral que consta de 100 elementos parecidos y dos subconjuntos: el subconjunto A con 20 elementos y el B con 40.

1. Si A y B son independientes

$$\left.\begin{array}{c}\text{Aunque sean } E \text{ el evento ser hombre y } F\\ \text{el de ser mujer}\end{array}\right\} \begin{array}{l} \quad E \cap F = \varnothing \\ \qquad\quad \text{y} \\ \Rightarrow\ E \text{ y } F \text{ son independientes}\end{array}$$

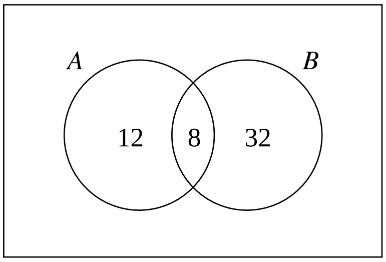
[†] Sólo cuando $P\ (B) = 0$.

$$P\ (A) = P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = \frac{20}{100} = \frac{8}{40} = \frac{12}{60}$$

Tabla 6.2 Tipos de relaciones que pueden existir entre dos eventos.

	Dependiente	
Mutuamente excluyente	***No mutuamente excluyente***	***Independiente***
La ocurrencia de un evento en forma automática causa que la probabilidad condicional del segundo evento sea cero: $P\ (B \mid A) = 0$	La ocurrencia o no de un evento afecta la probabilidad condicional del otro evento que se da, aunque no incluye la ocurrencia de los otros eventos; por ejemplo, no causa que la probabilidad condicional del otro evento sea cero: $P\ (B) \neq P\ (B \mid A) \neq P\ (B \mid \overline{A}) \neq 0$	La ocurrencia o no ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad condicional de ocurrencia del otro: $P\ (B) = P\ (B \mid A) = P\ (B \mid \overline{A})$

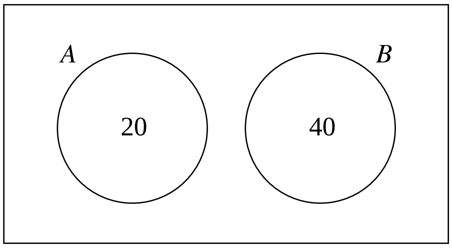
Figura 6.13



2. Si A y B son mutuamente excluyentes

$$P\ (A) = \frac{200}{100} \neq P\ (A \mid B) = \frac{0}{40} = 0$$

Figura 6.14



3. Si A y B son eventos dependientes, pero no mutuamente excluyentes, se tiene

$$P(A) = \frac{20}{100} \neq P(A \mid B),$$

donde puede haber una intersección y el número de elementos contenidos en $A \cap B$ es cualquier número entero no negativo hasta 20, excepto 0 (lo cual significaría que no hay intersección), y que los eventos son mutuamente excluyentes, y ocho (lo cual significaría que los eventos son independientes). Se observa que el número de elementos en la intersección nunca excede el número de elementos en el más pequeño de los dos subconjuntos, en este caso 20.

En suma, se presentan los siguientes casos:

1. Considere dos eventos, A y B, cuyas probabilidades $P(A)$ y $P(B) \neq 0$, y son mutuamente excluyentes:

   Por definición, $A \cap B = \varnothing$
   $P(A \cap B) = 0$

   Para que A y B sean independientes deben cumplir $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, pero como $P(A) \neq 0$, y $P(B) \neq 0$

   $$P(A) \times P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

   En suma, A y B no pueden ser independientes, cuando son mutuamente excluyentes.

2. Sean A y B dos eventos independientes; por definición se tiene:

   $$P(A) \times P(B) = P(A \cap B),$$

   ya que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ y $P(A \cap B) \neq 0$
   $A \cap B \neq \varnothing$, por tanto, A y B no son mutuamente excluyentes.

PROBABILIDAD MARGINAL

"En muchas circunstancias es conveniente considerar que un suceso ocurra siempre conjuntamente con otros sucesos. Por ejemplo, puede ser útil identificar no sólo los artículos defectuosos en un proceso de producción, sino también especificar qué máquinas (o qué operarios) han originado esos defectos. En otro ejemplo, a las compañías de seguros no sólo les interesa la magnitud del daño asociado con cada accidente automovilístico, sino también, entre otras cosas, la ciudad donde ocurrió, la edad y el sexo del conductor. De manera análoga, los estudiantes de cierta universidad son identificados no sólo por su sexo, sino también por el año que cursan y su especialidad. Igualmente una persona que solicita un préstamo puede ser clasificada no sólo por la suma de dinero solicitada, sino también por los años de permanencia en su empleo, por sus ingresos personales, por el monto de sus deudas, etcétera."[†]

[†] Tomado de D. Harnett, J. Murphy, D. *Introducción al análisis estadístico,* Addison Wesley, México, 1987, p. 86.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

La fórmula que se enunciará a continuación recibe varios nombres: *principio de expansión, teorema de la probabilidad total* y *probabilidad marginal*, entre otros.

Sea $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup ... \cup H_n = \Omega$, donde $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ son sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes, y el espacio muestral Ω. Sea E un evento arbitrario originado por Ω. Entonces:

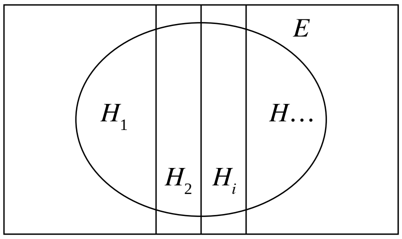
$$E = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup ... \cup (E \cap H_n) \text{ y } (E \cap H_i) \cap (E \cap H_j)$$

$$P\,(E) = P\left[(E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \ldots \cup (E \cap H_n)\right]$$

$$P\,(E) = P\left[(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \ldots + P\,(E \cap H_n)\right]$$

$$P\,(E) = \sum_{i=1}^{n} P\,(E \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P\,(E \mid H_i)\, P(H_i)$$

$$\boxed{P\,(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \mid H_i)\, P\,(H_i)}$$



■ Ejemplo 5

Suponga que tiene dos máquinas, I y II, que fabrican zapatos. Sean H_1 el suceso de fabricación de zapatos de la máquina I, y H_2 el suceso por el que los zapatos se fabrican en la máquina II. A es el suceso que representa un zapato sin defecto, entonces:

$$A = AH_1 \cup AH_2$$

puesto que AH_1 y AH_2 son mutuamente excluyentes, se tiene:

$$P\,(A) = P\,(AH_1) + P\,(AH_2) = P\,(A \mid H_1) \times P\,(H_1) + P\,(A \mid H_2)\, P\,(H_2)$$

Si la máquina I fabrica el 60% de los zapatos, entonces:

$$P\,(H_1) = 0.60\% \quad \text{y} \quad P\,(H_2) = 0.40\%$$

Además, si el 10% de los zapatos que hace la máquina I tienen defecto, y el 20% de los hechos por la máquina II también, resulta:

$$P\ (A \mid H_1) = 0.90^{\dagger} \qquad P\ (A \mid H_2) = 0.80^{\dagger\dagger}$$

Es decir, la probabilidad de fabricar un zapato sin defecto es: $P\ (A) = (0.90)\ (0.60) + (0.80)\ (0.40) = 0.86$:

$$\boxed{P\ (A) = 0.86}$$

$$P\ (A) = (0.9)\ (0.6) + (0.8)\ (0.4) = 0.54 + 0.32 = 0.86$$

Esquematizando las fórmulas anteriores, se tiene:

Regla general de adición

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \cap B).$$

Regla especial de adición (aplicable sólo a los eventos mutuamente excluyentes)

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B)$$

Regla general de multiplicación

$$P\ (A \cap B) = P\ (A) \times P\ (B \mid A) \text{ o } P\ (B) \times P(A \mid B)$$

Regla especial de multiplicación (aplicable sólo a eventos independientes)

$$P\ (A \cap B) = P\ (A) \times P\ (B)$$

Antes de considerar casos de aplicación específica, es conveniente idear un experimento simple para observar cómo se calculan las probabilidades *a posteriori*.

Considere que hay tres urnas:[†††] *A*, *B*, *C*. La urna *A* contiene seis canicas rojas, cinco blancas y cuatro verdes; la urna *B* contiene dos rojas, tres blancas y cinco verdes, y la *C* contiene seis canicas rojas, diez blancas y cuatro verdes.

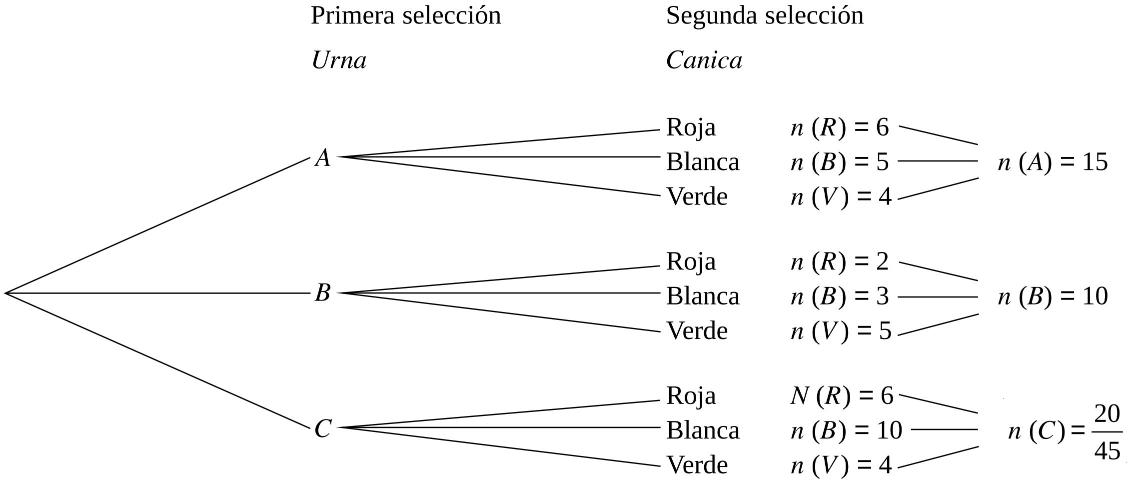
En un experimento común se le vendan los ojos a una persona y se le pide seleccionar una urna (el sujeto no sabe qué urna selecciona); extrae una canica y se registra su color. Dado éste, ¿cuál es la probabilidad de que la persona haya seleccionado la urna *A*, *B* o *C*? En un experimento de simple selección al azar de una urna, la probabilidad de seleccionar cualquiera de las tres es $\frac{1}{3}$. Existe una forma para hacer una selección específica de tres igualmente posibles. ¿De qué manera afectará esta probabilidad la consideración del color de la canica extraída?

[†] Probabilidad de no defectuoso, ya que se fabricó en la máquina I.

[††] Probabilidad de no defectuoso, ya que se fabricó en la máquina II.

[†††] Tomado R. W. Negus, *Fundamental of finite Mathematics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1974.

Para iniciar el análisis de este proceso se hará un diagrama de árbol:



Los resultados en el experimento constan de pares de eventos: el primer elemento del par es la urna seleccionada y, el segundo, el color de la canica seleccionada.

■ Ejemplo 6

(A, R_2) y (C, V_3) representan la selección de la urna A y la segunda canica roja de dicha urna, por un lado, mientras que la siguiente representa la urna C y la tercera canica verde, etcétera.

Observe que hay un total de 45 canicas en las tres urnas, por lo que existen 45 resultados posibles que no son igualmente probables debido al número diferente de canicas en cada una de las urnas. Es decir, no puede obtenerse la probabilidad de extraer una canica dada, al pensar que hay un total de 14 canicas rojas y formar la proporción de $\frac{14}{45}$, sino que deben aplicarse las fórmulas para eventos mutuamente excluyentes, que consisten en la selección de una urna y una canica. De este modo, la probabilidad de seleccionar una canica roja $P(R)$ está dada por:

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R)$$

donde:

$P(A \cap R)$ = Probabilidad de seleccionar la urna A y extraer una canica roja.
$P(B \cap R)$ = Probabilidad de seleccionar la urna B y extraer una canica roja.
$P(C \cap R)$ = Probabilidad de seleccionar la urna C y extraer una canica roja.
Con base en la probabilidad condicional para dos eventos E_1 y E_2 (la urna y la canica):

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

donde:

$$P(E_2 \cap E_1) = P(E_1) \times P(E_2 \mid E_1)$$

Por tanto, para este caso particular:

$$P\ (A \cap R) = P\ (A) \times P\ (R \mid A)$$

$$P\ (B \cap R) = P\ (B) \times P\ (R \mid B)$$

$$P\ (C \cap R) = P\ (C) \times P\ (R \mid C)$$

Puesto que la urna *A* contiene 15 canicas, de las cuales seis son rojas; la urna *B* contiene 10, de las cuales dos son rojas, y la urna *C* contiene 20 canicas, de las cuales seis son rojas, ocurre lo siguiente:

$$P\ (R \mid A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P\ (R \mid B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P\ (R \mid C) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

La probabilidad de escoger cualquiera de las tres urnas es la misma:

$$P\ (A) = P\ (B) = P\ (C) = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente:

$$P\ (A \cap R) = P\ (A) \times P\ (R \mid A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P\ (B \cap R) = P\ (B) \times P\ (R \mid B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P\ (C \cap R) = P\ (C) \times P\ (R \mid C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

Por tanto:

$$P\ (R) = P\ (A)\ P\ (R \mid A)\ +\ P\ (B)\ P\ (R \mid B) + P\ (C)\ P\ (R \mid C) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{9}{30} P(R) = \frac{3}{10}$$

La pregunta que se formuló al principio de este ejemplo era que después de observar que la canica extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna *A*?

$$P\ (A \mid R) = \frac{P\ (A \cap R)}{P\ (R)} = \frac{P\ (A)\ P\ (R \mid A)}{P\ (A)\ P(R \mid A) + P\ (B)\ P\ (R \mid B) + P\ (C)\ P\ (R \mid C)}$$

$$P(A \mid R) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{9}$$

Esto significa que, después de haber visto que la canica seleccionada es roja, la probabilidad de que la urna A fuera la urna seleccionada ya no es de $\frac{1}{3}$, sino que se ha incrementado a $\frac{4}{9}$ y, entonces, para las demás urnas (B y C) se tiene:

$$P(B \mid R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$$

$$P(C \mid R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

TEOREMA DE BAYES

El experimento de las urnas es un modelo de proceso aleatorio de dos etapas, ya que en el análisis se han hecho algunas inferencias acerca de lo que pasó en la primera etapa del proceso. Cuando esto último se desconoce y se basa en el resultado final del experimento, que también es desconocido, la relación crucial se denomina *teorema de Bayes*, el cual es una generalización de la probabilidad condicional:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

donde:

E_1 = Cualquiera de los eventos de la primera etapa.
E_2 = El evento observado en la segunda etapa.
$P(E_2)$ será calculada utilizando el teorema de probabilidad total.

$$P(E_2) = \sum_{i=1}^{n} P(E \mid H_i)\, P(H_i)$$

Otra aplicación en las ciencias del comportamiento, sociales o de la salud, es el contraste de hipótesis. Los investigadores frecuentemente proponen diferentes explicaciones de un fenómeno dado, cada uno pronostica distintas probabilidades para el resultado de un experimento particular. Se asigna una probabilidad a cada hipótesis, esto es, a su verosimilitud relativa (explicación del fenómeno) se le asigna una medida numérica; después se lleva a cabo el experimento y se observa el resultado. En general, el *teorema de Bayes* está dado por:

$$P\,(H_j \mid E) = \frac{P\,(H_j \cap E)}{P\,(E)} = \frac{P\,(E \cap H_j)}{P\,(E)} = \frac{P\,(E \mid H_j)\,P\,(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(E \cap H_j)\,P\,(H_i)} = \frac{P\,(H_j)\,P\,(E \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(H_j)\,P\,(E \cap H_i)}$$

Retomando un ejemplo anterior, en el que dos máquinas fabrican zapatos, suponga que una persona está interesada en la siguiente cuestión: ¿Cuál es la probabilidad de que un zapato sin defecto se fabrique en la máquina I? Si A era el suceso de que un zapato no tenga defecto y H_1 era el suceso de que el zapato fuera fabricado por la máquina I, la cuestión, en símbolo, es:

$$P\,(H_1 \mid A)$$

Es decir, dado un zapato sin defecto, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la máquina I? Con la fórmula de probabilidad condicional, la probabilidad $P\,(H_1 \mid A)$ es:

$$P\,(H_1 \mid A) = \frac{P\,(H_1 \cap A)}{P\,(A)}$$

y $P\,(H_1 \cap A) = P\,(A)\,P\,(H_1 \mid A)$ la regla general de multiplicación; también

$$P\,(H_1 \cap A) = P\,(A \cap H_1)$$

Pero con el teorema de probabilidad total, la $P\,(A)$ resulta:

$$P\,(A) = P\,(A \mid H_1)\,P\,(H_1) + P\,(A \mid H_2)\,P\,(H_2)$$

se tiene:

$$P\,(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P\,(H_i)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la definición de probabilidad condicional se tiene:

$$P\,(H_1 \mid A) = \frac{P\,(H_1 \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(A \mid H_i)\,P\,(H_i)} = \frac{P\,(A \mid H_1)\,P\,(H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(A \mid H_i)\,P\,(H_i)} \qquad \text{(I)}$$

Observe que $P\,(H_1)$ es la probabilidad de que un zapato sea fabricado por la máquina I, mientras que $P\,(H_1 \mid A)$ es la probabilidad de que un zapato fabricado por la máquina I no tenga defecto. A la probabilidad $P\,(H_1)$ se le llama *probabilidad previa (a priori*) y a $P\,(H_1 \mid A)$ se le llama *probabilidad posterior (a posteriori*).

■ Ejemplo 7

Considere la situación de un estudio (retrospectivo), realizado por un psicólogo acerca de la satisfacción en el trabajo. En una empresa, en la cual los empleados se ubican en alguna de las siguientes tres áreas: gerencial, administrativa y ventas, se obtuvo la siguiente información: del 100% de entrevistados, 20% pertenecen al área gerencial, 30% a la administrativa y 50% a la de ventas.

El cuestionario que se les aplica se puede también resumir en tres áreas, que son: satisfacción en el trabajo, indiferencia en el trabajo y no satisfacción en el trabajo. Los porcentajes obtenidos en dicha encuesta se concentraron en la tabla 6.3.

Tabla 6.3

	Gerencial	**Administrativa**	**Ventas**	
	20%	30%	50%	100%
Satisfecho en el trabajo	50%	10%	30%	
Indiferente	30%	40%	50%	
No satisfecho en el trabajo	20%	50%	20%	
	100%	100%	100%	

Es necesario destacar la independencia que existe entre el área a la cual pertenece un empleado (gerencia, administrativa, ventas) y su actitud hacia el trabajo (satisfecho, indiferente y no satisfecho). Ambos eventos son independientes, pero no mutuamente excluyentes.

Para simplificar el desarrollo considere la siguiente notación:

G = Gerencia.
A = Administrativo.
V = Ventas.
S = Satisfecho.
I = Indiferente.
NS = No satisfecho.

Si escoge un empleado al azar obtiene:

$$P\ (G) = 0.20 = 20\%$$

$$P\ (A) = 0.30 = 20\%$$

$$P\ (A) = \frac{0.50}{1.00} = \frac{50\ \%}{100\ \%}$$

Observe la información contenida en la tabla anterior, por ejemplo:

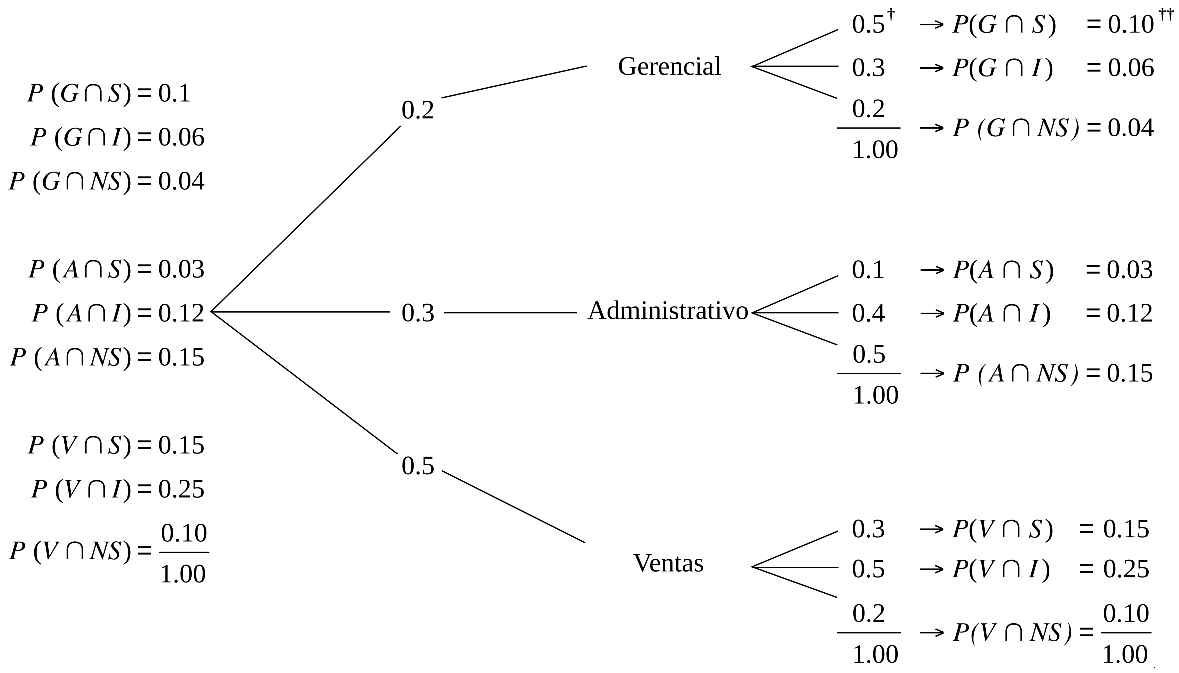
En el primer renglón de satisfecho con el trabajo, 50% del 20% que corresponde a los gerentes, están satisfechos con el trabajo, así como 10% del 30% que forman los administrativos, y 30% del 50% del área de ventas; de igual manera para el caso de las personas indiferentes y no satisfechas con el trabajo.

Como se ha dicho, el área del empleado es independiente de su actitud hacia el trabajo, en consecuencia, se cumple lo siguiente:

$$P\ (G \cap S) = P\ (G) \times P\ (S) = (0.20 \times 0.50) = 0.10$$

y así para todos los casos.

Diagrama de árbol



Y, si se suman $P(G \cap S) + P(A \cap S) + P(V \cap S) = P(S)$, siendo ésta la probabilidad del evento S; así como también para el caso $P(I)$ y $P(NS)$.

El estudio consiste en seleccionar al azar un empleado de la empresa y preguntarle cuál es su actitud respecto a su trabajo; con base en su respuesta, determinar la probabilidad de que se encuentre en alguno de los tres niveles (gerencial, administrativo o ventas). Si se desea conocer si un empleado escogido al azar está satisfecho con su trabajo $P(S)$, ello estará dado por la suma de las probabilidades *joint* o mancomunadas, descritas anteriormente:

$$P(S) = P(G \cap S) + P(A \cap S) + P(V \cap S) \qquad \ldots \quad 1$$

y en consecuencia:

$$P(I) = P(G \cap I) + P(A \cap I) + P(V \cap I) \qquad \ldots \quad 2$$

$$P(NS) = P(G \cap NS) + P(A \cap NS) + P(V \cap NS) \qquad \ldots \quad 3$$

A continuación, se desarrollará $P(S)$, que es la probabilidad marginal.

[†] Estas probabilidades son condicionales $P(S \mid G) = 0.5$.

[††] A estas probabilidades se les suele conocer como *probabilidades conjuntas*.

Considerando la regla general de multiplicación, que es consecuencia inmediata del teorema de Bayes, se tiene:

$$P\ (S \mid G) = \frac{P\ (G \cap S)}{P\ (G)} \text{ donde } P\ (G)\ P\ (S \mid G) = P\ (G \cap S)$$

Para cada una de las expresiones que forman parte de $P\ (S)$ obtiene lo siguiente, y sustituyendo:

$$P\ (G \cap S) = P\ (G) \times P\ (S \mid G) = (0.2)\ (0.5) = 0.10$$

$$P\ (A \cap S) = P\ (A) \times P\ (S \mid A) = (0.3)\ (0.10) = 0.03$$

$$P\ (V \cap S) = P\ (V) \times P\ (S \mid V) = (0.5)\ (0.3) = 0.15$$

Al sustituir los valores anteriores en la expresión 1 se tiene $\boxed{P\ (S) = 0.28}$

Si elije al azar a un empleado, la probabilidad de que esté satisfecho con su trabajo es 28%, y para indiferentes y no satisfechos tiene:

$$P\ (I) = P\ (G \cap I) + P\ (A \cap I) + P\ (V \cap I)$$

$$P\ (I) = 0.06 + 0.12 + 0.25$$

$$\boxed{P\ (I) = 0.43} \text{ Indiferente con el trabajo 43\%}$$

$$P\ (NS) = P\ (G \cap NS) + P\ (A \cap NS) + P\ (V \cap NS)$$

$$P\ (NS) = 0.04 + 0.15 + 0.10$$

$$\boxed{P(NS) = 0.29} \text{ No satisfecho con el trabajo 29\%}$$

100% Considerando a todos los empleados.

Es interesante conocer la probabilidad de que un empleado satisfecho con su trabajo provenga de la gerencia $P\ (G \mid S)$, del área administrativa $P\ (A \mid S)$ o de ventas $P\ (V \mid S)$, así como $P\ (S \mid G)$ que significa un empleado que esté satisfecho, dado que es gerente, y todos los casos posibles. Esto se obtiene utilizando el teorema de Bayes:

$$P\ (G \mid S) = \frac{P\ (G \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10}{0.28} = 0.35714$$

y

$$P\ (S \mid G) = \frac{P\ (G \cap S)}{P\ (G)} = \frac{0.10}{0.20} = 0.5$$

donde:

$$P\ (G \cap S) = P\ (S \cap G) \quad \text{y} \quad P\ (G \mid S) \neq P\ (S \mid G)$$

Al calcular todos los casos posibles con los resultados anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$P\,(G \mid S) = \frac{P\,(G \cap S)}{P\,(S)} = \frac{0.10}{0.28} = 0.35714$$

$$P\,(A \mid S) = \frac{P\,(A \cap S)}{P\,(S)} = \frac{0.03}{0.28} = 0.10714$$

$$P\,(V \mid S) = \frac{P\,(V \cap S)}{P\,(S)} = \frac{0.15}{0.28} = 0.53571$$

1

$$P(G \mid I) = \frac{P\,(G \cap I)}{P\,(I)} = \frac{0.06}{0.43} = 0.13953$$

$$P\,(A \mid I) = \frac{P\,(A \cap I)}{P\,(I)} = \frac{0.12}{0.43} = 0.27907$$

$$P\,(V \mid I) = \frac{P\,(V \cap I)}{P\,(I)} = \frac{0.25}{0.43} = 0.58140$$

1

$$P\,(G \mid NS) = \frac{P\,(G \cap NS)}{P\,(NS)} = \frac{0.04}{0.29} = 0.13793$$

$$P\,(A \mid NS) = \frac{P\,(A \cap NS)}{P\,(NS)} = \frac{0.15}{0.29} = 0.51724$$

$$P\,(V \mid NS) = \frac{P\,(V \cap NS)}{P\,(NS)} = \frac{0.10}{0.29} = 0.34483$$

1

Las siguientes probabilidades $P\,(S \mid A)$, $P\,(S \mid V)$, $P\,(I \mid G)$ ..., son las probabilidades (^{b}) que se mostraron en el diagrama de árbol anterior.

■ Ejemplo 8

Un investigador estudia el proceso de aprendizaje y la manera que un conjunto de experiencias influye en la proporción en que determinada actividad se domine. Dicho investigador tiene tres ideas diferentes acerca de cómo una persona utiliza la experiencia; éstas son tres hipótesis alternativas. Se diseña un experimento en el cual una persona aprende a dominar una tarea fácil simplemente practicando una parte de dicha actividad. Sus diferentes hipótesis hacen predicciones acerca de cuántas veces esa persona debe practicar antes de que la domine. Dichas hipótesis son:

La probabilidad de que $P(H_1)$ ocurra es 40%, $P(H_2) = 30\%$ y $P(H_3) = 30\%$. (Estos valores se obtienen por estudios previos.)

$$P(H_1) = 0.4$$
$$P(H_2) = 0.3$$
$$P(H_3) = 0.3$$

Sea *A* igual a dos o menos prácticas, *B* igual a tres prácticas y *C* más de tres:

	H_1	H_2	H_3
Probabilidad	40%	30%	30%
A	30%	50%	20%
B	50%	40%	30%
C	20%	10%	50%

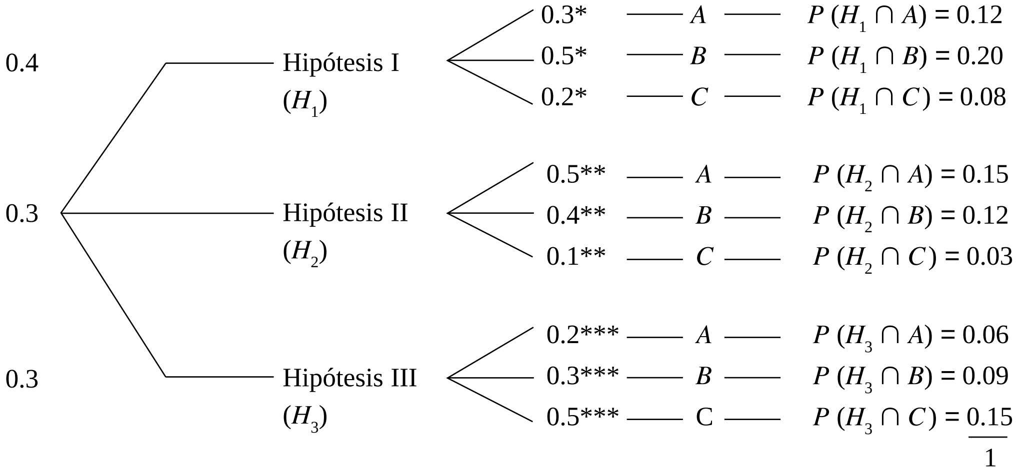
Si H_1 y *A* ocurren simultáneamente, su probabilidad es (0.4) (0.3) = 0.12 = 12%, o sea (40%) (30%) = 12%

$$P(H_1 \cap A) = 0.12$$

y sucesivamente:

$P(H_1 \cap B) = 0.20$
$P(H_1 \cap C) = 0.08$
$P(H_2 \cap A) = 0.15$
$P(H_2 \cap B) = 0.12$
$P(H_2 \cap C) = 0.03$
$P(H_3 \cap A) = 0.06$
$P(H_3 \cap B) = 0.09$
$P(H_3 \cap C) = 0.15$

Considerando las probabilidades anteriores en el *diagrama de árbol,* se tiene:



Se ubican en una tabla de doble entrada:

	H_1	H_2	H_3	**Total**
A	0.12	0.15	0.06	0.33
B	0.20	0.12	0.09	0.41
C	0.08	0.03	0.15	0.26
Total	0.40	0.30	0.30	1

Y todos los eventos posibles son:

$$P\ (A) = 0.12 + 0.15 + 0.06 = 0.33$$

$$P\ (A) = 0.33$$

$$P\ (B) = 0.20 + 0.12 + 0.09 = 0.41, \quad P\ (B) = 0.41$$

$$P\ (C) = 0.08 + 0.03 + 0.15 = 0.26, \quad P\ (C) = 0.26$$

$$P\ (H_1) = 0.12 + 0.20 + 0.08 + 0.40, \quad P\ (H_1) = 0.40$$

$$P\ (H_2) = 0.15 + 0.12 + 0.03 = 0.30, \quad P\ (H_2) = 0.30$$

$$P\ (H_3) = 0.06 + 0.09 + 0.15 = 0.30, \quad P\ (H_3) = 0.30$$

$$P\ (H_1 \mid A) = \frac{P\ (H_1 \cap A)}{P\ (A)} = \frac{P\ (A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.33} = 0.36364$$

$$P\ (A \mid H_1) = \frac{P\ (A \cap H_1)}{P\ (H_1)} = \frac{P\ (H_1 \cap A)}{P\ (H_1)} = \frac{0.12}{0.40} = 0.30*$$

$$P\ (H_1 \mid B) = \frac{P\ (H_1 \cap B)}{P\ (B)} = \frac{0.20}{0.41} = 0.4878$$

$$P\ (B \mid H_1) = \frac{P\ (H_1 \cap B)}{P\ (H_1)} = \frac{0.20}{0.40} = 0.50*$$

$$P(H_1 \mid C) = \frac{P\ (H_1 \cap C)}{P\ (C)} = \frac{0.08}{0.26} = 0.30769$$

$$P\ (C \mid H_1) = \frac{P\ (H_1 \cap C)}{P\ (H_1)} = \frac{0.08}{0.40} = 0.20*$$

$$P\ (H_2 \mid A) = \frac{P\ (H_2 \cap A)}{P\ (A)} = \frac{0.15}{0.33} = 0.45455$$

$$P\ (A \mid H_2) = \frac{P\ (H_2 \cap A)}{P\ (H_2)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.50**$$

$$P\ (H_2 \mid B) = \frac{P\ (H_2 \cap B)}{P\ (B)} = \frac{0.12}{0.41} = 0.29268$$

$$P\ (B \mid H_2) = \frac{P\ (B \cap H_2)}{P\ (H_2)} = \frac{0.12}{0.30} = 0.40**$$

$$P\ (H_2 \mid C) = \frac{P\ (H_2 \cap C)}{P\ (C)} = \frac{0.03}{0.26} = 0.11538$$

$$P\ (C \mid H_2) = \frac{P\ (H_2 \cap C)}{P\ (H_2)} = \frac{0.03}{0.30} = 0.10**$$

$$P\ (H_3 \mid A) = \frac{P\ (H_3 \cap A)}{P\ (A)} = \frac{0.06}{0.33} = 0.18182$$

$$P\ (A \mid H_3) = \frac{P\ (H_3 \cap A)}{P\ (H_3)} = \frac{0.06}{0.30} = 0.20***$$

$$P\ (H_3 \mid B) = \frac{P\ (H_3 \cap B)}{P\ (B)} = \frac{0.09}{0.41} = 0.21951$$

$$P\ (B \mid H_3) = \frac{P\ (H_3 \cap B)}{P\ (H_3)} = \frac{0.09}{0.30} = 0.30***$$

$$P\ (H_3 \mid C) = \frac{P\ (H_3 \cap C)}{P\ (C)} = \frac{0.15}{0.26} = 0.57692$$

$$P\ (C \mid H_3) = \frac{P\ (H_3 \cap C)}{P\ (H_3)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.50***$$

Se recomienda al lector interpretar estos resultados.

Algunos autores aplican directamente el teorema general de Bayes (I) para resolver los problemas; por ejemplo, para el caso anterior.

$$P\,(H_1 \mid A) = \frac{P\,(H_1)\,P\,(A \mid H_1)}{P\,(H_1)\,P\,(A \mid H_1) + P\,(H_2)\,P\,(A \mid H_2) + P\,(H_3)\,P\,(A \mid H_3)} =$$

$$\frac{P\,(H_1)\,P\,(A \mid H_1)}{\sum_{i}^{3} P\,(H_i)\,P\,(A \mid H_i)}$$

Sustituyendo los valores obtenidos anteriormente.

$$P\,(H_1 \mid A) = \frac{0.40 \times 0.30}{0.40 \times 0.30 + 0.30 \times 0.50 + 0.30 \times 0.20}$$

$$P\,(H_1 \mid A) = \frac{0.12}{0.12 + 0.15 + 0.06} = \frac{0.12}{0.33}$$

$$P\,(H_1 \mid A) = 0.36364$$

Es el resultado obtenido anteriormente.

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Conceptos y definiciones

Estado: cada una de las situaciones o maneras mutuamente excluyentes, en las cuales se puede encontrar un sistema.

■ Ejemplos 9 y 10

1. Una computadora puede estar en alguno de los siguientes estados: *en funcionamiento, descompuesta* o *en reparación*.

2. Una persona puede encontrarse en alguna de estas situaciones: *enferma, sana* o *muerta*.

Estado absorbente: situación a la cual ha llegado un sistema y de la cual ya no puede pasar a otro estado. Además, un estado absorbente sólo puede tener entradas, pero no salidas. En el ejemplo anterior, cuando la persona llega al estado de muerte, ya no puede pasar a ningún otro. Por tanto, la muerte es un estado absorbente.

Etapa: periodo que dura el desarrollo de una acción o proceso (establecido previamente por el investigador). Al término de cada etapa se observa el sistema, para determinar el estado en el cual se encuentra. El periodo puede abarcar una unidad convencional (segundo, día, mes, año, entre otros) o el tiempo que toma un lance del juego, o bien, la acción que corresponda según el sistema en estudio.

Transición: cualquier cambio de estado es una transición. En el ejemplo de la computadora, la transición es cuando pasa de estar en funcionamiento a descomponerse, o viceversa.

Probabilidad de transición: es la probabilidad de que se produzca el cambio de un estado a otro. Lo ideal es que ésta, que puede determinarse, permanezca constante en el transcurso de la vida de un sistema.

Vector de probabilidad: vector que representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado particular. En el ejemplo de la computadora, el vector de probabilidad inicial es (1, 0, 0), donde la probabilidad 1 señala la computadora funcional y que hay probabilidad 0 de que esté descompuesta o en reparación. Un vector de probabilidad, que podría presentarse en algún momento de la vida del sistema, es (0.6, 0.1, 0.3). Esto significa que la computadora tiene una probabilidad de 0.6 (60%) de estar en funcionamiento, de 0.1 (10%) de estar descompuesta y de 0.3 (30%) de estar en reparación.

Proceso estocástico: sucesión de las diferentes etapas de un sistema, fenómeno o actividad. El estado en que se encuentra el sistema en cada una de las etapas ocurre en forma aleatoria.

Cadena de Markov: proceso estocástico mediante el cual el estado de un sistema puede predecirse con cierta probabilidad a partir del conocimiento de su estado anterior. La probabilidad de transición entre los estados deberá permanecer constante en el transcurso de la vida del sistema.

Cadena de Markov absorbente: cadena de Markov que tiene uno o varios estados absorbentes. Cuando el sistema llega a uno de éstos, ya no puede salir de él.

Cadenas de Markov

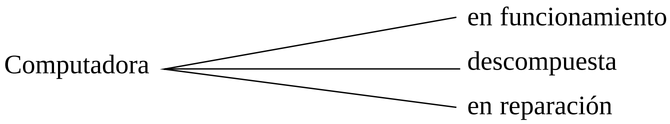
Es un experimento que consiste en una secuencia de ensayos, y cumple con las siguientes propiedades:

1. El resultado de cada ensayo (etapa) es uno de un conjunto finito de posibles resultados, llamados *estados*.
2. La probabilidad de cada resultado (estado) depende exclusivamente del ensayo (etapa) anterior.
3. La probabilidad de pasar de un resultado a otro permanecerá constante en el transcurso de todos los ensayos.

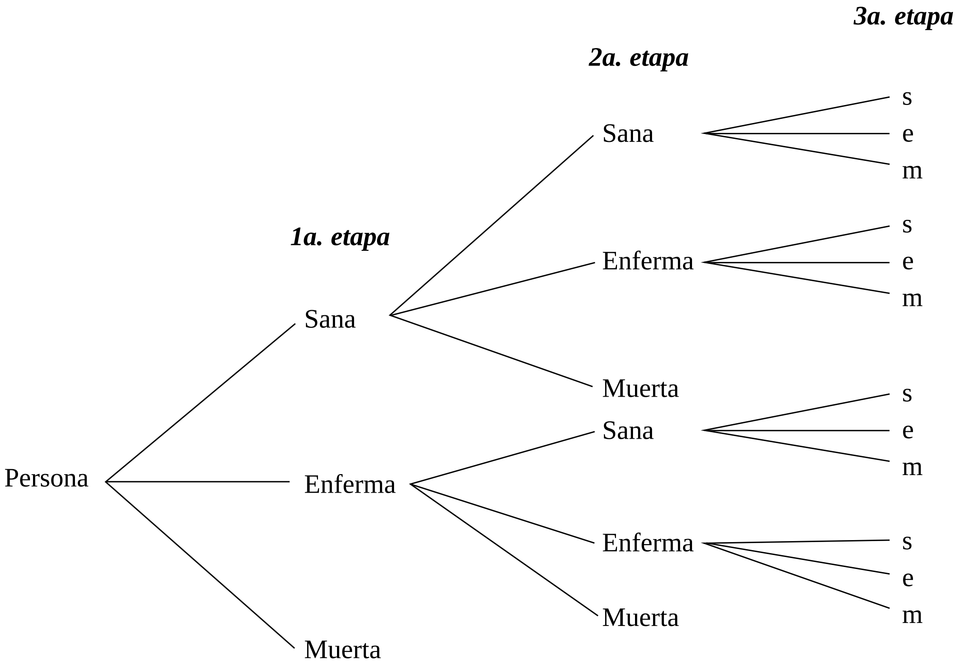
Para una definición más formal de cadena de Markov, véase E. Parzen (1972) y L. Breiman (1969).

Representación gráfica

Para representar gráficamente los posibles cambios de los estados y sus etapas en un proceso estocástico, pueden utilizarse tanto los diagramas de árbol como de transición. Así, el diagrama de árbol que corresponde al ejemplo de la computadora es el siguiente:

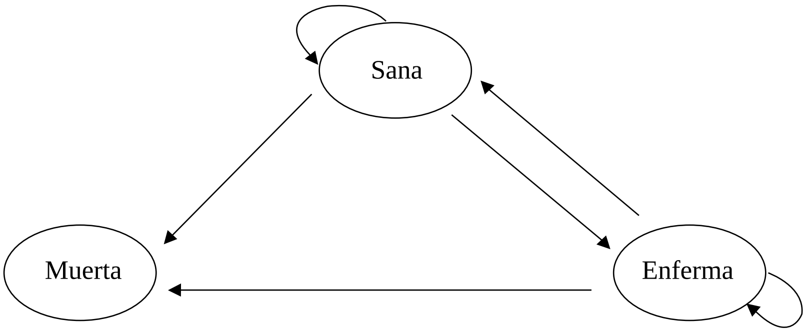


En el ejemplo de la persona, el diagrama es el siguiente:

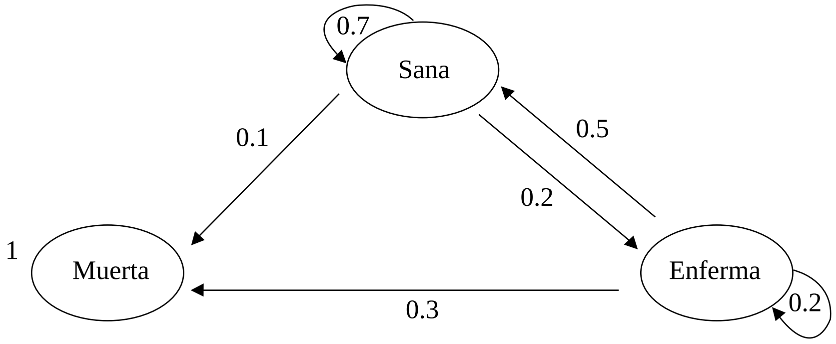


En la medida que se requieran mostrar más etapas, la construcción e interpretación del diagrama de árbol resultan menos prácticas, ya que aumentan el grado de complejidad y de confusión.

Para solucionar estos problemas, existe otro tipo de gráfica, denominada *diagrama de transición*, que es muy fácil de construir y lógica de entender:



En el diagrama, las flechas indican las posibles transiciones de un estado a otro. Además, para indicar las probabilidades de transición, en el diagrama se pone dicho valor junto a la flecha, por ejemplo:



El diagrama indica que una persona sana tiene en la siguiente etapa una probabilidad de 0.7 de estar sana, de 0.2 de estar enferma y de 0.1 de estar muerta. Por otra parte, una persona enferma se encontrará en la siguiente etapa sana, enferma o muerta, con sus respectivas probabilidades de 0.5, 0.2 y 0.3. Por último, una persona muerta seguirá muerta en la siguiente etapa; por tanto, la probabilidad de permanecer muerta asciende a 1, mientras que la de estar sana o enferma en la siguiente etapa es 0.

Representación matricial

Un proceso estocástico completo puede representarse de modo más conveniente por una matriz, donde los renglones representan los estados iniciales y las columnas los finales. Debido a que los elementos de la matriz son las probabilidades de transición, a aquélla se le suele conocer como *matriz de transición* T, y puede formarse para cualquier cadena de Markov:

Sea:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Estado final} \\ & & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{Estado inicial} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = T \end{array}$$

Las características de la matriz de transición son las siguientes:

a) Es estocástica, donde la suma de los elementos de cada uno de los renglones o columnas constituye la unidad.
b) Es cuadrada, debido a que el número de estados iniciales es igual al de estados finales.
c) $T = T'$ representa la etapa 1 y T^n representa la enésima etapa del proceso estocástico.

■ Ejemplo 11

La ruina de un jugador

Dos oponentes (un jugador y la banca) participan en un juego que consiste en arrojar un dado no cargado de seis caras. El jugador escoge los números pares (2, 4, 6) o los nones (1, 3, 5), por lo que cada uno de los oponentes tiene probabilidad de ganar de 50% (0.5).

Sea el caso cuando el jugador cuenta con dos pesos, en cada lance tiene que apostar uno y puede ganar o perder. Por otra parte, la banca cuenta con tres pesos. El jugador suspenderá cuando pierda sus dos pesos o cuando gane los tres de la banca. ¿Qué probabilidad hay de que el jugador participe más de seis veces?

Solución:

Los posibles estados en que puede estar el jugador son:

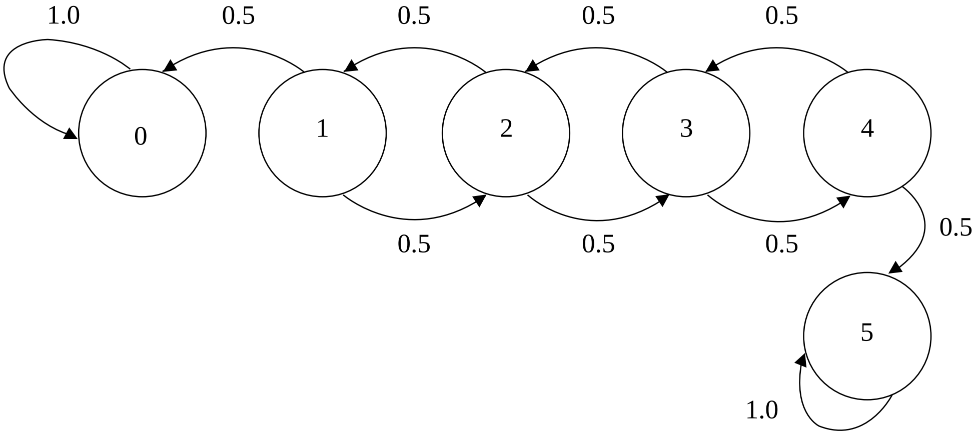
- 0 pesos (cuando pierde todo)
- 1 peso (cuando pierde un peso)
- 2 pesos (cuando inicia el juego)
- 3 pesos (cuando gana un peso a la banca)
- 4 pesos (cuando gana dos pesos a la banca)
- 5 pesos (cuando gana los tres pesos a la banca)

Cada una de estas situaciones posibles representan el número de pesos que tiene el jugador y se denominarán, respectivamente, estados 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

En cada jugador "etapa" (gane o pierda), éste cambiará de estado. Los cambios de un estado a otro se llaman *transiciones*.

Como el jugador cuenta con dos pesos, se dice que inicia en el estado 2; a la siguiente jugada, se encontrará en el estado 3, si gana, o en el 1, si pierde. Si se halla en el estado 1, todavía le queda un peso por apostar (recuerde que sólo podrá abandonar el juego cuando gane o pierda todo). Si apuesta ese peso, puede ganar o perder en la siguiente jugada; en el primer caso se encontrará nuevamente en el estado 2, en el segundo, pasará al estado 0, y debe abandonar el juego, pues perdió todo. Del estado 2 puede transitar al 3, si gana, y, de ahí, al estado 4 y al 5, si se mantiene ganando.

Estas transiciones se notan claramente en el siguiente diagrama de transición del proceso, donde se aprecia que el jugador puede caer en los estados 0, 1, 2, 3, 4 o 5 (donde tiene 0, 1, 2, 3, 4 o 5 pesos):



En el diagrama se muestran las posibles transiciones y sus probabilidades asociadas entre los estados; por ejemplo, si el jugador se encuentra en el estado 2, hay una probabilidad de 0.5 de pasar al estado 1 (si pierde) y una probabilidad de 0.5 de pasar al 3 (si gana). Los estados 0 y 5 son en este caso los absorbentes, ya que cuando el jugador llega al estado 0 carece de dinero para jugar y, por tanto, acaba el juego, mientras que si llega al 5, significa que ganó los tres pesos de la banca y el juego termina.

Los estados absorbentes se identifican fácilmente en un diagrama de transición, por tener sólo entradas pero no salidas hacia otros estados.

Una vez que se tiene el diagrama de transición, se puede construir la matriz de transición:

Hacia:

De:

$$T = \begin{array}{c|cccccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ahora, vea cómo se interpreta la matriz:

- Se puede pasar del estado 0 hacia el 0 con una probabilidad de 1, ya que es un estado absorbente. Si el jugador no tiene dinero, así permanecerá.
- La probabilidad de pasar del estado 0 a cualquier otro estado es 0, ya que una vez sin dinero, el jugador no puede apostar y entonces no podrá ganar.
- La probabilidad de pasar del estado 1 al estado 0 es 0.5, ya que, si el jugador tiene un peso, la probabilidad de perderlo y quedar con 0 pesos es de 0.5.
- La probabilidad de tener un peso y conservarlo en el siguiente lance, es decir, pasar del estado 1 al 1 es 0, ya que al jugar, o gana un peso y pasa a 2, o pierde un peso y pasa a 0.
- La probabilidad de tener un peso y pasar a dos en el siguiente lance (o sea, el estado 2) es de 0.5, ya que hay una probabilidad de 0.5 de ganar.
- La probabilidad de pasar de 1 a 3, 4 o 5 es 0, ya que el jugador sólo puede ganar un peso; entonces, como máximo tendrá dos pesos en la próxima jugada. De manera análoga se interpretan los renglones que parten de 2, 3 y 4.
- Si se tienen cinco pesos, significa que el jugador ganó los tres del contrincante; entonces, la probabilidad de conservarlos es de 1, ya que el juego terminó al no haber más apuestas.

En una matriz de transición es tan fácil identificar los estados absorbentes como en los diagramas de transición: los estados que tengan 1 en la diagonal principal son los absorbentes.

En este caso, el estado 0 y el estado 5 tienen 1 en la diagonal principal, es decir, de 0 a 0 hay probabilidad de 1, y de 5 a 5 también 1. Por tanto, los estados 0 y 5 son absorbentes, tal como se había observado en el diagrama de transición.

En el problema, interesa saber qué probabilidad existe de que se jueguen más de seis lances. Con este fin habría que determinar la probabilidad de que el jugador esté en el estado 1, 2, 3 o 4 en el juego 6, o sea, en la transición 6 de la matriz (T^6). Entonces, se eleva la matriz T a la sexta potencia:

$$T = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad T^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$T^3 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.625 & 0 & 0.25 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.375 & 0 & 0.125 \\ 0.125 & 0 & 0.375 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0.25 & 0 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad T^4 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.625 & 0.125 & 0 & 0.1875 & 0 & 0.0625 \\ 0.375 & 0 & 0.3125 & 0 & 0.1875 & 0.125 \\ 0.125 & 0.1875 & 0 & 0.3125 & 0 & 0.3750 \\ 0.0675 & 0 & 0.1875 & 0 & 0.125 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$T^5 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6875 & 0 & 0.1563 & 0 & 0.0937 & 0.0625 \\ 0.3750 & 0.1563 & 0 & 0.25 & 0 & 0.2187 \\ 0.2187 & 0 & 0.25 & 0 & 0.1563 & 0.3750 \\ 0.0675 & 0.0937 & 0 & 0.1563 & 0 & 0.6870 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \text{ y finalmente } T^6 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6875 & 0.0781 & 0 & 0.1250 & 0 & 0.1094 \\ 0.4531 & 0 & 0.2031 & 0 & 0.125 & 0.2188 \\ 0.2188 & 0.1250 & 0 & 0.2031 & 0 & 0.4531 \\ 0.1094 & 0 & 0.1250 & 0 & 0.0781 & 0.6875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz T^6 indica la probabilidad que hay de pasar de un estado inicial a otro cualquiera, después de seis transiciones (en este caso, juegos).

Como se sabe que el jugador comienza con dos pesos, centre la atención en el renglón del estado 2:

Hacia:		0	1	2	3	4	5
De:	2	[0.4531	0	0.2031	0	0.125	0.2188]

Es decir:

- La probabilidad de que comience con dos pesos y tenga cero después de seis juegos es 0.4531
- La probabilidad de que comience con dos pesos y tenga uno después de seis juegos es 0
- La probabilidad de que comience con dos pesos y tenga dos después de seis juegos es 0.2031
- La probabilidad de que comience con dos pesos y tenga tres después de seis juegos es 0
- La probabilidad de que comience con dos pesos y tenga cuatro después de seis juegos es 0.125
- La probabilidad de que comience con dos pesos y tenga cinco después de seis juegos es 0.2188

Como se desea conocer la probabilidad de que se jueguen más de seis lances, deben considerarse únicamente los estados que permitirán al jugador proseguir: 1, 2, 3 y 4, ya que si cuenta con 1, 2, 3 o 4 pesos, continuará apostando. Los estados 0 y 5 no se toman en cuenta, ya que si se llega a cualquiera de éstos, el juego se detiene, al no tener dinero para apostar o al haber ganado todo el del contrincante.

Con ello, si se suman las probabilidades que permiten seguir jugando después de seis lances (estados 1, 2, 3 y 4), resulta:

$$0 + 0.2031 + 0 + 0.125 = 0.3281$$

Así, la probabilidad de que el jugador juegue más de seis veces es 0.3281

■ Ejemplo 12

En una escuela preparatoria, cuyo ciclo escolar es de tres años, se realiza un estudio estadístico. De éste, se obtienen las siguientes proporciones (porcentajes) respecto de la situación escolar del alumnado: 15% de los estudiantes que ingresan en primer grado tuvieron que recursarlo; 60% pasaron a segundo grado, y 25% se dieron de baja. La situación de los estudiantes que cursan el segundo grado es la siguiente: 13% lo recursaron, 80% pasaron y 7% se dieron de baja. De los alumnos de tercer grado, 22% tuvieron que recursarlo, 8% se dieron de baja y 70% se graduaron.

La administración de la escuela desea saber la probabilidad de que un alumno se gradúe o se dé de baja, considerando el grado que cursa. Actualmente, el primer grado lo cursan 1000 alumnos; el segundo, 820, y el tercero, 640. Si la Secretaría de Educación Pública recomienda a la escuela que se gradúen cuando menos 650 estudiantes, conservando el excelente nivel académico de la institución, calcule cuántos alumnos se graduarán de los 1000 que ingresan. Adicionalmente, si este número es menor que 650, determine el número de alumnos que tienen que ingresar para cumplir con la recomendación de las autoridades educativas.

Solución:

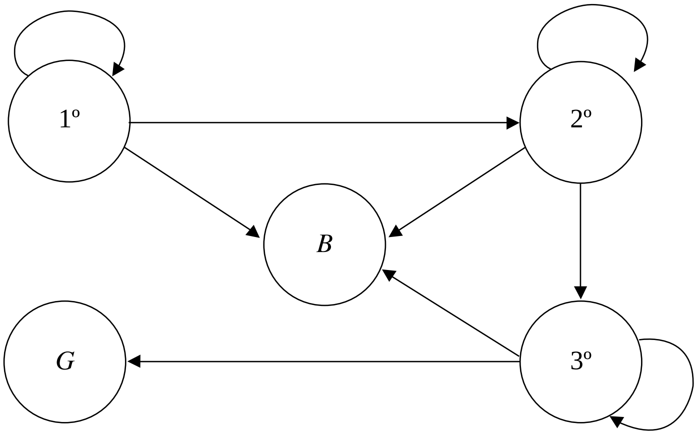
Paso 1. Construir el diagrama de transición que represente la situación en la que pueda encontrarse un alumno, considerando los estados siguientes:

- Primer año
- Segundo año
- Tercer año
- Baja
- Graduado

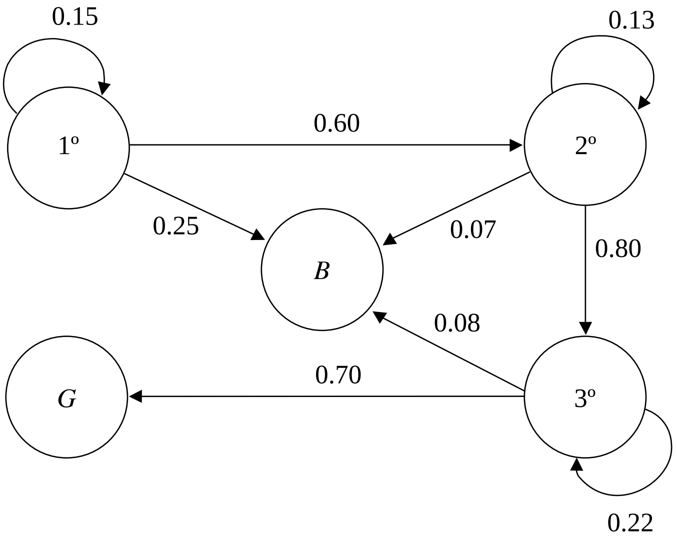
Las posibles transiciones son:

- Pasar al siguiente grado (siempre que esté en primero o segundo año)
- Repetir el grado
- Darse de baja
- Graduarse (si está en tercer año)

El diagrama de transición tiene la siguiente forma:



Considerando las probabilidades estimadas anteriormente, se tiene:



Paso 2. Construir la matriz de transición.

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & B & G \end{array} \\ \begin{array}{c} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \\ B \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 0.15 & 0.60 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.13 & 0.80 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0.22 & 0.08 & 0.70 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Paso 3. Determinar la matriz estacionaria (utilizando el MacStat). Se encuentra que a partir de T^{10}, la matriz se estaciona.

$$T^{10} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & B & G \end{array} \\ \begin{array}{c} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \\ B \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.4175 & 0.5825 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1748 & 0.8252 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1026 & 0.8974 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Paso 4. De esta matriz se obtiene la probabilidad de que un estudiante se dé de baja o se gradúe, considerando el año que cursa. Para un alumno que cursa el primer año, la probabilidad de darse de baja asciende a 41.75% (0.4175), mientras que la de graduarse es 58.25% (0.5825). Si está en segundo año, las probabilidades del alumno son: 17.48% (0.1748) y 82.52% (0.8252) de darse de baja y graduarse, respectivamente. Por otra parte, un estudiante de tercer grado tiene una probabilidad de 10.26% (0.1026) de darse de baja y 89.74% (0.8974) de graduarse.

Paso 5. Actualmente ingresan 1000 alumnos en primer grado y la probabilidad de que se gradúen asciende a 58.25%. Así, egresarán 1000 × 0.5825 = 582.5 (583 alumnos), un número de graduados inferior al de 650, que recomienda la Secretaría de Educación Pública. ¿Qué acción podría emprenderse para incrementar el número de graduados?

Paso 6. Una solución es incrementar el número de alumnos de nuevo ingreso. En ese caso, si de 1000 estudiantes que ingresan, sólo 583 se gradúan, ¿cuántos alumnos deben inscribirse para que egresen al menos 650?

Si 1000 es a 582.5, ¿cuánto es a 650?

1000 → 582.5

? → 650

(1000 × 650) ÷ 582.5 = 1115.88 (aproximadamente 1116)

Con 1 116 alumnos que se acepten en el primer grado se espera que se gradúen 650 (1116 × 58.25% = 650.07).

■ Ejemplo 13

Los locales de un nuevo centro comercial están a punto de ofrecerse en alquiler. Asimismo, existe un centro comercial en servicio con características similares. El administrador decide implantar una norma según la cual el arrendatario deberá pagar un depósito por tres meses de alquiler. Así, el local podrá encontrarse en alguna de las siguientes situaciones:

a) Al día en sus pagos.
b) Atrasado con un pago.
c) Atrasado con dos pagos.
d) Atrasado con tres pagos.
e) Disponible para ofrecerse en alquiler.

En el último inciso, pueden presentarse dos casos:

1. Se deben tres pagos y ninguno se efectúa posteriormente.
2. El arrendatario decide desocupar el local (en el caso de que adeude uno, dos o tres meses o, incluso, cuando se halle "al día" en el pago).

El centro comercial dispone de 130 locales, de los cuales 85 fueron alquilados a partir del día de la inauguración.

El administrador desea saber en qué situación se encontrarán estos 85 locales después de un año, es decir, el porcentaje en que estarán:

a) Al día con sus pagos.
b) Atrasado con uno, dos o tres pagos.
c) Desocupado.

Asimismo, los 45 locales no alquilados el día de la inauguración, el administrador desea conocer el porcentaje que estará ocupado un año después.

Por otra parte, la experiencia durante varios años con el centro comercial en servicio ha proporcionado las estadísticas que siguen:

- De los locales al día con los pagos, 63% se mantiene así el siguiente mes, 35% deben una mensualidad y 2% estarán desocupados.
- De los locales que deben una mensualidad, 22% estarán al día el siguiente mes, 28% seguirán atrasados con un alquiler, 45% estarán atrasados con dos y 5% se desocuparán.
- De aquellos que están atrasados con dos pagos, 10% se pondrán al día el siguiente mes, 37% estarán atrasados únicamente con un pago, 33% con dos, 11% con tres y 9% estarán desocupados.
- De donde el pago se atrasó tres meses, sólo 6% se pondrán al día el siguiente mes, 34% deberán una mensualidad, 27% deberán dos pagos, 17% tres y 16% tendrán que desocupar, pues están atrasados con tres mensualidades y no realizan pago alguno.
- De los locales desocupados, 60% seguirán así al siguiente mes, mientras que 40% se ocuparán.

Además, el administrador desea determinar: el momento en que se detendrá el proceso, el porcentaje de los locales que permanecerá al día en sus pagos, el porcentaje que permanecerá desocupado, así como el porcentaje que no estará al corriente.

Solución:

Paso 1. Construir el diagrama de transición que represente la situación en la que puede encontrarse un local. Los estados respectivos son:

- Al día en sus pagos (0).
- Atrasado con un pago (1).
- Atrasado con dos pagos (2).
- Atrasado con tres pagos (3).
- Desocupado (D).

Las transiciones posibles entre los estados son:

a) Si un local está al corriente, al siguiente mes puede:

- Permanecer al día.
- No pagar y, por tanto, atrasarse con un pago.
- Desocuparse.

b) Si un local está atrasado con un pago, al siguiente mes puede:

- Estar al día (si paga el mes atrasado y el mes correspondiente).
- Seguir atrasado con un pago (si sólo paga un mes).
- Atrasarse con dos meses (si no efectúa pago alguno).
- Desocuparse.

c) Si un local está atrasado con dos pagos, al siguiente mes puede:

- Ponerse al día (si paga tres meses).
- Estar atrasado con un mes (si paga sólo dos).
- Seguir atrasado con dos meses (si paga uno solamente).
- Estar atrasado con tres meses (si no paga).
- Desocuparse.

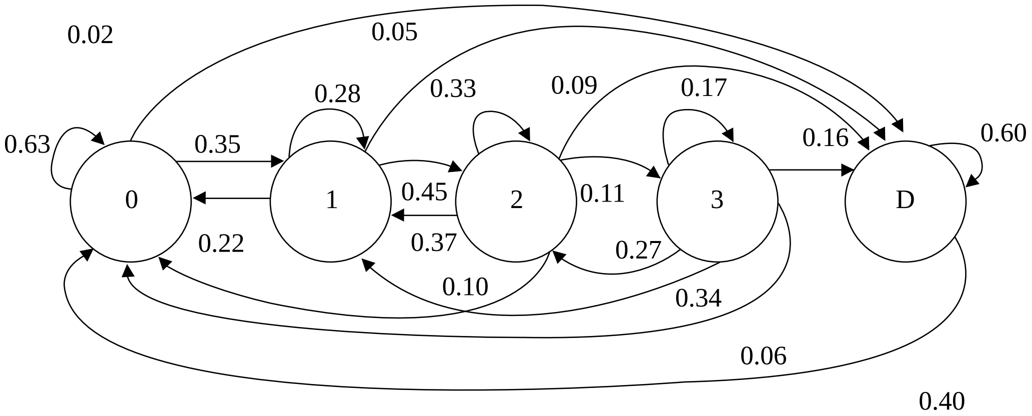
d) Si un local está atrasado con tres pagos, al siguiente mes puede:

- Ponerse al día (si paga cuatro meses).
- Estar atrasado con un mes (si paga tres).
- Estar atrasado con dos meses (si paga dos).
- Estar atrasado con tres meses (si paga uno).
- Desocuparse (si no paga).

e) Si un local está desocupado, al siguiente mes puede:

- Seguir desocupado.
- Estar ocupado.

El diagrama de transición respectivo es el siguiente:



Paso 2. Construir la matriz de transición:

$$T = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.63 & 0.35 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0.22 & 0.28 & 0.45 & 0 & 0.05 \\ 0.10 & 0.37 & 0.33 & 0.11 & 0.09 \\ 0.06 & 0.34 & 0.27 & 0.17 & 0.16 \\ 0.40 & 0 & 0 & 0 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Paso 3. Obtener T^{12}, ya que esta matriz representará la situación de los locales en el mes 12. Utilizando el programa MacStat, se obtiene:

$$T^{12} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3569 & 0.2939 & 0.2088 & 0.0277 & 0.1126 \\ 0.3574 & 0.2938 & 0.2084 & 0.0276 & 0.1127 \\ 0.3576 & 0.2938 & 0.2083 & 0.0276 & 0.1127 \\ 0.3577 & 0.2939 & 0.2083 & 0.0276 & 0.1126 \\ 0.3576 & 0.2972 & 0.2086 & 0.0276 & 0.1120 \end{pmatrix} \end{array}$$

El administrador puede obtener de esta matriz el porcentaje de los 85 locales ocupados al momento de la inauguración. Estos locales comenzaron a partir de la inauguración, por lo que estaban al día (estado 0). En este caso, había que considerar el renglón 0:

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & D \\ D & [0.3569 & 0.2939 & 0.2088 & 0.0277 & 0.1126] \end{array}$$

Entonces:

a) 35.69% de los 85 locales estarán al día en un año, esto es, aproximadamente 30 locales (85 × 0.3569 = 30.3365)

b) 29.39% estarán atrasados con un pago en un año, lo que da 25 locales aproximadamente (85 × 0.2939 = 24.9815)
20.88% estarán atrasados dos pagos en un año, aproximadamente 18 locales (85 × 0.2088 = 17.748)
2.77% estarán atrasados con tres pagos dentro de un año, es decir, dos locales aproximadamente (85 × 0.0277 = 2.3545)

c) 11.26% estarán desocupados dentro de un año, o sea, 10 locales aproximadamente (85 × 0.1126 = 9.571)

En resumen, de los 85 locales, después de un año:

- 35.69% estarán al día (alrededor de 30 locales).
- 53.04% estarán atrasados con uno o varios pagos (aproximadamente 45 locales).
- 11.26% estarán desocupados (10 locales aproximadamente).

Ahora, el administrador desea saber qué porcentaje estará ocupado un año después de los 45 locales desocupados al momento de la inauguración. Por tanto, habrá que considerar el renglón D de T^{12}:

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & D \\ D & [0.3576 & 0.2942 & 0.2086 & 0.0276 & 0.1120] \end{array}$$

Los locales que estarán ocupados son los que se encuentran al corriente o deben algún pago, esto es, 35.76 + 29.42 + 20.86 + 2.76 = 88.8 por ciento.

Una manera más simple de obtener este porcentaje es restar al 100% de los locales desocupados en la inauguración el porcentaje de locales desocupados después de un año, es decir, 100 – 11.20 = 88.8 por ciento.

De los 45 locales, 88.8% equivale a 40 aproximadamente (45 × 0.888 = 39.96). Esto es, alrededor de 40 de los 45 locales desocupados en la inauguración se habrá ocupado después de un año.

Por último, al administrador le interesa establecer el momento en que se estaciona el proceso, con el fin de obtener el porcentaje de locales al día, atrasados y desocupados. Para obtener esto, se continúa elevando la matriz hasta que se estacione; así, mediante el programa MacStat resulta que la matriz se estaciona en T^{20};

$$T^{12} = \begin{array}{c|ccccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 & D \\ 0 & 0.3573 & 0.2939 & 0.2085 & 0.0276 & 0.1126 \\ 1 & 0.3573 & 0.2939 & 0.2085 & 0.0276 & 0.1126 \\ 2 & 0.3573 & 0.2939 & 0.2085 & 0.0276 & 0.1126 \\ 3 & 0.3573 & 0.2939 & 0.2085 & 0.0276 & 0.1126 \\ \text{D} & 0.3573 & 0.2939 & 0.2085 & 0.0276 & 0.1126 \end{array}$$

De aquí, se obtiene que a partir del mes 20:

- 35.73% de los locales estarán al día.
- 29.39% estarán atrasados con un pago.
- 20.85% estarán atrasados con dos pagos.
- 2.76% se atrasarán con tres pagos.
- 11.26% permanecerán desocupados.

Resumen

Tanto en situaciones profesionales como en cotidianas, se diseñan[†] decisiones, enfrentándolo con la incertidumbre o ignorancia.

El objetivo de analizar el concepto de probabilidad, es poder expresar de manera congruente, significativa y confiable la forma de concebir la incertidumbre respecto de la ocurrencia de los eventos. La tarea de definir la probabilidad puede considerarse mediante procedimientos diferentes pero, al mismo tiempo, relacionados:

En la interpretación de la probabilidad, se discuten tres enfoques:

a) Clásica o de juegos, considera espacios muestrales equiprobables, que en la naturaleza no existen; por lo que no es posible obtener resultados igualmente probables, y esto además implica resultados *a priori* y por consiguiente es subjetiva.

b) El enfoque bayesiano, es subjetivo y permite que el investigador asigne probabilidades, basados en su confianza y que está particularmente en su mente; por lo que varía de persona a persona, pero es en definitiva contraria a los seguidores de la escuela clásica, que no deseaban incorporar presentimientos subjetivos en probabilidad.

c) La regularidad estadística, estudia los resultados de un fenómeno en condiciones constantes y en una muestra lo bastante grande, para que las proporciones de ocurrencia de dicho fenómeno sean constantes.

Ciertos principios de conteo que consideran permutaciones o combinaciones, ayudan a encontrar los resultados de un evento o fenómeno, sin necesidad de enumerar todos los posibles resultados.

Un conjunto de dos o más eventos es descrito, en la mayor parte de los casos, como independiente o dependiente. Si los eventos son dependientes, pueden ser o no mutuamente excluyentes. Algunas leyes y propiedades que rigen la probabilidad clásica, permiten calcular probabilidades a partir de otras probabilidades.

El teorema de Bayes, por tanto, es una de las leyes más importantes de la probabilidad; aunque aquí se ha desarrollado un concepto del particular, en el supuesto de que en el espacio muestral todos los resultados son igualmente probables, en realidad estas mismas propiedades y leyes no se aplican únicamente al modelo clásico.

Si el principal objetivo de la estadística es hacer inferencias acerca de una población, con base en la información contenida en una muestra, la probabilidad es el mecanismo adecuado para ello.

Muchos experimentos en las ciencias del comportamiento, concluyen ya sea en resultados numéricos o en valores nominales a los que fácilmente se les asignan valores numéricos. Estos valores pueden ser representados por una variable aleatoria. La diferencia entre los dos tipos de variables aleatorias, discretas y continuas, es que se asignan probabilidades a valores individuales e intervalos, respectivamente.

Las distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias pueden derivarse matemáticamente utilizando la teoría de probabilidad, o aproximarse de manera empírica repitiendo el experimento un gran número de veces y construyendo un histograma de la frecuencia relativa de los resultados. Estas distribuciones son modelos de la población y se caracterizan por la media y la desviación estándar.

Por último, no son las probabilidades numéricas el principal objeto de la teoría; su propósito es descubrir leyes generales y elaborar modelos teóricos satisfactorios.

[†] Erróneamente se le suele llamar *toma de decisiones*.

Ejercicios

6.1 En una caja hay 10 canicas rojas, cinco blancas y cinco azules. Si R es el conjunto de todas las canicas rojas, B el de las blancas y A el de las azules, calcule:

a) N
b) $P(R)$
c) $P(B)$
d) $P(A)$

6.2 Al ingresar al primer año de la escuela primaria, se les realiza un examen médico a niños de 6 años de edad. Suponga que hay 10% de probabilidad de que un niño tenga deficiencia visual específicamente en un ojo, mientras que la probabilidad de que sea en ambos ojos es 7%.

a) ¿La deficiencia en ambos ojos resulta ser un evento independiente?
b) Calcular la probabilidad de que ambos ojos presenten deficiencia.
c) Calcular la probabilidad de que uno de los dos ojos esté afectado.

6.3 En un cesto hay 30 gatitos. Si va a sacarse uno al azar, y M es el evento "sacar una gatita" y H es "sacar un gatito", calcule:

a) N b) $n(m)$ c) $n(H)$ d) $P(M)$ e) $P(H)$

6.4 Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda y un dado simultáneamente; si E_1 es el hecho de que salga "águila" en el lanzamiento de la moneda y E_2 es el hecho de obtener 3 o 6 en el lanzamiento del dado, explique qué significado tiene cada uno de los siguientes eventos:

a) $\overline{E}_1$ b) $\overline{E}_2$ c) $P(E_1 \cap \overline{E}_2)$

6.5 En el supermercado existen cuatro marcas diferentes de agua purificada para beber, en presentación de un litro y medio. Si considera que éstas tienen la misma calidad y una persona desea adquirir una sin considerar las características en especial (A, B, C, D):

a) *Describa el espacio muestral y sus probabilidades correspondientes.*
b) Para el caso de que tenga que adquirir tres litros, ¿cuál será el espacio muestral y las probabilidades correspondientes si:
  i) los tres litros deben ser de marcas diferentes?
  ii) las marcas se pueden repetir?

6.6 Dados $S = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{3\}$, $C = \{2\}$, encuentre:

a) $P(C)$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(\overline{A})$
d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
f) $P(B \cup C)$

6.7 Dado un evento en el que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, calcule:

a) $P(\overline{A})$
b) $P(\overline{B})$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
f) $P(A \cap \overline{B})$
g) $\overline{P(A \cup B)}$
h) $P(\overline{A} \cup B)$

6.8 Después de que 100 ratones corrieron por un laberinto, se detectaron los siguientes datos: 50 ratones eran machos, 50 fueron previamente entrenados, 42 tomaron a la izquierda en la primera oportunidad, 21 eran machos previamente entrenados, siete machos siguieron a la izquierda, 30 ratones previamente entrenados tomaron a la izquierda y 5 machos previamente entrenados se fueron a la izquierda.

a) Ubique los datos en un diagrama de Venn.
b) Ubique los datos en un diagrama de Carroll.
c) Calcule la probabilidad de que sea hembra, esté previamente entrenada y haya tomado a la izquierda.
d) Calcule la probabilidad de que sea macho, no esté entrenado y tomará a la izquierda.
e) Calcule la probabilidad de que sea hembra, esté entrenada y no haya tomado a la izquierda.

6.9 Se realizó una entrevista a 885 amas de casa y se recabó la información siguiente:

600 veían telenovelas
400 series policiacas
620 programas deportivos
195 telenovelas y series policiacas
190 series policiacas y programas deportivos
500 telenovelas y deportivos
y 150 ven los tres programas.

Calcular la probabilidad de:

a) Que vean únicamente telenovelas.
b) Que vean telenovelas y series policiacas.
c) Que no vea ningún programa.
d) Que vean series policiacas y programas deportivos.
e) Que vean series policiacas y programas deportivos, pero no telenovelas, o telenovelas y deportes, pero no policiacas.

6.10 A dos pacientes del mismo hospital, un hombre y una mujer, se les ha diagnosticado cáncer en el estómago. Los médicos especialistas pronostican que vivirán, cuando menos un año más, y la probabilidad es la siguiente: para el hombre 30% y para la mujer 40%.

Si se considera que los eventos son independientes, calcule que:

a) Los dos vivan
b) El hombre no viva
c) La mujer no viva
d) Ni la mujer ni el hombre vivan
e) Al menos uno viva
f) Ambos no vivan
g) Ubique las probabilidades en un diagrama de Venn-Euler

6.11 Un noticiero anuncia el pronóstico del tiempo. Se estima la probabilidad de que llueva hoy $P\ (E_2) = 0.20$, de que llueva mañana $P\ (E_1) = 0.22$ y de que llueva hoy y mañana $P\ (E_1 \cap E_2) = 0.14$

a) Complete la siguiente tabla:

	Llueva mañana	No llueva mañana	Total
	E_1	$\overline{E}_1$	
Llueva hoy E_2	$(E_1 \cap E_2)$ 0.14		0.20
No llueva hoy $\overline{E}_2$			
	0.22		1

b) Si la probabilidad de que llueva mañana (dado que llueva hoy), es $P\ (E_1 \mid E_2) = 0.7$ y de que no llueva mañana (dado que no llueva hoy), es 0.9, calcule la probabilidad de que llueva mañana dado que no llueva hoy, y de que llueva mañana dado que llueva hoy. Utilice un diagrama de árbol.
c) Calcule la probabilidad de que llueva mañana.

6.12 En un examen de estadística, aplicado a 300 alumnos, se obtuvieron las calificaciones de la tabla siguiente:

Eventos	Hombres (E_6)	Mujeres (E_7)	Total
E_1 : MB	20	5	25
E_2 : B	15	50	65
E_3 : S	5	90	95
E_4 : NA	0	80	80
E_5 : NP	0	35	35

a) Obtenga $P\ (E_1)$
b) Obtenga $P\ (E_1 \cup E_6)$
c) Obtenga $P\ (E_1 \cap E_6)$
d) Obtenga $P\ (E_6 \mid \Omega)$
e) $P\ (E_1 \cup E_6 \mid \Omega)$
f) $P\ (E_1 \mid E_6)$
g) $P(E_6 \mid E_1)$

donde Ω = Universo

6.13 En el departamento de fotocopiado de una universidad existen tres copiadoras que fueron adquiridas al mismo tiempo, con las mismas características técnicas para una gran demanda de trabajo. Este tipo de copiadora está fuera de servicio 10% del tiempo de uso (por mantenimiento y reparación). Suponga la posibilidad de que ninguna de las fotocopiadoras, cuando están fuera de servicio, dependa de la condición actual de las otras dos. El funcionamiento de cada una es independiente entre sí. Calcule la probabilidad de que:

a) Las tres fotocopiadoras estén fuera de servicio.
b) La número 1 esté fuera de servicio, pero la 2 y 3 sigan funcionando.
c) Las número 1 y 2 estén fuera de servicio y la 3 siga funcionando.
d) Una de las tres esté fuera de servicio.
e) Dos de las tres estén fuera de servicio.
f) Al menos una esté fuera de servicio.
g) Por lo menos dos estén fuera de servicio, donde: x = fotocopiadora 1 funcionando. Obviamente, $\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}$ significan que no funciona la fotocopiadora, respectivamente.

6.14 Considerando el ejercicio 6.2, sea A el ojo derecho afectado y B el ojo izquierdo afectado.

a) Calcular la probabilidad de que el ojo izquierdo esté afectado, dado que el ojo derecho también lo esté.
b) Calcular la probabilidad de que el ojo izquierdo esté afectado, dado que el ojo derecho no.
c) Si el riesgo relativo de B, dado A, se define como $p\ (B \mid A)\ /\ p\ (B \mid \bar{A})$, calcule el riesgo relativo de que el ojo izquierdo esté afectado porque el ojo derecho también lo esté.

6.15 La probabilidad de que una persona con síndrome de inmunodeficiencia adquirida tenga una reacción positiva es del 89%; la probabilidad de que una persona sin sida tenga una reacción positiva es del 2%; en una comunidad del continente africano, el 20% tiene sida. Calcule todos los eventos posibles (aplique el teorema de Bayes).

6.16 Sean dos eventos A y B con su no ocurrencia $\overline{A}$ y $\overline{B}$ (los eventos A y B no son mutuamente excluyentes).

a) Ubique las probabilidades en una diagrama de Carroll (tabla de dos entradas).
b) Deduzca la probabilidad condicional correspondiente.
c) Deduzca el teorema de Bayes correspondiente.

6.17 En una empresa los empleados tienen las características siguientes:

317 son hombres
316 son casados
25 son mujeres casadas sin profesión
72 son hombres casados sin profesión
83 son hombres profesionales solteros
15 son mujeres profesionales solteras
125 son hombres profesionales casados
49 son mujeres solteras sin profesión

a) Calcule el número total de empleados.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea profesional?

6.18 Con base en su experiencia un médico ha recabado la siguiente información, relativa a las enfermedades de sus pacientes: 5% creen tener cáncer y lo tienen, 45% creen tener cáncer y no lo tienen, 10% no creen tenerlo y lo tienen y, finalmente, 40% creen no tenerlo y es cierto. De entre los pacientes del médico, estos porcentajes implican las siguientes probabilidades para un paciente seleccionado al azar. Calcule:

a) P (lo tenga | crea).
b) P (lo tenga | no crea).
c) P (lo crea | no tenga).
d) P (lo crea | lo tenga).

6.19 Suponga que la ciencia médica ha desarrollado una prueba para el diagnóstico del cáncer que tiene 95% de exactitud, tanto en los que tienen cáncer como entre los que no lo tienen. Se sabe que el 0.005 de la población realmente tiene cáncer.

a) Calcule la probabilidad de que determinado individuo tenga cáncer si la prueba dice que lo tiene.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que determinado individuo no tenga cáncer si la prueba dice que lo tiene?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que determinado individuo no tenga cáncer si la prueba dice que no lo tiene?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que determinado individuo tenga cáncer si la prueba dice que no lo tiene?

6.20 Un apostador de carreras de caballos estima que la probabilidad de que gane hoy es de 30%, la probabilidad de que gane con el mismo caballo la siguiente semana es de 40%, y de que gane hoy y la siguiente semana es de 8%. Calcule todos los eventos posibles.

6.21 Se selecciona al azar un estudiante de una escuela preparatoria, en la cual 3% del total padece insomnio. Se aplica una prueba psicológica para detectar dicho padecimiento; la probabilidad de que el resultado sea positivo, dado que tiene insomnio, es de 95%; la probabilidad de que una persona sin insomnio, pero con resultados positivos, es de 2%, calcule todos los eventos posibles.

6.22 Un apostador de carreras de galgos estima que la probabilidad de que gane hoy es de 0.40, la probabilidad de que gane la siguiente semana es de 0.30 y de que gane hoy y la siguiente semana es 0.08. Calcule todos los eventos posibles.

6.23 Se aplica una prueba de aptitud para candidatos a ingresar en una universidad. Dicho examen lo aprueba el 60% de los aspirantes. De los que exentaron, 80% termina exitosamente el semestre; se selecciona una muestra aleatoria de los aspirantes que no aprobaron, pero cursan el semestre, y 50% de este grupo lo termina con éxito. Calcule todos los eventos posibles.

6.24 Veinte por ciento de los empleados de una compañía son profesionales. De éstos, 75% están asignados a la dirección general. De los que no son profesionales 20% está también en la dirección general.

a) Elabore un diagrama de árbol.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea profesional y esté asignado a la dirección general?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea profesional y no esté asignado a la dirección general?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea profesional y esté asignado a la dirección general?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que sea profesional, dado que está asignado a la dirección general?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que esté asignado a la dirección general, dado que es profesional?
g) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté asignado a la dirección general, dado que es profesional?
h) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea profesional, dado que está asignado a la dirección general?
i) ¿Cuál es la probabilidad de que esté asignado a la dirección general, dado que no es profesional?

6.25 Una psicóloga aplica un examen de aptitud para un trabajo técnico. Su experiencia es que la probabilidad de que un candidato pueda aprobar el examen es de 0.6. Si determinado candidato aprueba el examen, la probabilidad de que realice el trabajo satisfactoriamente es de 0.80. Si no pasa el examen, la probabilidad de que no realice el trabajo satisfactoriamente es de 0.40.

a) Haga un diagrama de árbol.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que pase el examen, dado que realiza satisfactoriamente el trabajo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que pase el examen, dado que no realiza satisfactoriamente su trabajo?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que realice satisfactoriamente su trabajo, dado que pasó el examen?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que no realice su trabajo satisfactoriamente, dado que pasó el examen?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que realice su trabajo satisfactoriamente, dado que no pasó el examen?
g) ¿Cuál es la probabilidad de que no realice su trabajo satisfactoriamente, dado que no pasó el examen?

6.26 Las estudiantes de la Facultad de Psicología fueron clasificadas en altas, bajas, hermosas, listas, orgullosas y tímidas.

22 son hermosas, listas y altas
17 son hermosas, listas y bajas
13 son altas, orgullosas y listas
4 son orgullosas, altas y tímidas
18 son orgullosas, listas y bajas
11 son hermosas, tímidas y altas
7 son bajas, hermosas y tímidas
5 son tímidas, bajas y orgullosas

a) Haga un diagrama de Carroll.
b) Calcule todos los eventos posibles y sus probabilidades correspondientes.

6.27 En un vuelo de cierta línea aérea viajan 18 muchachos, 178 hombres, 10 mexicanos del sexo masculino, dos muchachos mexicanos, 26 personas de nacionalidad mexicana y 14 muchachas extranjeras, sin contar la tripulación.

a) Haga un diagrama de Carroll.
b) Describa todos los eventos posibles y sus probabilidades correspondientes.

6.28 En un hospital se desea realizar un estudio sobre colesterol en 1045 hombres sanos de 40 a 60 años de edad. A continuación, se presenta una tabla con los datos obtenidos.

Niveles de colesterol en hombres sanos (de 40 a 60 años)

Colesterol (mg/100 ml)					
LIR	***LSR***	***MC***	**f**	**Frecuencia relativa (porcentaje)**[a]	**Frecuencia acumulada (porcentaje)**[a]
119.5	139.5	129.5	10	1	1
139.5	159.5	149.5	21	2	3

---

[a] Valores aproximados.

(continúa)

(continuación)

159.5	179.5	169.5	37	3.5	6.5	
179.5	199.5	189.5	97	9.3	15.8	
199.5	219.5	209.5	152	14.5	30.3	
219.5	239.5	229.5	206	19.7	50.0	
239.5	259.5	249.5	195	18.7	68.7	
259.5	279.5	269.5	131	12.5	81.2	
279.5	299.5	289.5	96	9.2	90.4	
299.5	319.5	309.5	47	4.5	94.9	
319.5	339.5	329.5	30	2.9	97.8	
339.5	359.5	249.5	13	1.2	99.0	
359.5	379.5	369.5	6	0.6	99.6	
379.5	399.5	389.5	4	0.4	100%	
				100%		

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada al azar tenga un nivel de colesterol por debajo de 160 mg/100 ml?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada al azar tenga un nivel de colesterol mayor de 340 mg/100 ml?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada al azar tenga un nivel menor de 160 mg/100 ml o mayor de 340 mg/100 ml?

6.29 En un centro de salud se desea hacer un estudio sobre las necesidades médicas y dentales que existen en su población, considerando también el sector donde laboran. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla siguiente.

Necesidades			
	Dental	Médica	Total
Público	470	280	750
Privado	110	140	250
Total	580	420	1 000

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada al azar trabaje en el sector público?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada al azar necesite atención médica?

c) Calcule la probabilidad de $P(A \cup B)$ (según los incisos anteriores).
d) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una persona al azar que necesite servicio dental y trabaje en el sector privado?

6.30 Dadas las matrices siguientes, construya su diagrama de transición:

a) $$\begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.250 & 0.750 \end{bmatrix}$$

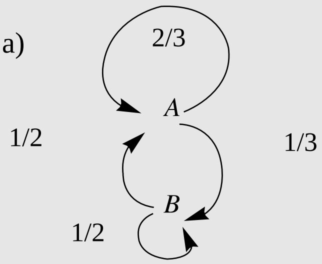
b) $$\begin{bmatrix} 0.167 & 0.500 & 0.333 \\ 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.417 & 0.250 & 0.333 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 0.500 & 0.300 & 0.200 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.500 & 0.500 \\ 0.33\overline{3} & 0.33\overline{3} & 0.33\overline{3} & 0.33\overline{3}\,\text{[a]} \\ 0.250 & 0.750 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

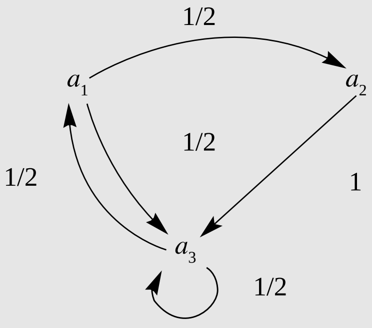
d) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.31 Dado el diagrama de transición, encuentre su matriz:

a)



b)



6.32 Cualquier empleado del área A tiene una probabilidad de permanecer ahí de 0.3 y de ser cambiado a B de 0.7; un empleado de B tiene 0.5 de probabilidad de ser transferido a A y 0.5 de ser transferido a C. Ningún empleado permanece en B por una segunda semana consecutiva. En el caso de los empleados del área C, la probabilidad es de 0.2 de ser transferidos a A, 0.3 de ser transferidos a B y 0.5 para permanecer en ella.

Considere cada reubicación del personal como un ensayo en el cual el resultado está controlado por probabilidades. Primero vea la naturaleza de las condiciones

---

[a] El número $0.33\overline{3}$ significa que el número 3 se repite.

que controlan las transferencias; observe que la probabilidad de ser transferido a cada una de las áreas depende solamente del área a la cual es asignado el candidato en el tiempo de la transferencia. No es necesario considerar la cantidad de tiempo que el candidato ha permanecido en cada área en el pasado, asimismo el único efecto de asignación anterior es que la ubicación de la semana previa está en el área actual.

Note que esta política describe una secuencia de transferencias que se habrán de efectuar con el mismo conjunto de probabilidades. El patrón de transferencia no varía.

a) Construya la matriz estocástica.
b) Haga el diagrama de transición.
c) Realice un diagrama de árbol.

6.33 Alina y Kitzia son dos jugadoras de tenis del mismo nivel y de características parecidas. Son escogidas al azar para sostener algunos juegos; sin embargo, cada vez que Alina gana un juego, adquiere mayor confianza en sí misma y la probabilidad de que gane el siguiente juego es 0.60. Por otro lado, cada vez que Alina pierde un juego se deprime y la probabilidad de que gane el siguiente disminuye a 0.30

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Alina gane en el primer juego?
b) Construya la matriz de transición para Alina.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane en el segundo juego?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane en el tercer juego?
e) Construya un diagrama de árbol asignando las probabilidades correspondientes.

6.34 Se recopilaron datos durante 15 temporadas de lluvia en el norte de México. Una buena descripción de la ocurrencia de lluvias está dada por una cadena de Markov de orden dos. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

Día posterior

Dia anterior

$$\begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ \hline E_1 & 1049 & 350 \\ E_2 & 351 & 687 \end{array}$$

a) Calcule la matriz de transición, si E_1 = estado seco y E_2 = mojado.
b) Haga un diagrama de transición.

6.35 Por informaciones recientes se sabe que en la ciudad de México y zona metropolitana, 0.1% de sus habitantes transfirieron su residencia a provincia en un año; en cambio, 0.8% de los habitantes de provincia se mudaron a la ciudad de México y zona metropolitana. Si dichos porcentajes permanecen constantes, determine la distribución de probabilidad de los residentes de provincia (75%) y de la ciudad de México con su zona metropolitana (25%).

$A = (0.25 \qquad 0.75)$

a) Construya la matriz de transición.
b) A los 3 años.
c) A los 10 años.

6.36 Suponga que la probabilidad de que un padre con intolerancia a la leche herede a su hijo dicha deficiencia enzimática, es de 0.7; la probabilidad de otro padre sin ninguna deficiencia es de 0.4:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el padre intolerante tenga un bisnieto similar a él?
b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?
c) ¿Depende de que los abuelos sufran la misma intolerancia?

6.37 Una ensambladora de automóviles promueve un modelo (E_1) de auto. El resultado de dicha promoción es que 75% de las personas que prefirieron ese modelo el primer año de su fabricación, adquieran el modelo reciente al siguiente año. De las personas que adquirieron otra marca (E_2) el año anterior, 35% cambia al modelo E_1 al siguiente año.

¿Qué porcentaje de automovilistas adquirirán el modelo E_1 después de dos años, si 50% lo adquiere ahora?

a) Construya la matriz de transición.
b) Dibuje un diagrama de árbol.
c) Concluya.

6.38 En un estudio realizado con mujeres en la ciudad de México, se presentó la siguiente tabla de proporción respecto de la actitud de aceptación hacia el aborto:

	Escolaridad de las hijas		
Escolaridad de las madres	Primaria	Bachillerato	Profesional
Primaria	0.486	0.699	0.011
Bachillerato	0.247	0.503	0.054
Profesional	0.068	0.484	0.448

a) ¿Cuál será la actitud de la siguiente generación?
b) ¿Cuál será la actitud de la quinta generación?

6.39 En una familia se observó, durante la primera generación, una enfermedad hereditaria (VIH). Suponga que cada síntoma puede ser considerado una unidad de tiempo, en una cadena de Markov con cuatro síntomas: sarcoma de Kaposi (S), cuadro gripal (G), neumocistitis (N), pérdida de peso (P).

A continuación se muestra la matriz de probabilidad de cada síntoma en la primera generación:

$$\begin{array}{c|cccc|} & S & G & N & P \\ S & 0.75 & 0.10 & 0.10 & 0.05 \\ G & 0.05 & 0.75 & 0.15 & 0.05 \\ N & 0.20 & 0.40 & 0.30 & 0.10 \\ P & 0.10 & 0.30 & 0.20 & 0.40 \end{array}$$

Si comienza sus observaciones (primera generación) con sarcoma de Kaposi (S), calcule la probabilidad de que:

a) Aparezca un cuadro clínico gripal en la próxima generación.
b) El cuadro gripal aparezca en la segunda generación y sarcoma de Kaposi en la tercera.
c) El mismo cuadro aparezca en la segunda o en la tercera generación, o en ambas.
d) Aparezca primero en la tercera generación.

Capítulo 7

Distribuciones probabilísticas

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector identifique en qué consisten las variables aleatorias (discretas y continuas) a fin de continuar con el análisis y la comprensión de los contenidos y la solución de los ejercicios propuestos. También, en qué consiste la desigualdad de Chebyshev y las distribuciones de probabilidad.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Identificar la forma en que la desigualdad de Chebyshev pone de relieve el papel primordial de la desviación estándar como medida de dispersión.
- Interpretar el gráfico de la desigualdad de Chebyshev.
- Comprender el proceso de la distribución de probabilidad más sencilla (Bernoulli).
- Entender las características básicas de las distribuciones:
  a) binomial, b) Poisson y c) hipergeométrica.
- Explicar y calcular para cada distribución:
  a) media aritmética, b) varianza y c) desviación estándar.
- Aplicar a problemas específicos en cada una de las distribuciones mencionadas.
- Explicar en qué consiste la distribución normal estándar.
- Obtener la probabilidad, mediante el área bajo la curva, de la distribución normal estándar.
- Interpretar la aproximación binomial a la normal.
- Desarrollar el proceso de cálculo de la aproximación binomial a la normal.
- Conocer en qué consiste el proceso de corrección de continuidad.

INTRODUCCIÓN

Considere que el valor asociado con un aspecto particular de cada resultado, en el espacio muestral, varía y depende del resultado observado; es decir, una variable cuyo valor está determinado por el resultado de un experimento u observación es una variable aleatoria. Los valores que toma una variable aleatoria se asocian con eventos aleatorios, en el espacio muestral de un experimento realizado.

Existen dos clases de variables aleatorias.

1. Discretas
2. Continuas

En muchos problemas es necesario determinar las probabilidades de que una variable aleatoria tome valores específicos en su rango de valores posibles. Con ese fin, resulta útil conocer todos los valores posibles de una observación o experimento, así como de las correspondientes frecuencias relativas de una variable aleatoria y sus probabilidades respectivas. Dicho modelo se llama *distribución de probabilidad*. Ésta se considera como la expresión de una función aleatoria (discreta o continua) que tiene como dominio un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y por completo exhaustivos.

VARIABLE ALEATORIA

Para construir las distribuciones probabilísticas, que son el enlace entre la probabilidad y la estadística, es necesario entender el concepto de variable aleatoria.

Definición Una variable aleatoria es una regla bien definida para asignar valores numéricos a todos los resultados probables de un experimento.

Los distintos resultados que se obtienen al lanzar un dado forman una variable, que abarcará de 1 a 6, y que no son predecibles. A todo valor de una variable aleatoria corresponderá una probabilidad. Ese conjunto de todos los valores posibles recibe el nombre de *función* o *distribución de probabilidad* de la variable aleatoria.

Cualquier función de una variable aleatoria también lo será de resultados impredecibles y, por tanto, igualmente aleatoria. En general, cualquier operación algebraica entre dichas funciones dará lugar a otra variable aleatoria.

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Esta desigualdad muestra que, hasta cierto punto, la varianza controla cuán lejos se extienden las probabilidades.

Teorema Sea X una variable aleatoria, con una función (densidad)[†] de probabilidad $f(x)$, de tal manera que tanto $E(\mathrm{X}) = \mu_x$ y como var(μ_x) = σ_x^2 tienen un valor finito. Entonces:

$$p\,(|X-\mu_x| \leq k\sigma_x) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

o

$$p\,(|X-\mu_x| \leq k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$$

para cualquier constante $k \geq 1$.

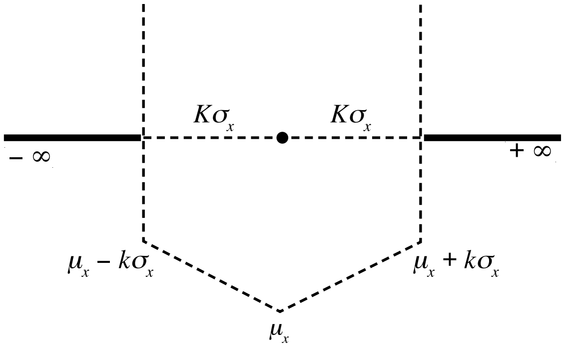
La demostración de Chebyshev es muy importante, ya que permite determinar los límites de las probabilidades de variables aleatorias discretas o continuas, sin tener que especificar sus funciones (densidad) de probabilidad. Para cualquier función de probabilidad este teorema calcula la probabilidad de que una variable aleatoria no se aleje más allá de k desviaciones estándar de la media.

Por ejemplo, si $k = 2$

$$p\,(|X-\mu_x| \leq 2\sigma_x) \geq 1-\frac{1}{4}$$

Para cualquier variable aleatoria x con media μ_x y varianza σ_x^2 finita, la desigualdad de Chebyshev en forma gráfica puede observarse en la siguiente figura:

Figura 7.1



Intervalo de la variable en el cual se cumple:

$$\left|X-\mu_x\right| > k\sigma_x \qquad \text{(I)}$$

De la expresión I despeje X aplicando la definición de valor absoluto:

$$|X-\mu| > k\,\sigma_x \begin{cases} X-\mu_x > k\,\sigma_x & \text{para } (X-\mu_x) > 0 \\ X > \mu_x + k\,\sigma_x & \\ -(X-\mu_x) > k\,\sigma_x & \text{para } (X-\mu_x) < 0 \\ -X+\mu_x > k\,\sigma_x & \\ X-\mu_x < -k\,\sigma_x & \\ X < \mu_x - k\,\sigma_x & \end{cases}$$

[†] Algunos autores llaman a la función de probabilidad, *función de densidad para variables continuas* o *masa de probabilidad*.

En suma:

$$|X-\mu_x|k\sigma_x \begin{cases} X > \mu_x + k\,\sigma_x & \text{para } (X-\mu_x) > 0 \\ X < \mu_x - k\,\sigma_x & \text{para } (X-\mu_x) < 0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

En la figura 7.1 se establece el valor de μ_x y dos puntos equidistantes, como $\mu_x - k\sigma_x$ y $\mu_x + k\sigma_x$ (que se obtiene de la expresión II). Quedaron así delimitados tres intervalos de variación de la variable aleatoria X:

$$(-\infty, \mu_x - k\,\sigma_x)$$

$$[\mu_x - \kappa\,\sigma_x, \mu_x + k\,\sigma_x]$$

$$(\mu_x + k\,\sigma_x, +\infty)$$

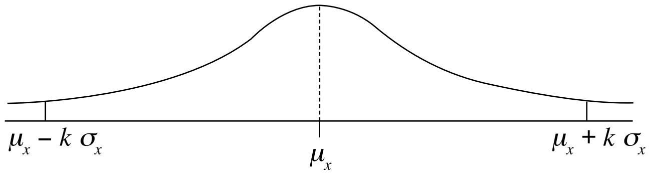
En estas condiciones, se calcula la varianza de la variable X, de la función de densidad $f(X)$.

Teorema de Chebyshev. Si μ_x y σ_x son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria X, entonces, para una constante positiva k cualquiera, la probabilidad es cuando menos $[1 - \frac{1}{k^2}]$ de que X tome un valor contenido en k desviaciones estándar de la media. En forma simbólica se tiene:

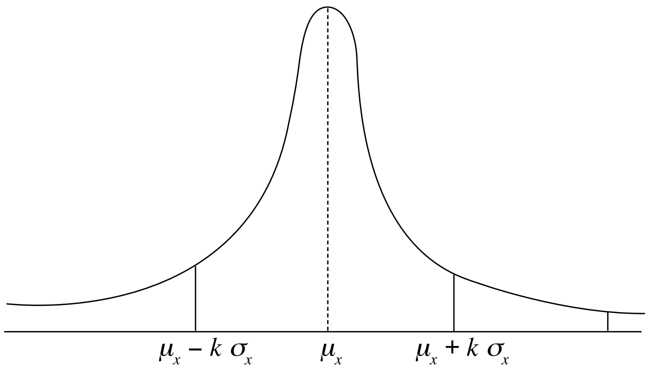
$$p\,(|X-\mu_X| < k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

La importancia de este teorema reside en que pone en relieve el papel primordial de la desviación estándar como medida de dispersión. Porque, efectivamente:

Caso 1



Caso 2



Para un valor de k determinado, si σ_x es grande, la masa de probabilidad existente entre los extremos $\mu_x - k\sigma_x$ y $\mu_x + k\sigma_x$ se repartirá con gran dispersión alrededor del punto μ_x, tal como lo marca el caso 1; si, en cambio, el valor de σ_x es pequeño para el mismo valor de k, la misma masa de probabilidad habrá de repartirse alrededor del punto μ_x con mayor concentración, como se observa en el caso 2. Así, se obtiene que a mayor σ_x, mayor dispersión o menor concentración y, por el contrario, a menor σ_x, menor dispersión o mayor concentración; lo cual se ve gráficamente en la amplitud o "estrechez" de los intervalos.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los grandes números, así como el teorema central del límite, se relacionan con la noción de la suma de variables aleatorias. Se sabe que si

$$X_i \text{ para toda } i = 1, ..., n$$

son variables aleatorias, la suma:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

es también una variable aleatoria. La ley de los grandes números afirma que el promedio de un número de variables aleatorias distribuidas en forma idéntica, e independientes, converge hacia un valor esperado de la distribución cuando aumenta el número de las variables aleatorias.

Teorema Suponga que X_1, X_2, ... X_k ... es una secuencia de variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente, cada una con media μ_X y varianza σ_X^2. Define la nueva secuencia de los valores X_i mediante:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Por tanto, $\overline{X}_1 = X_1, \overline{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), \overline{X}_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\ldots$

Entonces, $\lim\limits_{n \to \infty} p\,(\left|\overline{X}_n - \mu_X\right| > \in) = 0$ para cualquier ∈[†] > 0

Esto significa que al aumentar el tamaño de muestra ($n \to \infty$), $\overline{X}_n - \mu_x$, tiende a cero, o sea, $\overline{X}_n$ tiende a μ_x.

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Es la distribución de probabilidad más simple, donde la variable aleatoria tiene solamente dos resultados posibles: éxito o fracaso.

[†] Donde ∈ es un número positivo suficientemente pequeño.

Definición Si se considera una secuencia o serie de experimentos en la que cada experimento es el mismo y se realiza en las mismas condiciones, entonces la función de probabilidad es también la misma para cada uno de ellos, siempre que se realicen en forma independiente. A esta serie o secuencia se le conoce como *ensayos repetidos* (Bernoulli).

Una de las aplicaciones más importantes que en la actualidad presenta esta distribución, es el control de calidad. La manufactura de un producto determinado puede considerarse como resultado de ensayos repetidos, cada uno de los cuales se cuenta como un producto excelente, si pasa ciertas especificaciones, o defectuoso, si no las pasa. Así, en este proceso de producción existen sólo dos resultados posibles: defectuoso o no defectuoso.

En general, un experimento o ensayo en el que sólo ocurra uno de los dos eventos posibles se llama *ensayo de Bernoulli*, y a un experimento consistente en una serie de ensayos independientes, idénticos y dicotómicos, se le conoce como *proceso de Bernoulli*. Por lo general, a uno de los eventos o resultado de dicho proceso se le denomina *éxito* y al otro *fracaso*.

A la probabilidad de que ocurra éxito se le conoce como p y al no éxito o fracaso como q, con lo que se cumple la siguiente expresión:

$$p + q = 1 \text{ o } p = 1 - q \text{ y } q = 1 - p \text{ donde } p = p\,(E) \text{ y } q = p\,(F)$$

De ensayo a ensayo, tanto p como q permanecen constantes; a esta característica se le conoce como *estacionario*.

En resumen, todo proceso que se caracteriza como *dicotómico*, *independiente* y *estacionario* es un proceso de Bernoulli.

Si E = éxito y F = fracaso, entonces $p\,(E) = p$ y $p\,(F) = q$, la notación para cada uno de los siguientes casos:

i) $p\,(E, E) = p \cdot p = p^2$
ii) $p\,(E, F) = p \cdot q = q \cdot p = (F, E)$, donde el orden no importa
iii) $p\,(E, E, F) = p^2q$
iv) $p\,(E, E, E, E) = p^4$

En general

v) $p\,\underbrace{(E, E, E, \dots\ E)}_{x \text{ veces}} = p^x$ donde el número de éxitos es x

La probabilidad de una secuencia dada de n ensayos independientes de Bernoulli, depende sólo del número de éxitos (X) y de su probabilidad de éxito p.

Como X es el número de éxitos y $n - X$ es el de fracasos, entonces la expresión anterior queda $p^x\,q^{n-x}$.

En el caso de pruebas repetidas independientes con cada experimento idéntico a los demás, la determinación de los correspondientes espacios de resultados y sus probabilidades se obtiene sin saber qué ocurrió con los demás experimentos. Esto es posible si se efectúa un muestreo al azar y con reemplazo (reposición); entonces, se trata de un *modelo de pruebas de Bernoulli*, para lo cual es necesario codificar los dos posibles resultados de la variable Bernoulli en 1 y 0, donde X (Éxito) = 1 y X (Fracaso) = 0. Entonces, su función de probabilidad se define con el modelo siguiente:

X	$f(X)$	$Xf(X)$	$X-\mu$	$(X-\mu)^2$	$(X-M)^2\,f(X)$
1	P	P	$1-P$	q^2	q^2P
0	q	0	$0-P$	P^2	P^2q
		$\mu_x = P$			$q^2P + P^2q = (1-P)^2\,P + P^2\,(1-P)$
					$= (1^2 - 2p + P^2)\;P + P^2\;(1-P)$
					$= P - 2P^2 + P^3 + P^2 - P^3$
					$= P - P^2 = P(1-P) = Pq = \sigma_x^2$

y los parámetros (características) o momentos que describen la distribución Bernoulli son:

$$\mu_x = p \text{ (media aritmética)}$$

$$\sigma_x^2 = \text{var } X = pq \text{ (varianza) y}$$

$$\sigma_x = \sqrt{pq} \text{ (desviación estándar)}$$

■ Ejemplo 1

Por las características de su producción, 10% de los artículos fabricados son defectuosos; al inspeccionar seis de ellos, dos tienen defectos. La probabilidad de esta secuencia particular es la siguiente:

$$p = 0.10$$

$$q = 0.90$$

$$\binom{6}{2} p^2 q^4 = \frac{6!}{2!\,4!}\;(0.10)^2\;(0.90)^4 = 15\;(0.01)\;(0.656) = 0.0984$$

y como $\mu_x = p$, entonces $\mu_x = 0.1$

$$\sigma_x^2 = pq = 0.10 \times 0.90 = 0.09$$

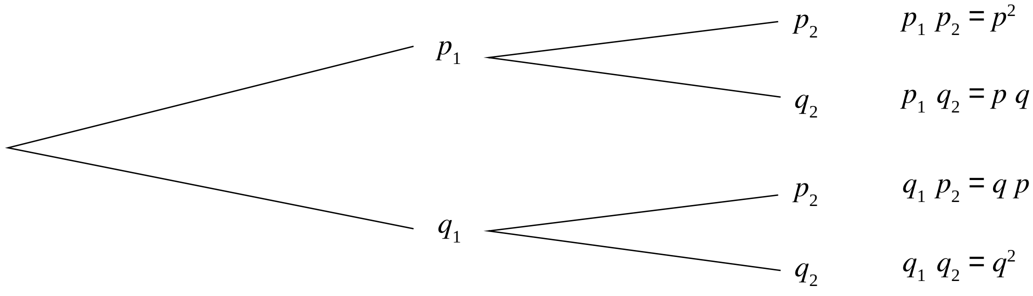
$$\sigma_x = \sqrt{pq} = \sqrt{0.09} = 0.30$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución binomial produce la descripción adecuada a las probabilidades de ocurrencia de los resultados posibles a un experimento, siempre que sean generados por un proceso Bernoulli. Aunque un experimento tenga muchos resultados probables, por ejemplo, el lance de un dado que tiene seis resultados posibles, quizá satisfaga esa primera condición del proceso de Bernoulli si se dicotomizan los resultados: E = obtener un 6, F = no obtener un 6, o también E = número par, F = número impar, etcétera.

■ Ejemplo 2

Si los resultados posibles de un experimento que se realiza dos veces se grafican por medio de un diagrama de árbol, se tiene lo siguiente:



si $p = p_1 = p_2 = 0.5$ entonces $p = 0.5 = \frac{1}{2} = 50\%$

$$q = q_1 = q_2\ (1 - p) = 1 - 0.5 \text{ entonces } q = 0.5 = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$p + q = 1 = 100\%$$

Entonces:

$$p \cdot p = (0.5)\ (0.5) = 0.25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$pq = (0.5)\ (0.5) = 0.25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$qp = (0.5)\ (0.5) = 0.25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$q \cdot q = (0.5)\ (0.5) = \underline{0.25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%}$$

$$1.0 = \quad 1 \quad = 100\%$$

Pero como $pq = qp$ (el orden no importa),

entonces $p_1 q_2 + q_1 p_2 = 25\% + 25\% = 50\% = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

es la probabilidad de obtener un éxito y un fracaso de un experimento que se realiza dos veces.

En relación con el diagrama de árbol anterior, como se trata de eventos independientes (basados en el postulado de Bernoulli) y por la definición de este tipo de eventos (véase el capítulo anterior):

$$p\ (2 \text{ éxitos}) = p\ (E_1 E_2) = p\ (E_1)\ p\ (E_2 \mid E_1) = (0.5)\ (0.5) = 0.25$$

$$p\ (1\text{o. éxito y 2o. fracaso}) = p\ (E_1 F_2) = p\ (E_1)\ p\ (F_2 \mid E_1) = (0.5)\ (0.5) = 0.25$$

$$p\text{ (1o. fracaso y 2o. éxito)} = p\,(F_1E_2) = p\,(F_1)\,p\,(E_2 \mid F_1) = (0.5)\,(0.5) = 0.25$$

$$p\text{ (0 éxitos) } p\text{ (2 fracasos)} = p\,(F_1F_2) = p\,(F_1)\,p\,(F_2 \mid F_1) = (0.5)\,(0.5) = 0.25$$

$$\text{y como } p\text{ (1 éxito y 1 fracaso)} = p\text{ (1o. éxito y 2o. fracaso)} + p\text{ (1o. fracaso y 2o. éxito)}$$

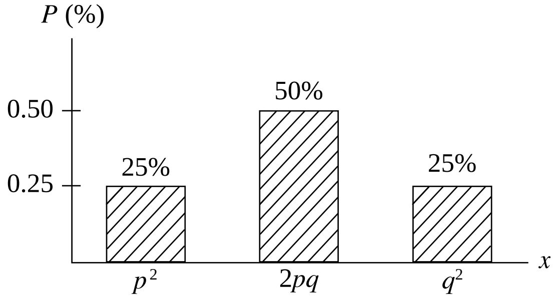
para $n = 2$ $p = q = 0.5$

p (2 éxitos) = 0.25

p (1 éxito) = 0.50

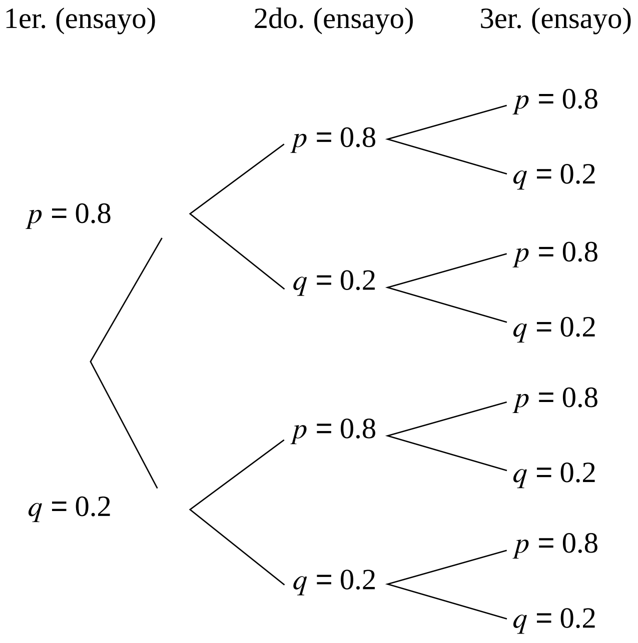
p (0 éxitos) = $\frac{0.25}{1}$

Estos resultados pueden mostrarse en una gráfica de barras.



■ Ejemplo 3

Si el experimento se ejecuta tres veces, y se supone que $p = 0.8 = 80\%$, entonces $q = 0.2 = 20\%$; el diagrama de árbol queda estructurado como se muestra a continuación:



Resultados Probabilidad

$ppp = p^3 = (0.8)\,(0.8)\,(0.8) = 0.512$

$ppq = p^2q = (0.8)\,(0.8)\,(0.2) = 0.128$

$pqp = p^2q = (0.8)\,(0.2)\,(0.8) = 0.128$

$pqq = pq^2 = (0.8)\,(0.2)\,(0.2) = 0.032$

$qpp = qp^2 = (0.2)\,(0.8)\,(0.8) = 0.128$

$qpq = q^2p = (0.2)\,(0.8)\,(0.2) = 0.032$

$qqp = q^2p = (0.2)\,(0.2)\,(0.8) = 0.032$

$qqq = q^3 = (0.2)\,(0.2)\,(0.2) = \underline{0.008}$

1.00

En resumen, para el caso $n = 3$:
$p = 0.8$ y $q = 0.2$
p (3 éxitos) = = 0.512
p (2 éxitos) = 0.128 + 0.128 + 0.128 = 0.384
p (1 éxito) = 0.032 + 0.032 + 0.032 = 0.096
p (0 éxitos) = = $\underline{0.008}$
1.000

La característica común de la distribución binominal es que puede generarse por medio de la expresión matemática conocida como *teorema del binomio* (capítulo 4) $(p + q)^n$, donde p = probabilidad de éxito, q = probabilidad de fracaso y n = número de ensayos.

Para el ejemplo 2, se tiene:

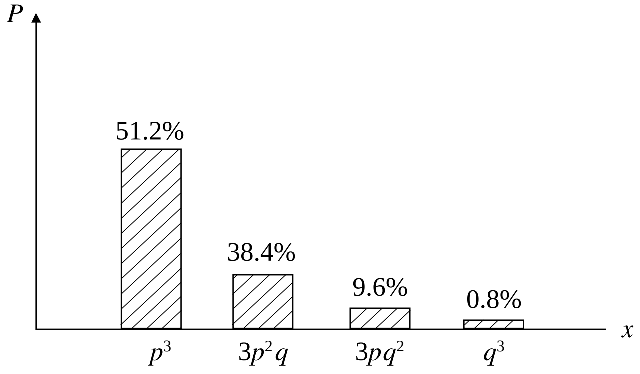
$$(p + q)^2 = p^2 + 2\,pq + q^2 \text{ como } p = 0.5 \text{ y } q = 0.5\ n = 2$$
$$= 0.25 + 0.50 + 0.25 = 1.0$$

Para el ejemplo 3, se tiene:

$$p = 0.8 \text{ y } q = 0.2,\ n = 3$$
$$(p + q)^3 = p^3 + 3\,p^2q + 3\,pq^2 + q^3$$
$$0.512 + 3\,(0.128) + 3\,(0.032) + 0.008 = 1.0$$
$$51.2\% + 9.6\% + 38.4\% + 0.8\% = 100\%$$

Generalizando $(p + q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{X} p^x q^{n-x}$

Entonces, $p\,(X$ [éxitos] $|\ n$ [ensayos Bernoulli], P $\left[= p(\acute{e}xito)\right] = \binom{n}{X} p^x q^{n-x}$



El teorema del binomio elimina la necesidad de construir un diagrama de árbol para generar todos los resultados posibles de un experimento.

Algunas veces no se necesita obtener la distribución completa de los resultados de un experimento binomial, pero sí un resultado particular. Para calcularlo, se dispone de la siguiente fórmula:

$$p\ (X \mid n, p) = \binom{n}{X} p^x q^{n-x}$$

donde:

n = número de ensayos del experimento
p = probabilidad de éxito de cualquier ensayo
q = probabilidad de fracaso de cualquier ensayo
X = número de éxitos de los n ensayos con una probabilidad constante de p
$P(X \mid n, P)$ = Probabilidad de obtener X éxitos de n ensayos con una probabilidad constante de p

$\binom{n}{X}$ significa dividir a un grupo de n [experimentos] en dos grupos, 1 con X [éxitos] elementos y el otro $(n - X)$ [fracasos] elementos (véase "Combinaciones" en el capítulo 4).

Entonces, la fórmula queda como:

$$p\ (X \mid n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

donde $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

■ Ejemplo 4

Suponga que al manufacturar un artículo, la probabilidad de que resulte defectuoso es de 20% = 0.2. Si en una línea de producción en un momento determinado se selecciona al azar una muestra de seis artículos, calcular la probabilidad de que cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis artículos estén defectuosos.

Solución:

Como el evento "salir defectuoso" se considerará un éxito, entonces: $p = 20\% = 0.2$ y $q = 80\% = 0.8$

$n = 6$ y $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p\ (6 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{0\ !\ (6-0)!}\ (0.2)^6(0.8)^0 = 1(0.000064)(1) = 0.000064 = 0.0064\%$$

$$p\ (5 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{1\ !\ (6-1)!}\ (0.2)^5(0.8)^1 = 6(0.00032)(0.8) = 0.001536 = 0.1536\%$$

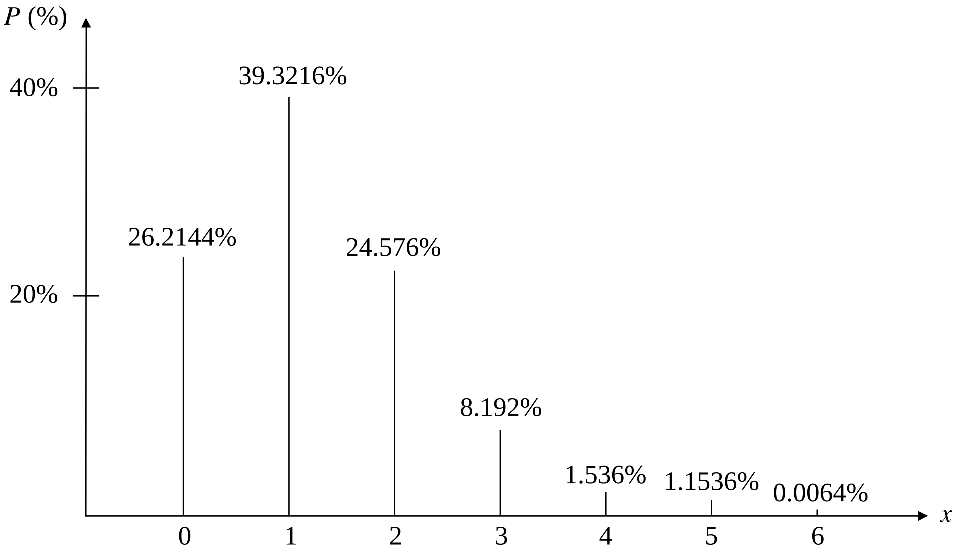
$$p\ (4 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{2\ !\ (6-2)!}\ (0.2)^4(0.8)^2 = 15(0.0016)(0.64) = 0.015360 = 1.5360\%$$

$$p\ (3 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{3\ !\ (6-3)!}\ (0.2)^3(0.8)^3 = 20(0.008)(0.512) = 0.081920 = 8.1920\%$$

$$p\ (2 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{4\ !\ (6-4)!}\ (0.2)^2(0.8)^4 = 15(0.04)(0.4096) = 0.245760 = 24.576\%$$

$$p\ (1 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{5\ !\ (6-5)!}\ (0.2)^1(0.8)^5 = 6(0.2)(0.32768) = 0.393216 = 39.3216\%$$

$$p\ (0 \mid 6,\ 0.2) = \frac{6!}{6\ !\ (6-6)!}\ (0.2)^0(0.8)^6 = 1(1)(0.262144) = \frac{0.262144}{1.00} = \frac{26.2144\%}{100\%}$$



Algunas veces estos cálculos se tornan tediosos, pero se obtienen mediante una tabla de distribución binomial.

Características o parámetros de la distribución binomial

Media aritmética $\mu_x = np$

Varianza $\sigma_x^2 = npq$

Desviación estándar $\sigma_x = \sqrt{npq}$

Calcular μ_x, σ_x^2 y σ_x para el ejemplo anterior:

$$n = 6$$

$$p = 0.2$$

$$q = 0.8$$

$$\mu_x = (6)(0.2) = 1.2$$

$$\sigma_x^2 = (6)(0.2)(0.8) = 0.96$$

$$\sigma_x = \sqrt{(6)(0.2)(0.8)} = 0.9798$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

También llamada distribución exponencial de Poisson, se caracteriza por el número esperado de sucesos en una unidad de tiempo o de espacio.

Puede demostrarse que $\binom{n}{X} p^x q^{n-X} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{X!}$

$p \rightarrow$ o
$n\,p \rightarrow \lambda$
$n \rightarrow \infty$

y se usa cuando n es grande, por ejemplo, $\frac{n}{p} > 500$

Esto significa que la ocurrencia al azar de muchos procesos reales está en función de una unidad temporal o espacial (longitud, superficie), que sigue un modelo exponencial con las siguientes consideraciones: los intervalos, tanto espaciales como temporales, deben ser tan pequeños como para que la probabilidad de dos o más eventos, en un intervalo dado, sea tan pequeña que se considere cero. Por consiguiente, el evento *acontece* o *no acontece* en el intervalo dado, sin afectar la probabilidad de que esto suceda en otro intervalo, por lo que se considerarán independientes.

Hasta aquí, todo parece indicar que es un experimento binomial. Aunque en este modelo lo que interesa determinar es el número de éxitos de un número dado de ensayos, dichos eventos son observables, mientras que en el modelo de Poisson el número de éxitos es la importancia primordial, pero resulta virtualmente imposible de calcular.

Al determinar el total de ensayos (todas las oportunidades de que dicho evento acontezca) es posible percibir cuándo ocurrió el evento, pero la dificultad prevalece cuando se quiere observar que el evento no ocurre.

Algunos ejemplos de aplicación del proceso de Poisson son el número de intercambios cromosómicos en una célula, la demanda de servicios en una institución, el número de arribos o salidas (o ambos) en un aeropuerto, la cantidad de meteoritos que caen en una hectárea en el desierto o en el mar, el número de autos que pasan por una caseta de cobro en un periodo, así como el número de fallas en un equipo o sistema.

El conocimiento de estas variables es de mucha utilidad, ya que mediante ellas se considera, por ejemplo, cuántas casetas de cobro o teléfonos públicos deben instalarse en un lugar establecido o el número de empleados a contratar en un tiempo determinado. Estos temas se estudian con más profundidad en una disciplina llamada *teoría de colas*.

A medida que n se incrementa y la longitud del intervalo t (temporal o espacial) disminuye, la probabilidad p de un acontecimiento en cualquier intervalo o ensayo (instancia) también disminuye.

Al respecto, cabe considerar que la subdivisión del intervalo en t subintervalos no tiene efecto alguno en el número de acontecimientos esperados en dicho periodo t.

Entonces, el término np permanece constante. El modelo de la distribución de Poisson se establece de la siguiente manera:

$$P(X) = \frac{e^{-np}(np)^x}{X!}, X = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

donde:

$P\ (X)$ = probabilidad total
X = número de éxitos, acontecimientos, ocurrencias
e = 2.71828 (constante, base de los logaritmos naturales)
p = probabilidad de ocurrencia

Como np es constante, es común llamarla λ o sea $\lambda = np$. Entonces, la fórmula anterior queda:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!}$$

donde $X = 1, 2, 3, \ldots$

Características o parámetros de la distribución de Poisson

Como $x \geq 0$ (no puede asumir valores negativos) y por la distribución binomial $\mu_x = np$, entonces $\mu_x = \lambda$

$$\sigma_x^2 = \lambda$$

$$\sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

■ Ejemplo 5

En una oficina de la Procuraduría Federal de Protección al Consumidor cuentan con un conmutador de gran capacidad. Diario se reciben muchas llamadas, 2% de las cuales (probabilidad obtenida por experiencias anteriores) se deben a problemas relacionados con inmobiliarias. Calcular la probabilidad de que en una hora determinada (12-13 horas), en la que se captan 300 llamadas: a) 10 de ellas se refieran a problemas inmobiliarios; b) 10 o más y menos de 19 corresponden a este tipo de situaciones.

Solución:

a) $n = 300$

$p = 2\% = 0.02$

$X = 10$

$\lambda = np = 300\ (0.02) = 6$

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!}$$

$$P(10) = \frac{e^{-6}6^{10}}{10!} = 0.04132$$

$$P(10) = 0.04132 = 4.132\%$$

b) aplicando sucesivamente para $X = 10, 11, ..., 18$ se tiene:
por ejemplo, que el número de llamadas de problemas inmobiliarios sea 10 o más y menos de 19.

$p\ (10) = 0.04132$
$p\ (11) = 0.02254$
$p\ (12) = 0.0113$
$p\ (13) = 0.0052$
$p\ (14) = 0.0022$
$p\ (15) = 0.0009$
$p\ (16) = 0.0003$
$p\ (17) = 0.0001$
$\underline{p\ (18) = 0.00004}$
0.0838

$p\ (10 \leq X < 19) = 0.0838$

$\mu_x = \lambda$ significa $\mu_x = 6$

$\lambda = \sigma_x^2$ significa $\sigma_x^2 = 6$

$\sigma_x = 2.44949$

APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A LA DE POISSON

La distribución de Poisson es una buena aproximación de la binomial, si n es grande y p cercana a cero. En forma práctica, si $\frac{n}{p} > 500$, la aproximación es excelente, ya que la distribución de Poisson constituye el caso límite de la binomial.

■ Ejemplo 6

Si se considera el ejemplo anterior:
$n = 300$
$p = 0.02$
$X = 10$
Al aplicar el modelo binomial resulta:

$$P\,(10 \mid 300, 0.02) = \binom{300}{10}\,(0.02)^{10}\,(0.98)^{290}$$

$$= \frac{300\,!}{10!\,290!} \times 1.02400 \times 10^{-17} \times 0.00285$$

$$= 0.04132$$

como

$$\frac{n}{p} = \frac{300}{0.02} = 15\ 000 >> 500$$

se usa Poisson

$$p\,(10) = \frac{e^{-6}\,6^{10}}{10!} = 0.04132 \quad = 0.04132$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

La distribución binomial se basa en los supuestos de que las observaciones son independientes entre sí y de que es un proceso estacionario, por lo que la probabilidad de éxito es constante. Esto resulta válido cuando se realiza un muestreo con reemplazo o cuando la población es infinita; sin embargo, cuando la población es finita, o se realiza un muestreo sin reemplazo, los ensayos sucesivos no son idénticos ni independientes y, por supuesto, la probabilidad de éxito varía de ensayo a ensayo.

En la mayor parte de los problemas de control de calidad, se realiza siempre muestreo sin reemplazo y se utiliza de manera amplia la distribución hipergeométrica.

Como ${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, entonces el modelo hipoergeométrico será:

$$P\,(r_1, r_2, r_3,\ \ldots\ , r_k) = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\cdots\binom{n_k}{r_k}}{\binom{n}{r}} \quad \text{donde} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} n_i = n \\ \sum_{i=1}^{k} r_i = r \end{cases}$$

donde $r = 0, 1, 2, ..., n$

■ Ejemplo 7

En un conjunto de 10 canicas, 8 son rojas y 2 verdes. De una muestra de 5 canicas, calcule la probabilidad de que 3 de ellas sean rojas.

$n = 10,\qquad n_1 = 8$ rojas, $\qquad n_2 = 2$ verdes

$r = 5,\qquad r_1 = 3$ rojas, $\qquad r_2 = 2$ verdes

$$p\ (r_1, r_2) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{8!}{3!\ 5!} \times \frac{2!}{2!\ 0!}}{\frac{10!}{3!\ 5!}} = 0.22222$$

Los parámetros o características de la distribución hipergeométrica son:

$$\mu_x = np$$

$$\sigma_x^2 = \frac{npq\binom{n}{r}}{n-1}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{npq\binom{n}{r}}{n-1}}$$

Calcular μ_x, σ_x^2 y σ_x $\qquad \mu_x = np = 10 \times 0.22222 = 2.2222$

$$\sigma_x^2 = \frac{10 \times 0.22222 \times 0.77778 \times 252}{9} = \frac{435.55}{9}$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = 48.39472}$$

$$\boxed{\sigma_x = 6.95663}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución normal es con referencia a la población, sin duda, la más conocida y usada de todas. Muchos fenómenos naturales tienden a dar como resultado una distribución normal. Entre otras, longitud, altura y grosor de animales o plantas; mediciones de cantidades de azúcar en la sangre; cantidad de glóbulos blancos; incidencia de las enfermedades del oído interno y medidas en el aspecto conductista, emocional o psicológico de las acciones, aptitudes o capacidades humanas. La distribución de los errores de medida (desviaciones en relación con un valor específico en los diámetros de pistones, cilindros o cañones de armas de fuego; pesos de productos empaquetados e incluso las longitudes de las cintas métricas) tiende a ser normal, al igual que la distribución del grado de perfección de diversos procesos de producción.

Debido a que la distribución normal describe de manera satisfactoria muchos fenómenos naturales, se ha convertido en un patrón de referencia para muchos problemas probabilísticos. Además, en ciertas condiciones, las distribuciones binomial y de Poisson se aproximan mediante la distribución normal.

En el capítulo 2 se agruparon datos y se dibujó una gráfica en forma de campana; en el capítulo 3, se describió la función y se encontraron algunos intervalos. Ahora, se estudiará la función como distribución de probabilidad con sus correspondientes propiedades.

La distribución normal es continua, ahí la variable aleatoria X es capaz de adoptar cualquier valor comprendido en el siguiente intervalo (véase el capítulo 3).

$$\{-\infty < X < \infty\}$$

Dos parámetros describen la distribución normal:

$$\mu_x = \text{media}$$

$$\sigma_x^2 = \text{varianza}$$

y se denota como:

$$(\mu_x, \sigma_x^2)$$

La función de densidad normal (μ_x, σ_x^2) es:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right]^2} \text{ donde } X \in \mathbb{R} \qquad \text{(III)}$$

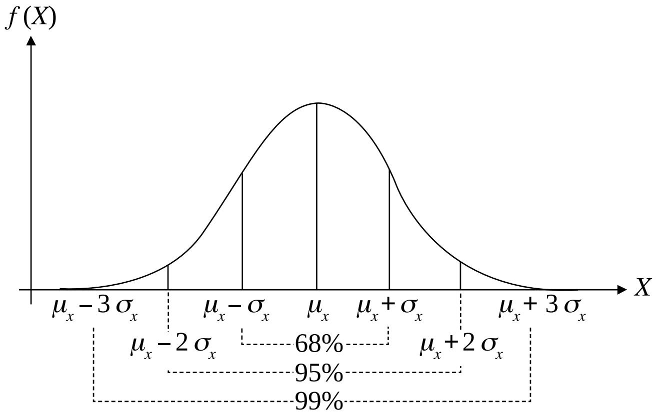
donde

$$\mu_x = E(X) \text{ tal que } -\infty < \mu < \infty$$

$$\text{var }(X) = \sigma_x^2, \quad \sigma_x^2 > 0$$

$$e = 2.71828, \quad \pi = 3.14159$$

La gráfica de la expresión III es la siguiente:

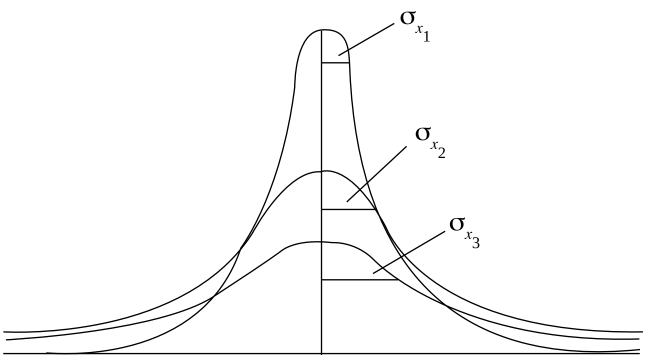


El área bajo la curva se llama *masa de probabilidad* o simplemente *probabilidad*. Ésta se calculará por medio de tablas, (Z).

Se retomará el concepto de la desigualdad de Chebyshev.

Caso 1

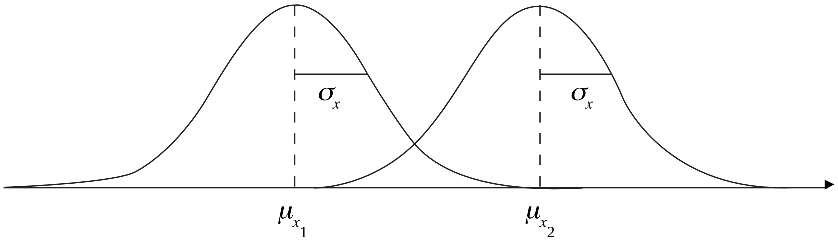
Funciones de densidad de tres variables normales con la misma media y diferentes desviaciones estándar ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$).



Como se afirmó al considerar la desigualdad de Chebyshev, cuanto mayor sea el valor de la desviación estándar, existe mayor dispersión de los datos. Ahora sucede lo mismo, con la única diferencia de que existe una función de densidad en particular.

Caso 2

Funciones de densidad de dos variables normales con diferente media y la misma varianza, por ejemplo ($\mu_1 < \mu_2$).



Por la forma de la distribución se observan dos propiedades:

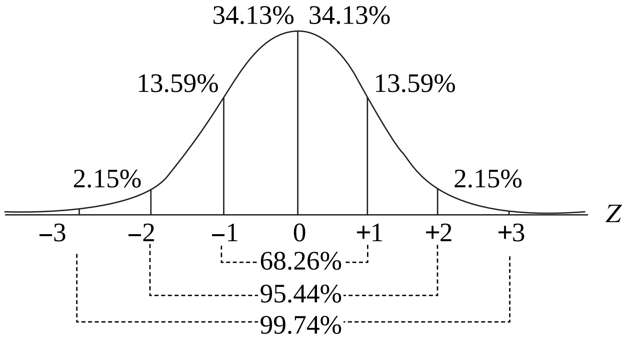
a) La distribución normal es simétrica alrededor de μ_x.
b) La media, moda y mediana coinciden por la forma simétrica.

Distribución Z

Si una variable X (puntuaciones, datos, calificaciones, etc.) se halla normalmente distribuida, entonces, las estadísticas tipificadas o estandarizadas estarán definidas por:

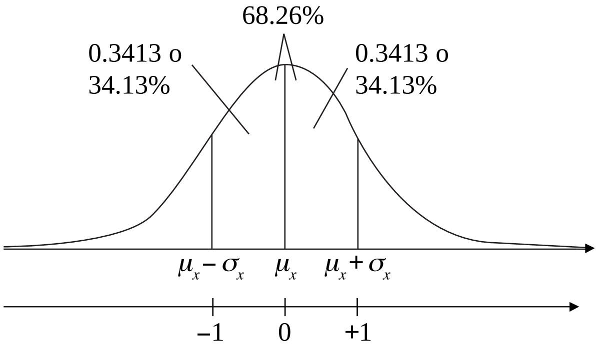
$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad \text{o} \quad Z = \frac{X - \overline{X}}{s}$$

Esta nueva variable estará normalmente distribuida con media 0 y varianza 1. Como se ve, Z es en realidad el número de desviaciones estándar en que se encuentra la puntuación X respecto de la media aritmética, la cual se presenta en la figura siguiente:



Para conocer el área bajo la curva que se encuentra entre la media aritmética (μ_x) y una desviación estándar ($\pm\sigma_x$), se ubica en la siguiente figura el valor asociado con $Z = 1$ (1 desviación estándar arriba o debajo de la media aritmética), y se obtiene el valor de 34.13%, o 0.3413.

Por lo general el valor de 34.13% se denota por 0.3413 cuando representa la probabilidad de encontrar una puntuación entre la media (μ_x) y la primera desviación estándar ($\pm\sigma_x$). El total (o suma) de probabilidades bajo la curva es igual a uno, mientras que cuando se denota el porcentaje, constituye la proporción de área bajo la curva, y su total será 100 por ciento.



■ Ejemplo 8

A un grupo de niños se les aplica una prueba de inteligencia (WISC); suponga que las puntuaciones se distribuyen en forma normal y tienen los parámetros siguientes: $\mu_x = 100$ y $\sigma_x = 15$.

En términos de CI[†], utilizando esta información se resolverán los siguientes problemas:

1. ¿Qué porcentaje de niños están en el intervalo $p\ (90 \le X \le 110)$?

Paso 1. Se calculan los valores de Z para 90 y 110, o sea:

$$X_1 = 90 \text{ y } X_2 = 110$$

Puntuación Z para 90:

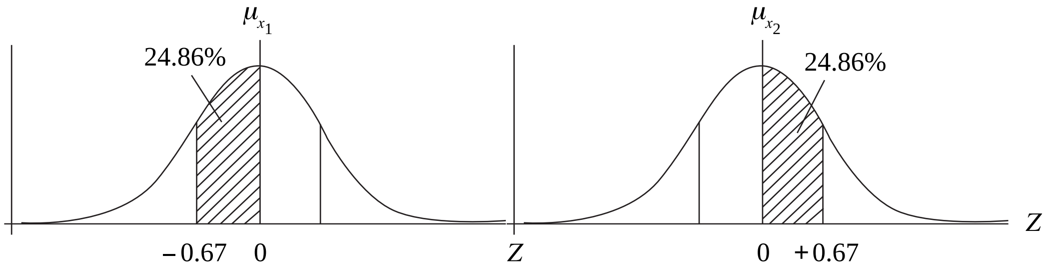
$$Z = \frac{X_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{90 - 100}{15} = \frac{-10}{15} = -0.67$$

Puntuación Z para 110:

$$Z = \frac{X_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{110 - 100}{15} = \frac{10}{15} = 0.67$$

Donde el signo de resta indica únicamente que la puntuación Z se encuentra a la izquierda de la media aritmética.

Paso 2. Se determina el porcentaje entre la media y cada una de las puntuaciones Z obtenidas anteriormente, utilizando la tabla Z se obtiene que el área bajo la curva entre la media y la puntuación Z (–0.67) es 24.86%; y para Z (0.67) es 24.86%, lo que da un total de 49.72 por ciento.



Será 49.72% el porcentaje esperado de niños que presentan un CI normal (entre 90 y 110).

El concepto de normalidad en las ciencias de la salud es un concepto netamente estadístico y se obtiene utilizando la distribución normal.

2. ¿Qué porcentaje de niños obtuvieron un CI mayor que 110, es decir, $p\ (X \ge 110)$?

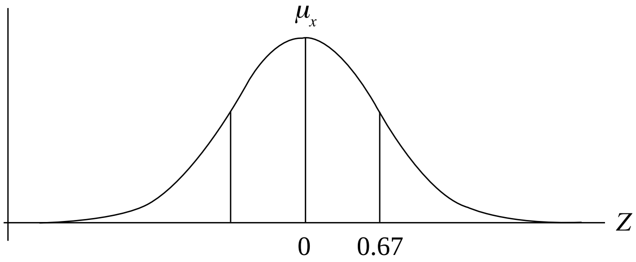
[†] $\text{CI} = \frac{\text{Edad mental}}{\text{Edad cronológica}} \times 100$

Paso 1. Se calculan los valores *Z* de 110.

Puntuación *Z* para 110:

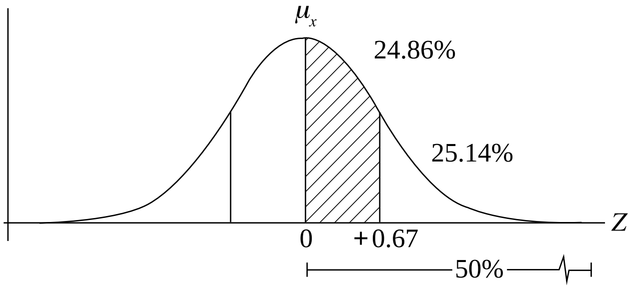
$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{110 - 100}{15} = \frac{10}{15} = 0.67$$

Paso 2. Se ubica en una gráfica el valor de *Z* obtenido:



Paso 3. Se localiza en la tabla *Z* el valor del área que habrá de encontrarse.

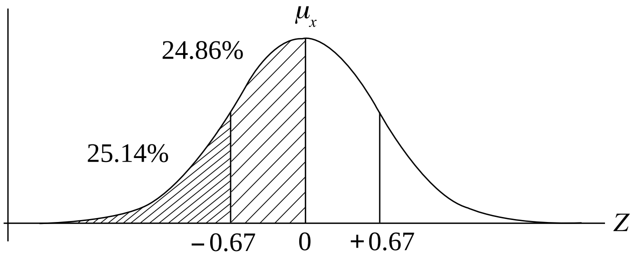
Como el área que se requiere es la del extremo derecho y el valor anterior, 24.86% es el área de la media a 110 y, dado que dicha área es de 50%, se le resta el valor de 24.86% y éste será el porcentaje del área buscada: 50 – 24.86 = 25.14 por ciento.



Esta área en la gráfica equivalente a 25.14% significa el porcentaje de niños superior al término medio.

3. ¿Qué porcentaje de niños tienen un CI menor que el término medio, o menos de 90; $p(x \leq 90)$?

$$Z = \frac{90 - 100}{15} = \frac{-10}{15} = -0.67$$



$P(X \leq 90) = 25.14\%$

Aproximación de la distribución binomial a la normal

Se considera una muestra aleatoria (al azar) de una población finita y el atributo o la característica observada deberá ser dicotómico, es decir, éxito o fracaso, a favor o en contra, etcétera.

Este resultado es una consecuencia del teorema central del límite.

Teorema Sea X una variable aleatoria binomial con media np y desviación estándar $\sqrt{np\,(1-p)}$. La distribución de la variable aleatoria tiende a la normal estándar cuando el número de ensayos independientes n se repite un número muy grande de veces ($n \to \infty$):

$$Z_n = \frac{X - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$$

■ Ejemplo 9

Una empresa periodística llevó a cabo una encuesta entre 400 personas seleccionadas de manera aleatoria en un estado acerca del control de armas. De las 400 personas, 220 se pronunciaron a favor de un control estricto.

¿Qué tan probable resulta el hecho de tener 220 o más personas a favor del control de armas, si la población en dicho estado se encuentra dividida en opinión de igual manera?

Las características del problema llevarían a una distribución binomial. Existe el atributo dicotómico a favor y en contra en cada ensayo; la encuesta se realizó a cada persona, por tanto, es discreto. Como puede observar, el número de encuestados es 400; si desea resolver el problema por medio de la distribución binomial, quedaría de la siguiente forma:

$$P\,(X \geq 220) = 1 - \sum_{i=0}^{219} \binom{400}{i} p^i (1-p)^{400-i}$$

Debido a que resultaría muy laborioso realizar los cálculos correspondientes, se recomienda en estos casos aplicar la aproximación de la binomial a la normal:

Sean $n = 400$

$P = 0.5$ $\quad np = 400\ (0.5) = 200$

$q = 0.5$

El valor de $p = 0.5$ corresponde al enunciado: "La población en ese estado se encuentra dividida de igual manera". Sustituya los valores:

$$p\,(X \geq 220) = 1 - p(X < 220)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{220 - 200}{\sqrt{400\ (0.5)\ (0.5)}}\right)$$

$$= 1 - p\left(Z < \frac{20}{10}\right)$$

$$= 1 - p\,(Z < 2)$$

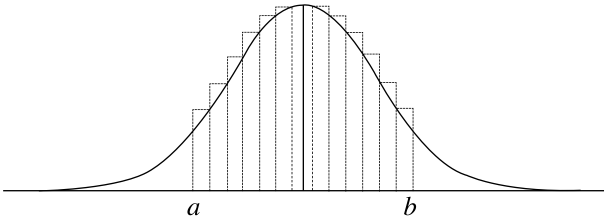
Se busca el valor de $p\ (Z < 2)$ en la tabla de la distribución normal:

$$p\ (X \geq 220) = 1 - p\ (Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

El valor de 0.0228 es una buena aproximación a la distribución binomial (probabilidad exacta).

Corrección de continuidad

Al realizar la aproximación existe una diferencia mínima, consistente en que los rectángulos salen de la curva (figura siguiente), por lo que tiene que efectuarse un ajuste, como se muestra en la expresión.



$$p\ (a \leq X \leq b) = p\left(\frac{a - np - 0.5}{\sqrt{np\ (1-p)}} \leq Z \leq \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

El ejemplo anterior se resolverá con la corrección de continuidad:

$$n = 400$$

$$p = 0.5$$

$$p\ (X \geq 220) = 1 - p\ (X < 220)$$

Para

$$np = 400\ (0.5)$$

$$b = 220$$

$$p\ (X \geq 220) = 1 - P\left(Z < \frac{220 - 200 + 0.5}{\sqrt{400\ (0.5)\ (0.5)}}\right)$$

$$= 1 - p\left(Z < \frac{20.5}{10}\right)$$

$$= 1 - p\ (Z < 2.05)$$

$$= 1 - 0.9798$$

entonces

$$\boxed{p\ (X \geq 220) = 0.0202}$$

■ Ejemplo 10

Si 23% de los pacientes con presión sanguínea elevada, tienen efectos colaterales nocivos por la ingestión de cierto medicamento, utilice la aproximación normal para obtener la probabilidad de que entre 120 de estos pacientes tratados con este medicamento, más de 32 presentarán efectos colaterales nocivos.

Solución:

Los datos que proporciona el problema son los siguientes:

$p = 0.23$
$n = 120$

Se plantea el problema

$$p\ (X \geq 32) = 1 - p\ (X < 32)$$

El mismo ejemplo sugiere utilizar la aproximación normal:

$$p\ (X \geq b) = 1 - p\left(Z < \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{np\ q}}\right)$$

Se sustituyen los valores en la expresión anterior:

$$p\ (X \geq 32) = 1 - p\left(Z < \frac{32 - (0.23)\ (120) + 0.5}{\sqrt{120\ (0.23)\ (1 - 0.23)}}\right)$$

$$p\ (X \geq 32) = 1 - p\left(Z < \frac{4.9}{4.6099}\right)$$

$$= 1 - p\ (Z < 1.0629092)$$

$$= 1 - 0.8554$$

entonces

$$\boxed{p\ (X \geq 32) = 0.1446}$$

La probabilidad de que 32 o mas pacientes presentan efectos colaterales nocivos es de 0.1446 (14.5%) de 120 pacientes tratados.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

El origen de esta función de probabilidad se halla en el proceso de Poisson; tal probabilidad se relaciona con la posibilidad de ocurrencia de un número específico de éxitos, donde este número es la variable aleatoria. Ahora bien, si se invierten los papeles, el número de éxitos no será la variable aleatoria, sino el tiempo; en otras palabras, una variable exponencial *X* es el intervalo de tiempo, o espacio requerido, para obtener un número específico de éxitos.

Definición Se dice que una variable aleatoria continua X, que toma todos los valores no negativos, tiene una distribución exponencial con parámetro θ positivo si su función de probabilidad está dada por:

$$f(X)\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{\left[\frac{-x}{\theta}\right]} & \text{en otro caso } \ X > 0\\ 0 & \end{cases}$$

$$f(X)\begin{cases}1 - e^{-\alpha X} & \text{en otro caso } X \geq 0 \text{ donde } \alpha = \dfrac{1}{\theta}\\ 0 & \end{cases}$$

■ Ejemplo 11

La vida de cierta marca de lámpara está distribuida exponencialmente con $\theta = 1\,000$ horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara dure menos de 1 000 horas?

$$p\ (X < 1000) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)} = 1 - e^{-\left(\frac{1000}{1000}\right)} = 1 - e^{-1} \Rightarrow$$

$$p\ (X < 1\,000) = \boxed{0.63212}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara dure más de 1 200 horas?

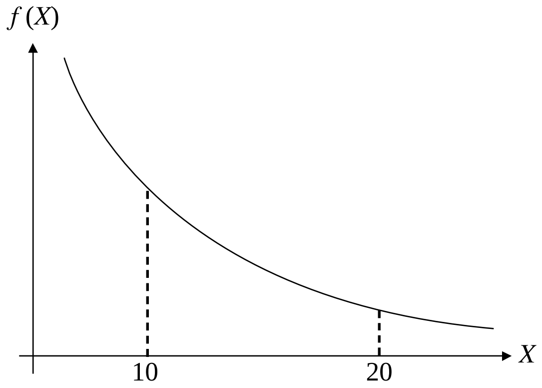
$$p\ (X > 1\ 200) = 1 - p(X \leq 1\ 200) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{1200}{1000}\right)}\right]$$

$$= e^{-1.2} \Rightarrow \boxed{p(X > 1\ 200) = 0.30119}$$

■ Ejemplo 12

Cierta computadora digital, que funciona 24 horas al día, sufre 10% descomposturas por hora. Si la computadora ha funcionado satisfactoriamente durante 10 horas, ¿cuál es la probabilidad de que continúe así durante las 10 horas siguientes?

$\alpha = 0.1$



$$p\ (10 < X < 20) = \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{10}\right)}\right] - \left[1 - e^{-\left(\frac{10}{10}\right)}\right]$$

$$= 0.86466 - 0.63212$$

entonces

$$\boxed{p\ (10 < X < 20) = 0.23254 \text{ o sea } 23.3\%}$$

■ Ejemplo 13

El recorrido (en miles de kilómetros) que obtienen los propietarios de automóviles con cierto tipo de neumático radial, es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con $\theta = 40$. Obtenga la probabilidad de que uno de estos neumáticos dure:

a) Cuando menos 20

$$p\ (X > 20) = 1 - p\ (X \leq 20)$$

como $\theta = 40 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{\theta} \Rightarrow \alpha = 0.025$

$$p\ (X > 20) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{20}{40}\right)}\right] = e^{-0.5}$$

$$\boxed{p\ (X > 20) = 0.6065306 \text{ o sea } 60.7\%}$$

b) Como máximo 30

$$p\ (X \leq 30) = 1 - e^{-\left(\frac{30}{40}\right)} = 1 - 0.4723665 = 0.5276334,\ 52.8\%$$

Resumen

Las distribuciones discretas de probabilidad, como la binomial, Poisson e hipergeométrica, se relacionan con el proceso de Bernoulli. En el caso de la binomial, las probabilidades individuales son los términos del desarrollo binomial (teorema del binomio). La hipergeométrica considera las muestras de una población finita y es posible aproximarse por la binomial cuando el tamaño de la muestra es pequeña respecto de la población. La distribución de Poisson considera las observaciones efectuadas en un continuo (por ejemplo, el tiempo), en lugar de una secuencia finita de ensayos; esta distribución puede utilizarse para aproximar a la binomial cuando el número de ensayos es grande y el parámetro "*p*" es cercano a cero o a uno.

Una distribución muy importante y necesaria para justificar el desarrollo de casi todas las distribuciones probabilísticas, es la función gama.

Ejercicios

7.1 Suponga que un grupo de estudiantes ha realizado un examen en el que los valores posibles son 0, 1, 2, ..., 10. Se elige una muestra de dos estudiantes, y se calcula la media de la muestra $\overline{X}$.

a) Describa el espacio muestral de la variable aleatoria X.
b) En una recta identifica el intervalo de todos los posibles resultados que puede tomar la variable aleatoria X.

7.2 Clasifica cuál de las siguientes variables aleatorias es discreta o continua.

a) Tiempo de reacción ante el mismo medicamento a un grupo de pacientes.
b) Cantidad de ozono en la atmósfera en la ciudad de México.
c) Número de personas que sufren de infarto en un municipio.
d) Cantidad de colesterol de una persona.
e) Número de cheques no pagados en una sucursal bancaria.

7.3 Dado un intervalo de una variable aleatoria x menor que 20 y mayor que –4, cuya media aritmética es $\mu = 8$ y $\sigma = 3$, encuentre el límite inferior y superior (aplicando la desigualdad de Chebyshev).

7.4 La proporción de fumadores en una ciudad es $p = 0.3$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 16$ personas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya $k = 4$ fumadores en la muestra? Suponga que, aunque la muestra se tomó sin reemplazamiento, la probabilidad $p = 0.3$ permanece igual.

7.5 La proporción de familias que usan el jabón A en cierta ciudad es $p = 0.2$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 20$ familias. ¿Cuál es la probabilidad de que $k = 5$ familias usen ese jabón?

7.6 La proporción de familias que usan los productos de la compañía K en cierta ciudad es $p = 0.7$. Se toma una muestra aleatoria de $n = 16$ familias. ¿Qué probabilidad hay que $k = 9$ de esas familias en la muestra, usen los productos de dicha compañía?

7.7 La proporción de estudiantes que reciben la calificación S es de $p = 0.7$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que haya $k = 6$ estudiantes con esa calificación en la muestra?

7.8 Los ojos color verde son una característica genética; suponga que dicho genotipo de los futuros padres de una familia, que planean procrear 6 hijos, es del 80%. Calcule todos los eventos posibles.

$n = 6$
$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$p = 0.8$
$q = 0.2$

Calcule μ y σ, graficar la distribución.

7.9 Los ojos color café son una característica genética; suponga que en dicho genotipo de los futuros padres de una familia, existe una probabilidad de ocurrencia del 75%. Calcule los eventos posibles si se planea procrear 6 hijos.

$n = 6$
$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$p = 0.75$
$q = 0.25$
Calcule μ y σ.
Grafique la distribución.

7.10 Se lanzan dos dados, sea X la suma que muestran los dos dados:

a) Encuentre la función de probabilidad en forma tabular.
b) Encuentre μ, σ^2 y σ.
c) Grafique la distribución.

7.11 El 12% de los estudiantes que se inscriben a un curso de estadística en la Facultad de Psicología, tendrán que repetir el curso; si dicho grupo consta de 15 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que

a) menos de 6 tengan que repetir el curso?
b) exactamente 10 aprueben?
c) más de 12 aprueben?
d) Calcule μ y σ, grafique la distribución.

7.12 En el año 1995, un huracán causó, entre otros daños, una gran inundación en una región del sureste de México, donde 44% contrajeron el cólera. Si el sector salud atendió a una familia compuesta por 13 miembros, ¿cuál es la probabilidad de que tengan el cólera

a) 6 o más miembros?
b) 7 o menos?
c) 9 o más?
d) Calcule μ y σ, grafique la distribución.

7.13 La Lotería Nacional tiene una probabilidad de cometer errores en la impresión de sus billetes, dicha probabilidad es 0.5% ($p = 0.005$). Estos billetes no salen a la venta. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un lote de 1 000 billetes de un sorteo determinado,

a) ningún billete tenga errores?
b) 10 billetes tengan errores?
c) 15 exactamente tengan errores?

7.14 Una tienda de autoservicio se queja de que a 3% de los clientes que pagan con tarjetas de crédito, el banco emisor no les autoriza su compra. Si un día 200 personas realizan sus compras en dicha tienda, ¿cuál es la probabilidad de que,

a) exactamente a 10 no se les autorice su compra?
b) exactamente a 5 no se les autorice su compra?

7.15 La probabilidad de obtener cierta enfermedad infecciosa es 0.001; si a 10 000 estudiantes dispuestos a ingresar a una universidad se les realiza un examen médico, encuentre la probabilidad de que:

a) 6, 7 u 8 tengan dicha enfermedad.
b) Calcule μ y σ correspondiente.

7.16 La probabilidad de votos equivocados anulados en una determinada casilla es de 0.002. ¿Cuál es la probabilidad de que de las 2 000 personas que emitieron su voto en dicha casilla, a menos de 5 les sea anulado?

Calcule μ y σ.

7.17 Suponga que, en promedio, una casa de cada 2 000 en cierto distrito, se incendia durante el año. Si hay 6 000 casas en el distrito, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de ellas se incendien durante el año?

7.18 Tal vez la probabilidad de marcar un número equivocado es 0.05. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de marcar un número equivocado exactamente 3 veces en 100 llamadas telefónicas?

7.19 La probabilidad de que un cajero de un almacén dé el vuelto equivocado es 0.02. ¿Cuál es la probabilidad de que le ocurra esto mismo exactamente 5 veces en 200 ventas que hace?

7.20 Estime que de cada 5 000 automóviles, uno tiene problemas con las llantas en cierta autopista. Si 1 000 transitan por ella durante cierto día, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 automóviles tengan problemas con las llantas?

7.21 En una tienda de autoservicio se colocan 100 lámparas, de las cuales $n_1 = 60$ (son de 75 watts), $n_2 = 40$ (son de 100 watts). Se toman al azar $r = 10$ lámparas, ¿cuál es la probabilidad de que haya $x = 4$ de 75 watts?

7.22 Considere a 10 estudiantes universitarios, de los cuales 6 son hombres y 4 son mujeres, si escoge una muestra al azar de tamaño 5, ¿cuál es la probabilidad de que haya 3 hombres en esta muestra?

7.23 Considere el caso de 10 electores, de los cuales 5 son liberales, 3 conservadores y 2 independientes. Si toma una muestra al azar de tamaño 5, ¿cuál es la probabilidad de que haya 2 liberales y 2 conservadores?

7.24 De una distribución normal, la media es de 26.1 y la desviación estándar 10.7.

a) Calcule las calificaciones Z que equivalen a los siguientes datos de dicha distribución: 5, 18, 30, 39, 46, 51.
b) Transforme cada una de estas calificaciones Z en una puntuación x con media de 50 y desviación estándar de 10.

7.25 Dadas las siguientes puntuaciones Z:

a) 0.27
b) 2.47
c) 3.00
d) 1.00
e) –0.65
f) –0.05
g) –0.80
h) –3.20

Calcule el área comprendida entre la media y cada puntuación. Suponga que la distribución es normal.

7.26 Una prueba conocida como C.I. para niños de determinada edad, es estandarizada para tener un promedio de 100 y una desviación estándar de 15. Para una muestra de 500 niños, de una cierta edad, calcule el porcentaje del área bajo la curva de:

a) Superior a 130
b) Superior a 150
c) Debajo de 80
d) Entre 90 y 100
e) Fuera de los límites de 80 y 120

7.27 En una distribución normal, calcule la proporción de casos que quedan entre Z:

a) –1.00 y 1.00
b) –2.00 y 2.00
c) –1.25 y 0.75
d) –0.75 y 1.25
e) –1.30 y –0.30

7.28 En una distribución normal, calcule la proporción de casos que están

a) Entre $Z = -0.25$ y -1.25
b) Entre $Z = 0.25$ y 1.25
c) Entre $Z = -0.62$ y -2.15
d) Fuera de los límites de $Z = 0.40$ y -0.20
e) Fuera de los límites de $Z = -2.00$ y 2.00

7.29 En una distribución normal, calcula la proporción de casos que quedan:

a) Superior a $Z = 1.00$
b) Debajo de $Z = -2.00$
c) Arriba de $Z = 3.00$
d) Debajo de $Z = 0$
e) Entre $Z = -1.28$ y 0
f) Arriba de $Z = -1.28$
g) Entre $Z = 0$ y 1.64

7.30 Con la distribución de los resultados de una prueba de introversión-extroversión que se aplicó a un numeroso grupo de estudiantes, $x = 82$ y $S = 12$ (los resultados altos están en dirección de la introversión), para los siguientes estudiantes, convierte los resultados nuevos a un resultado Z.

a) Juan 88 b) Jorge 96 c) María 72 d) Alfredo 64

7.31 Calcule el valor de Z, asociado con las siguientes áreas, bajo la gráfica de la distribución normal.

a) El área a la izquierda de Z es 0.9732.
b) A la derecha de Z es 0.6406

c) A la izquierda de Z es 0.0409
d) A la derecha de Z es 0.2389
e) Entre Z *y* μ es 0.3212
f) A la derecha de Z es 0.025
g) A la derecha Z es 0.01
h) Entre Z y $-Z$ es 0.99

7.32 Un estudio, realizado por un instituto de investigación en la docencia, trata de determinar el porcentaje de maestros que alcanzaron el 70% de control sobre sus grupos, que es lo que el instituto establece como puntuación mínima de control. Si se investigaron 100 maestros y se encontró un porcentaje medio de 67, con una desviación estándar de 12, determine la cantidad de los que alcanzaron a cubrir el requisito.

7.33 En un hospital de traumatología se encontró que las contracciones de 300 injertos se distribuyen normalmente con una media de 68 mm y una desviación estándar de 3 mm. A los 6 meses:

a) ¿Cuántos injertos tiene una contracción mayor que 72 mm?
b) ¿Cuántos menor o igual que 62 mm?
c) ¿Cuántos entre 65 y 71 mm?

Aproxime de la binomial a la normal.

7.34 Una variable aleatoria binomial tiene una media de 6 y una desviación estándar de 1.5. ¿Qué porcentaje del área bajo el histograma de probabilidad estará a la izquierda de 5; a la derecha de 7?

7.35 Se aplica un examen de opción múltiple que consta de 200 preguntas $n = 200$, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales sólo 1 es la respuesta correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante conteste de 25 a 30 correctamente, para una sección de 80 de las 200, en la cual el estudiante no tiene conocimiento?

7.36 Un especialista en control de calidad determina que la duración efectiva de un componente electrónico, producido por una empresa, sigue una distribución exponencial.

$$f(X) = \frac{1}{1000} e^{-X/1000} \qquad \text{si } X \geq 0$$

y

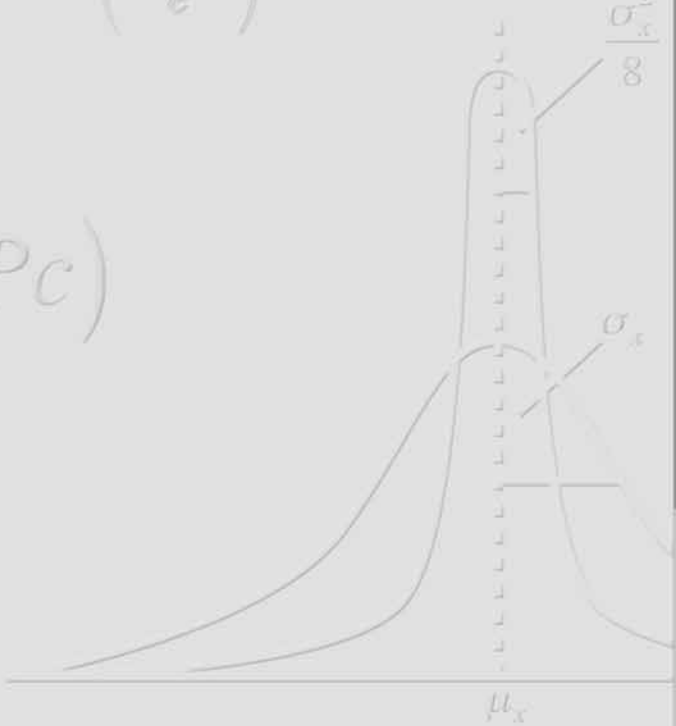
$$f(X) = 0 \qquad \text{si } X < 0$$

Calcule la probabilidad de que al seleccionar en forma aleatoria un componente electrónico tenga una duración de menos de 1 000 horas.

PARTE 4

Inferencia estadística

> *Lo que caracteriza al hombre de ciencia no es*
> *la posesión del conocimiento o de verdades irrefutables,*
> *sino la investigación desinteresada e incesante de la verdad.*
>
> K. Popper



Capítulo 8

Conceptos básicos de la inferencia

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector conozca y aplique las nociones de la inferencia estadística, aplicándola a una investigación. Para efectuar lo anterior el lector realizará el estudio o experimento en el contexto de las ciencias sociales del comportamiento y de la salud.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Considerar los lineamientos básicos que rigen el diseño de experimentos, estudios e investigaciones.
- Establecer tanto las hipótesis científicas o de trabajo como las hipótesis estadísticas.
- Definir operacionalmente las variables que intervienen en una investigación, estudio o experimento.
- Realizar las transformaciones pertinentes de los datos, si se requiere la normalización y/o homogenización de las varianzas.
- Minimizar en la medida de lo posible la ocurrencia de las diferentes clases de errores (aleatorio o experimental).
- Describir los métodos de la inferencia estadística
- Conceptualizar lógicamente la estimación de intervalos y el contraste de hipótesis.
- Explicar las siguientes propiedades de un estimador puntual:
  a) Insesgado
  b) Eficiente
  c) Suficiente
  d) Consistente.
- Describir paso a paso el contraste de hipótesis y la estimación de intervalos.
- Considerar el error tipo I o II en la investigación.
- Establecer el nivel de significancia α o β.
- Considerar la curva característica de operación, ubicando el valor de *p*, según la prueba estadística que se aplique.
- Desarrollar las reglas operativas para construir un intervalo de confianza y contrastar las hipótesis propuestas.

INTRODUCCIÓN

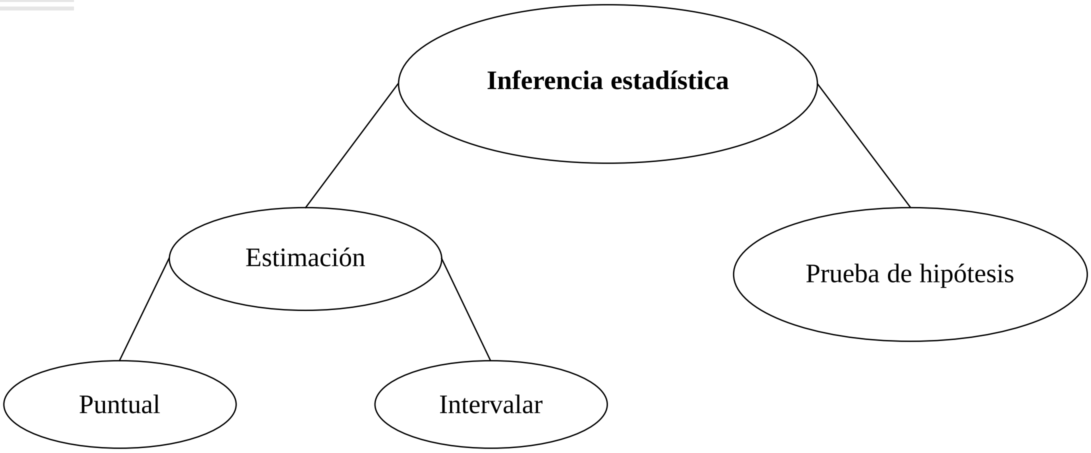
La estadística ha desarrollado técnicas y procedimientos para generalizar datos relacionados con los parámetros de una población, con base en la información contenida en una muestra representativa de dicha población.

Existen dos métodos de inferencia en el enfoque clásico: la *estimación* y la *prueba* o *contraste de hipótesis*. A su vez, la estimación se da en dos formas: la *puntual* y la *intervalar.* Para realizarla, es necesario proponer estimaciones de los valores de los parámetros, debido a que resulta imposible estudiar a toda la población. Dichas estimaciones estarán sujetas a un error (la diferencia entre el valor del parámetro de la población y el valor del estadístico de la muestra utilizado como estimador). La probabilidad de cometer este error puede calcularse.

La otra forma de inferir es por medio de las *pruebas de hipótesis*. En este caso se establece una hipótesis respecto al valor de las características de los parámetros y se evalúa con la información generada en una muestra. Si la evidencia no es consistente con la hipótesis propuesta, ésta se rechaza.

Se llama “estadístico” a una función de los datos de la muestra.

Figura 8.1



El parámetro refleja alguna característica de la población.

Tanto en la contrastación de hipótesis como en la estimación, debe conocerse la distribución del estadístico para realizar una inferencia.

La diferencia entre el contraste de hipótesis y la estimación por intervalo consiste en que en la primera se establece una hipótesis acerca del parámetro, antes de realizar el estudio; con fundamento en el resultado del estadístico muestral, se rechaza o no dicha hipótesis. En cambio, en la estimación por intervalo se consideran todos los posibles valores del parámetro.

MÉTODOS DE INFERENCIA ESTADÍSTICA

El método estadístico debe adaptarse en forma pertinente al tipo de datos y estar de acuerdo con el objetivo general y las hipótesis, para analizarlos con precisión. En muchos casos, los datos cuantitativos no pueden recopilarse directamente, esto ocurre cuando lo que va a investigarse es subjetivo y la forma de representarlo es cualitativamente con escalas arbitrarias.

Para los **modelos paramétricos usuales**, las condiciones son las siguientes:

a) Las observaciones o datos deben distribuirse en forma normal.
b) Los datos tienen que recopilarse aleatoriamente, la muestra a la que pertenecen debe haber sido seleccionada al azar con la misma probabilidad y técnica de muestreo con que se seleccionen otras muestras de la misma población, así como de diferentes poblaciones bajo estudio.
c) Cuando varias poblaciones son consideradas en la investigación o experimento, los datos deben ser **homoscedásticos** (tener varianzas similares).
d) Los datos a analizar tienen que ser medidos en una escala intervalar o aproximarse a ella.

Para los modelos **no-paramétricos** las condiciones son:

a) Los datos no necesariamente tienen que distribuirse normalmente.
b) Cuando varias poblaciones intervienen en el estudio o experimento, pueden no tener varianzas iguales.
c) Las poblaciones y sus concernientes muestras deben seleccionarse en forma aleatoria respectivamente.
d) No se requiere que los puntajes sean medidos en una escala intervalar, por lo que pueden analizarse datos categóricos o nominales u ordinales.
e) Si las muestras son pequeñas y los datos son intervalares, jerarquizándolos adecuadamente se recomienda una prueba no paramétrica.

Cuando las muestras son grandes, mayores que 30 datos (unidades observacionales o experimentales), aunque no se cumplan los requisitos establecidos para las pruebas paramétricas, se sugiere analizarlos empleando ambos modelos; y si los resultados son equivalentes, esto significa rechazar la misma hipótesis, se reportan los resultados con los dos métodos, o únicamente con la conclusión paramétrica, así como también si los resultados no son equivalentes. Esto es debido a que la estadística paramétrica es más poderosa que la no-paramétrica.

ESTIMACIÓN PUNTUAL

El estimador puntual, o de punto, es un instrumento estadístico que intenta asignar un solo valor lo más cercano posible al valor verdadero del parámetro de la población. Dicho estimador es una variable aleatoria, por lo que resulta necesario considerar las propiedades de dichas variables para obtener el mejor estimador. Algunas de estas propiedades son:

1. ***Insesgado*** o ***sin vicio***. Cuando el promedio de los posibles valores del estimador *es igual* al valor del parámetro se llama *insesgado*; cuando *no lo es* se denomina *estimador sesgado*.
2. ***Eficiente***. Se preferirá el estimador cuya varianza sea la mínima con respecto de otros estimadores del mismo parámetro. Cuando dos estimadores tengan el mismo sesgo, será mejor considerar el de mínima varianza y, si ésta es la misma, se preferirá el insesgado. Cuando un estimador tiene la varianza mínima y es insesgado se le denomina *eficiente*.
3. ***Suficiente***. Se dice que un estimador es *suficiente* con relación a un parámetro, si utiliza toda la información relevante de la muestra para calcularlo.
4. ***Consistente***. Cuando al ir aumentando el tamaño de la muestra el estimador se acerca cada vez más al parámetro.

El procedimiento usual para obtener un estimador puntual es el siguiente:

1. Se selecciona la muestra de una población. La técnica adecuada de muestreo repercutirá en minimizar el error (la diferencia entre el valor del parámetro y el estadístico).
2. Se calcula el estadístico muestral correspondiente al parámetro poblacional que se estimará.
3. Se utiliza este estadístico como una estimación del parámetro poblacional y se verifican las propiedades anteriores.

■ Ejemplo 1

Si se dan los siguientes valores de una población, $X = 1, 2, 4, 4, 7$; $N = 5$.

1. Obtenga μ_X.
2. Seleccionando sin reemplazo, obtenga todas las muestras posibles de tamaño 3.
3. Calcule cada una de las medias muestrales $\overline{X}$ para las muestras obtenidas anteriormente.
4. Compruebe que $\mu_{\overline{X}} = E[\overline{X}] = \mu_{\overline{X}}$
5. Calcule el error a) $e = \mu_X - \overline{X}_4$

   b) $e = \mu_{\overline{X}} - \overline{X}_4$

Solución

1. $\mu_X = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} X_{\hat{i}}}{N} = \dfrac{1+2+4+4+7}{5} = 3.60;\ \mu_X = 3.60$

2. Si $N = 5$ y $n = 3$

$$ {}_N C_n = {}_5 C_3 = \frac{5\,!}{3\,!\,2\,!} = 10 \text{ muestras de tamaño 3} $$

a) (1, 2, 4)
b) (1, 2, 7)
c) (2, 4, 7)
d) (1, 7, 4)
e) (1, 2, 4)
f) (2, 4, 7)
g) (1, 7, 4)
h) (1, 4, 4)
i) (2, 4, 4)
j) (7, 4, 4)

3. $\overline{X}_1 = \dfrac{1+2+4}{3} = \dfrac{7}{3} = 2.33$

$$\overline{X}_2 = \frac{1+2+7}{3} = \frac{10}{3} = 3.33$$

$$\overline{X}_3 = \frac{2+4+7}{3} = \frac{13}{3} = 4.33$$

$$\overline{X}_4 = \frac{1+7+4}{3} = \frac{12}{3} = 4.0$$

$$\overline{X}_5 = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2.33$$

$$\overline{X}_6 = \frac{2+4+7}{3} = \frac{13}{3} = 4.33$$

$$\overline{X}_7 = \frac{1+7+4}{3} = \frac{12}{3} = 4.0 \qquad \overline{X}_9 = \frac{2+4+4}{3} = \frac{10}{3} = 3.33$$

$$\overline{X}_8 = \frac{1+4+4}{3} = \frac{9}{3} = 3.0 \qquad \overline{X}_{10} = \frac{7+4+4}{3} = \frac{15}{3} = 5.0$$

4. Como $\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)$ donde $m = 10$ son todas las muestras posibles obtenidas de la población

$$X = 1,\ 2,\ 4,\ 4,\ 7;\ N = 5$$

$$\mu_{\overline{X}} = E\,[\overline{X}] = \frac{1}{10}\left(\frac{7}{3}+\frac{10}{3}+\frac{13}{3}+\frac{12}{3}+\frac{7}{3}+\frac{13}{3}+\frac{12}{3}+\frac{9}{3}+\frac{10}{3}+\frac{15}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{108}{3}\right)$$

$$\mu_{\overline{X}} = E\,[\overline{X}] = 3.60$$

$$\therefore \mu_{\overline{X}} = E\,[\overline{X}] = \mu_X$$

5. a) $e = \mu_X - \overline{X}_4 = (3.60) - \frac{12}{3} = -0.4$

b) $e = \mu_{\overline{X}} - \mu_X = 0$

Se define a S_n^2 como $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

S^2 es un estimador sesgado de σ_X^2 porque

$$E\left[S_n^2\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma_X^2$$

pero si define a $\hat{\sigma}_X^2$ como $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{n}{n-1}\ S_n^2$ entonces

$$E\,[\hat{\sigma}_X^2] = E\left[\frac{n}{n-1}\ S_n^2\right] = \frac{n}{n-1},\ E\left[s_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\ \sigma_X^2 = \sigma_X^2$$

$$\therefore\ E\,[\hat{\sigma}_X^2] = \hat{\sigma}_X^2,\ \text{o sea, } \hat{\sigma}_X^2 \text{ es un estimador insesgado de } \sigma_X^2.$$

Ahora la varianza de $\overline{X}$ es, en general

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = E\,[(\overline{X} - \mu_{\overline{X}}^2)^2] = \frac{\sigma_X^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

■ Ejemplo 2

De la población anterior

$$X_1 = 1,\ X_2 = 2,\ X_3 = 4,\ X_4 = 4 \text{ y } X_5 = 7$$

$$N = 5 \text{ y } \mu = 3.6;\ n = 3 \text{ y } \mu_{\overline{X}} = 3.60$$

Calcular:

1. σ_X^2
2. $\sigma_{\overline{X}}^2$
3. Compruebe que $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$
4. Las varianzas muestrales S_n^2 de cada una de las muestras.
5. Compruebe que $E\left[\hat{\sigma}_X^2\right] = \sigma_X^2$

Solución

1. $\sigma_X^2 = E\,[(X - \mu_X)^2] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu_X)^2$

$$= \frac{1}{5}\ \left[(1-3.60)^2 + (2-3.60)^2 + (4-3.60^2 + (4-3.60)^2 + (7-3.60)^2)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\ (6.76 + 2.56 + 0.16 + 0.16 + 11.56)$$

$$= \frac{1}{5}\ (21.2)$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = E\,[(X - \mu_X)^2] = 4.24$$

2. $\sigma_{\overline{X}}^2 = E\,[(\overline{X} - \mu_{\overline{X}})^2] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\overline{X}_i - \mu_{\overline{X}})^2$ donde m es el total de muestras

$$= \frac{1}{10}\left(\left(\frac{7}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{10}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{13}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{12}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{7}{3}-3.60\right)^2+\right.$$

$$\left.\left(\frac{13}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{12}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{9}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{10}{3}-3.60\right)^2+\left(\frac{15}{3}-3.60\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{14.44}{9}+\frac{0.64}{9}+\frac{4.84}{9}+\frac{1.44}{9}+\frac{14.44}{9}+\frac{4.84}{9}+\frac{1.44}{9}+\frac{3.24}{9}+\frac{0.64}{9}+\frac{17.64}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{63.9}{9}\right) \Rightarrow \sigma_X^2 = 0.7066666667$$

3. Como $\sigma_X^2 = 4.24;\ N = 5;\ n = 3 \Rightarrow \frac{\sigma_X^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{4.24}{3} \times \frac{5-3}{5-1}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{4.24}{3} \times \frac{5-3}{5-1} = \frac{4.24}{3} \times \frac{2}{4} = 0.7066666667$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

4. $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ y $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \times \frac{N-1}{N}$ si la población es pequeña

5. $E\left[s_n^2\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^2$

$$E\left[S_n^2\right] = \frac{1}{10}\left(\frac{\frac{42}{9}}{3}+\frac{\frac{186}{9}}{3}+\frac{\frac{114}{9}}{3}+\frac{\frac{162}{9}}{3}+\frac{\frac{42}{9}}{3}+\frac{\frac{114}{9}}{3}+\frac{\frac{162}{9}}{3}+\frac{\frac{54}{9}}{3}+\frac{\frac{24}{9}}{3}+\frac{\frac{54}{9}}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{\frac{954}{9}}{3}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{106}{3}\right)$$

$$= \frac{106}{30} \Rightarrow E\left[S_n^2\right] = E\left[\frac{N-1}{N}S_n^2\right] = \frac{N-1}{N}E\left[S_n^2\right]$$

$$E\left[\hat{\sigma}^2\right]\ \frac{n}{n-1}\times\frac{N-1}{N}\ E\left[S_n^2\right]=\frac{3}{3-1}\times\frac{5-1}{5}\left(\frac{106}{30}\right)\ =\ \frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\ \left(\frac{106}{30}\right)\ =4.24$$

Esto implica que $E\left[\hat{\sigma}^2\right]=\hat{\sigma}^2$, no obstante que σ es un estimador sesgado, a veces es preferible utilizarlo en algún análisis estadístico.

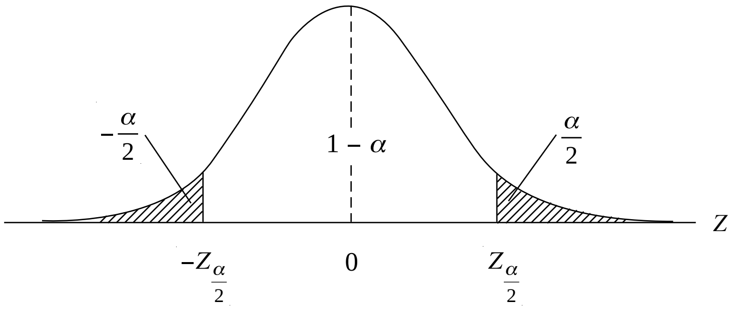
ESTIMACIÓN INTERVALAR

Es una forma de establecer la precisión o confiabilidad de un estimador puntual. La construcción de este intervalo a partir de la información observada y recopilada de una muestra provee una banda alrededor del parámetro estimado, asegurando con una probabilidad determinada que dicho parámetro esté ubicado dentro del intervalo. A dicho intervalo se le conoce de varias maneras: *de confianza, estimado de confianza, región de confianza, IC* (intervalo de confianza). La probabilidad determinada se denomina *coeficiente de confianza.*

Aun cuando únicamente se requiera el valor de una estimación puntual, es conveniente construir un IC.

En pocas palabras, un intervalo de confianza consiste en un par de valores *a* y *b*, entre los cuales está contenido el verdadero valor del parámetro por estimar, con una probabilidad específica ($1-\alpha$).

El intervalo de confianza *IC* provee un rango de valores con una confianza específica 80, 90, 95 o 99%; un parámetro determinado μ, σ (por mencionar algunos) estará contenido entre el valor mínimo y el valor máximo del rango de valores que 95% de veces incluirán a la verdadera media aritmética poblacional, de la cual su verdadero valor nunca será conocido, solo estimado con 95% de confianza, siempre y cuando si todas las posibles muestras de tamaño *n* han sido extraídas de la misma población y los datos de cada muestra han sido utilizados para construir intervalos de confianza de μ en forma independiente. Entonces, "95% de las veces" los intervalos de confianza incluirán dicho parámetro y 5% restante no lo incluirán.



$$a=\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\quad \text{y}\quad b=\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

El intervalo es: $\left(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\ \le\ \mu_X\ \le\ \overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$

Si $\alpha = 5\% = 0.05$, entonces $1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ o 95% y $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

Al consultar la tabla 1 del apéndice (al final del libro) se encuentra que $Z_{0.025} = +1.96$ y $-Z_{0.025} = -1.96$, el *IC* al 95%, será:

$$P\left(\overline{X} - 1.96\ \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \ \leq\ \mu_X \ \leq\ \overline{X} + 1.96\ \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$$

Esto significa que la probabilidad de que μ_x se encuentre en el intervalo $\overline{X} \pm 1.96\ \sigma_x$ asciende a 0.95, es decir, puede ocurrir 95 de cada 100 veces que μ_X se encuentre entre $\overline{X} - 1.96\ \sigma_{\bar{x}}$ y $\overline{X} + 1.96\ \sigma_{\overline{X}}$ $\left(\text{recuerde que } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$.

Se puede afirmar que se tiene una confianza de 95%, en el sentido de que dicho intervalo comprenderá a μ_X, con un error $e = \Big(x - \mu_X$, o sea, $e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\Big)$.

■ Ejemplo 3

A 100 estudiantes universitarios se les aplica una prueba psicológica con la que se mide el coeficiente de inteligencia, y se obtiene un promedio muestral de 110, con una desviación estándar poblacional conocida de 20.

Construir un IC de μ_X, con el valor del promedio muestral $\overline{X}$, al 95%.

Datos

$\overline{X} = 110$

$n = 100$

$\sigma = 20$

$1 - \alpha = 95\% = 0.95$

$\alpha = 5\% = 0.05$

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

como

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} = 2$$

utilizando la tabla 1 del apéndice (al final del libro)

$Z_{0.025} = Z_{1-0.025} = |\ 1.96\ |\ \therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

$$110 - 1.96\ (2) \leq \mu_X \leq 110 + 1.96\ (2)$$

$$110 - 3.92 \leq \mu_X \leq 110 + 3.92$$

$$p\ (106.08 \leq \mu_X \leq 113.92) = 0.95$$

Al calcular el error *e*

$e = 1.96\ \sigma_X = 1.96\ (2) = 3.9$

$e = 3.92$

Este error significa que puede utilizarse $\overline{X} = 110$ como un estimador de μ_x, con una confianza de 95% de que el error e no excederá 3.92, y con un tamaño de muestra $n = 100$.

En general:

como $e = Z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ al despejar n resulta: $n = \left(\dfrac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_X}{e} \right)^2$.

Esto significa que puede calcularse el tamaño de muestra mínimo necesario para un valor determinado del error.

Para el ejemplo anterior:

¿De qué tamaño debe ser la muestra si se quiere un error del 1.5?

Datos:

$\sigma_x = 20$

$Z_{0.025} = 1.96$ y $e = 1.5$

sustituyendo en:

$$n_{\frac{\alpha}{2}} = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_X}{e} \right)^2 .$$

$$n = \left(\frac{1.96 \times 20}{1.5} \right)^2 = 683$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 683.

Lineamientos básicos del diseño de experimentos, investigaciones y estudios

Suele ocurrir que el investigador, en su campo o área, tenga muy claros sus objetivos, tanto el general como los específicos, así como la justificación del problema dentro de la línea de investigación y, una vez obtenidos los recursos necesarios para realizarla, empiece a implementar su experimento o investigación; a medir y obtener mucha información. Una vez terminada esta etapa, requiere analizar estadísticamente sus resultados, algunas veces esto no representa ningún obstáculo, pero en otras no es posible acomodar la información obtenida en algún modelo estadístico y, en los casos críticos la tarea de "desfacer entuertos" (por decirlo de alguna manera y citando al Quijote de la Mancha), además de implicar más trabajo, se enfrenta a una aseveración negativa, que se refiere a la riqueza y la calidad del estudio, experimento o investigación, de cualquier tipo, la cual se ve disminuida, perdiéndose tiempo y recursos, así como un decremento de la tolerancia a la frustración del investigador y sus colaboradores.

Para evitar lo anteriormente mencionado, es necesario planear de antemano el diseño experimental, que es simplemente hacer el **plan de investigación**, tomando en cuenta la restricción de recursos disponibles y aun así obtener una precisión alta. Precisión significa la estimación de los efectos del o los tratamientos, con suficiente exactitud o sensibilidad para detectar la significancia estadística; esto, por supuesto, si existe en el nivel α, preestablecido, en el cual la hipótesis nula se contrasta. No debe olvidarse que los resultados del análisis pueden ser estadísticamente significativos, pero carecer de una importancia práctica o clínica. Por ello es necesaria una interpretación cuidadosa y conservadora del análisis estadístico.

Una consideración importante en la selección del diseño experimental apropiado, es que sea capaz de reducir el **error experimental** o **aleatorio**, así como mejorar en lo posible la potencia de la prueba estadística que se esté aplicando. Por error experimental se entiende la variabilidad no explicada por los factores de control previamente establecidos en un diseño experimental, para comprobar si las diferencias debidas a las diferentes fuentes de variación involucradas en el análisis de varianza son estadísticamente significativas. De una manera simplista, es posible considerar tres herramientas básicas y fundamentales en diseño experimental: **replicación**, **aleatorización** y **bloqueo**.

La **replicación** significa repetir varias veces las mediciones obtenidas de las variables independientes en diferentes elementos que intervienen en la investigación, esto permite al investigador estimar el error aleatorio o experimental, considerando la desviación estándar de la muestra. Si la media aritmética muestral se utiliza para estimar la media aritmética poblacional μ con los valores obtenidos de los estadísticos muestrales, se calcula el coeficiente de variación y como análisis exploratorio se determina si las diferencias observadas en los datos son significativas y la muestra o muestras que participan en el estudio son homogéneas; entonces, la replicación permitirá al investigador obtener una estimación más precisa de la media poblacional y se utilizará el error estándar de la media.

La **aleatorización**† elimina el sesgo, que aunque el investigador trate cuidadosamente de eliminarlo, aparece sutilmente en el estudio, sobre todo cuando la(s) variable(s) no puede(n) controlarse; un muestreo aleatorio puede reducir el impertinente y no deseado sesgo.

Bloqueo es una técnica estadística utilizada para incrementar la precisión de un diseño experimental, reduce y en algunos casos elimina el "ruido" o variables extrañas o confusoras que influyen en las respuestas, pero que no son de interés en la investigación. El bloqueo consiste en agrupar las unidades experimentales *ue*, en tal forma que cada grupo sea más homogéneo con respecto del conjunto total de las *ue*. No obstante, el bloqueo permite que cada grupo o bloque esté sujeto a todos los tratamientos experimentales y puedan compararse los efectos de los tratamientos dentro de cada bloque.

Al resumirse, todos los métodos estadísticos requieren que las observaciones o mediciones obtenidas en el experimento o investigación, así como los errores experimentales inherentes, sean variables aleatorias independientemente distribuidas; una buena aleatorización hace válido este argumento. Finalmente, el bloqueo incrementa la precisión de un experimento, esto es, controla las variables extrañas dentro del estudio.

Estudio piloto

Es una investigación preliminar que permite establecer los objetivos más claramente, cambiar las hipótesis ambiguas o confusas por unas más precisas y sensibles en la investigación principal, y que, además, sean contrastables. El estudio piloto usualmente provee a los investigadores de nuevas ideas, enfoques, prospectiva y creatividad, que no se habían vislumbrado cuando estaba planeándose la investigación, estudio o experimento inicial.

El estudio piloto permite verificar la medición de las variables que intervienen, o los métodos de observación y comprobar la confiabilidad de los instrumentos, cuestionarios, pruebas psicológicas, datos observables, enfatizando si es necesaria la capacitación y entrenamiento de los observadores. Al mismo tiempo, se prueban los métodos estadísticos y analíticos propuestos, con la finalidad de conocer si son los adecuados; así como determinar la muestra y el muestreo en general comprobando su pertinencia y representatividad de la población de estudio, tanto como evaluar costos.

---

† La aleatorización es la asignación aleatoria de tratamientos a las unidades experimentales *ue*.

El estudio piloto es en sí una oportunidad que tiene el investigador de reducir errores, tiempo, gastos y en general, experiencias negativas sin menoscabo de su prestigio, por lo que es altamente recomendable que siempre y cuando sea posible, realice un estudio piloto, el cual, además, es un excelente entrenamiento en su desarrollo como trabajador de la investigación, indicándole, lo que sí y lo que no debe hacerse para que la investigación principal tenga éxito.

Variables

En este texto se considerará como variable o factor a toda aquella característica susceptible de medirse; y como medir (Torgesen, 1958) es asignar números a una propiedad de acuerdo con una regla, ésta es una forma particular de observación la cual asigna números a las propiedades que se observan. Stevens[†] (1951), utilizando reglas, las clasificó en cuatro tipos:

Nominal o categórica
Ordinal
Intervalar
De razón

Dentro de una investigación, las variables pueden presentarse bajo alguna de estas tres modalidades:

1. **Dependientes**, **de respuesta** o **de salida**; supuestamente, su valor depende de cómo las variables son manipuladas.
2. **Independientes**, **de entrada**, **tratamiento** o **estímulo**; son independientes del resultado en sí, pero se supone que causan el efecto o influyen en la salida.
3. **Organísmicas** o **de control**, así llamadas porque necesitan ser controladas, mantenerlas constantes, eliminarlas o neutralizarlas para que no causen “ruido”, algunas de estas variables en estudios con humanos pueden ser: género, edad, estrato socioeconómico, escolaridad.

Por supuesto que para algún experimento, estudio o investigación en particular, estos factores se pueden redefinir como variables independientes o dependientes.

Existen algunos **constructos** o concepciones hipotéticas (también llamadas variables **interventoras)** que no pueden observarse o medirse, tales como: percepción, motivación e inteligencia, por mencionar algunas, que intentan explicar el proceso entre el estímulo y la respuesta.

Transformaciones

Considerando la regla empírica acerca de que ***el método estadístico debe adaptarse a los datos y no los datos al método estadístico***, una vez que el estudio, investigación o experimento se ha llevado a cabo, y antes de aplicar cualquier método estadístico, es conveniente realizar un “análisis exploratorio de los datos”. Esto consiste en evaluar o “catar” los datos, sin ningún sesgo, prejuicio o parcialidad *a priori* sobre ellos. Esta actitud permite que el investigador escoja el método estadístico apropiado y obtenga más información de los propios datos.

Normalización de datos

Un primer paso es hacer un análisis descriptivo de los datos, esto consiste en obtener las medidas de tendencia central y de dispersión.

[†] Véase capítulo 1.

Un segundo paso es graficarlos: por medio de un polígono de frecuencias, histograma, diagrama de tallo y hojas, o una gráfica de caja; cualquiera de estos métodos dan información relevante acerca del “comportamiento” de la información.

Cuando los datos no se distribuyen en forma normal, pueden revalorarse en otra escala con una mínima dispersión respecto de las medidas de centralización, específicamente a la media aritmética (desviación estándar pequeña y por supuesto el coeficiente de variación); esto es posible aplicándoles una simple operación matemática, tal como:

a) Logaritmo de base 10
b) Logaritmo natural
c) Raíz cuadrada
d) Un valor recíproco
e) Elevar al cuadrado (cuando hay valores negativos y positivos)

Este procedimiento primero se realiza a la variable dependiente, si esto no es suficiente, se aplica a la variable independiente y, si los resultados no son satisfactorios, se transforman simultáneamente ambas variables.

Una regla empírica para conocer el éxito de estos procedimientos es observar si los datos se distribuyen simétricamente alrededor de las tres medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda), esto tiene varias implicaciones: que estas tres medidas son casi iguales, que existe una sola moda (distribución es unimodal), y que, cuando la distribución tiene varias modas, se trata de varias muestras y conviene analizarlas separadamente, pero cuidando de que exista homoscedasticidad entre ellas (o sea, que las varianzas sean homogéneas), para esto puede aplicarse cualquier contraste de hipótesis de las varianzas (capítulo 10).

El realizar los procedimientos anteriores hace que el investigador esté *ligado íntimamente* con los datos que obtiene de su experimento, estudio o investigación y le ayuda a comprender la esencia de dicha información, volviéndolo más sensible para aplicar el método estadístico adecuado.

HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS Y CIENTÍFICAS

La hipótesis estadística es una afirmación acerca de la distribución de cierta variable aleatoria. En dichas hipótesis se considera el valor de un parámetro correspondiente a la distribución poblacional conocida o supuestamente conocida o la forma de la distribución. A su vez, una prueba estadística es un procedimiento para decidir si se rechaza o no la hipótesis estadística considerando el resultado de un experimento aleatorio (con base en el valor observado de la variable aleatoria en una muestra). Lo anterior está en contraposición con los resultados de los experimentos no aleatorios (o sea, determinísticos) utilizados para comprobar una hipótesis científica.

La lógica para contrastar hipótesis científicas se muestra a continuación, al considerar hipótesis en estudio. Si la ocurrencia predecida es observada cuando el experimento crítico se ha realizado, entonces es apoyada, siempre que no exista error en las mediciones u observaciones. Este tipo de experimentos pueden repetirse en las mismas condiciones.

En el caso de una hipótesis estadística, la situación de rechazo o no rechazo (aceptación) no es muy clara. Como se señaló antes, la hipótesis estadística afirma que una variable aleatoria se distribuye en una forma particular o que un parámetro de su distribución tiene un valor específico, y como existen valores de la variable aleatoria que se observan bajo la hipótesis, ninguna observación puede conducir al rechazo de ésta con certidumbre. En suma, no existe un experimento determinante. De cualquier manera, si ciertos valores de la variable aleatoria son muy diferentes a los esperados cuando la hipótesis es verdadera, ésta se rechaza. La diferencia entre las hipótesis científicas y las estadísticas no es definitiva, ya que de hecho todas las observaciones contienen incertidumbre o errores de medición.

Hipótesis nula (H_0)

La H_0 establece una afirmación acerca del valor de ciertos parámetros poblacionales y por lo general se expresa como la negación de una relación posible entre la variable independiente y la dependiente.

Si H_0 es verdadera, se niega la posibilidad de que la hipótesis de investigación también lo sea. Se supone que H_0 es cierta, a menos que los resultados de la significancia de una prueba estadística posibiliten rechazarla con explicaciones alternativas.

Hipótesis alternativa (H_1)

La H_1 se manifiesta acerca del valor de ciertos parámetros poblacionales y se expresa de modo que contradice la hipótesis nula. El rechazo de H_0 conduce al no rechazo de H_1 y a la posibilidad de que la hipótesis de investigación sea cierta aunque no necesariamente, por existir algunos factores de confusión.

En general, se propone y contrasta una hipótesis alternativa con la nula para decidir, entre dos posibles acciones, una apropiada si la nula es verdadera y otra si es falsa.

La proposición de la hipótesis nula y de la alternativa determina la zona de rechazo, asignándole una posición en la cola superior, inferior o en ambas de la distribución del estadístico de prueba; adicionalmente, el investigador debe precisar el tamaño de dicha región, seleccionando el valor de α, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera (error de tipo I). Determinar el valor de α, depende en parte de la confianza o creencia que el investigador tenga en la hipótesis nula. Si está firmemente convencido de la validez de ella, necesita una evidencia muy fuerte en su contra antes de rechazarla. Si, por otro lado, su creencia o confianza en la validez de la nula es débil, entonces requiere poca evidencia para rechazarla. Pero se debe reafirmar que si la nula es falsa y no se rechaza, se comete el error de tipo II (β).

Por desgracia, para un tamaño determinado de la muestra, si se disminuye la probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis nula, la probabilidad de una falsa aceptación (no rechazo) de la nula se incrementa. Se debe seleccionar α o β con mucho criterio, tomando en cuenta las repercusiones posibles de cada uno de los errores anteriores.

En conclusión, en la inferencia estadística clásica se establecen tanto una hipótesis nula como una alternativa, y el contraste de ésta consiste básicamente en decidir cuál de las dos es verdadera.

Uno de los problemas conceptuales más difíciles al contrastar hipótesis es establecerla de una manera apropiada para el efecto. Proponerla de forma correcta requiere una clara comprensión del problema, además de considerar lo siguiente:

1. Si tomara una decisión que acarreara un error muy costoso, debe ser baja la probabilidad de cometer dicho error.
2. Si los resultados obtenidos de una muestra indican un cambio con respecto a una opinión aceptada, debe ser muy baja la probabilidad de que dichos resultados conduzcan a una decisión errónea.

Estas consideraciones son necesarias no porque un investigador desee tomar una decisión incorrecta, sino porque, a causa de la naturaleza del proceso, donde se efectúan inferencias acerca de la población a partir de una muestra, existe la posibilidad de errar.

La hipótesis simple especifica en forma precisa el valor del parámetro en estudio. La compuesta establece un conjunto de valores del parámetro en lugar de uno solo. Al respecto existe considerable ventaja en plantear un problema de tal manera que la hipótesis nula sea simple; usualmente, la lógica de la situación requiere que la hipótesis alternativa sea compuesta. Para formular un problema, de modo que la hipótesis nula sea simple, se necesita hipotetizar el opuesto exacto de la afirmación que se desea apoyar. Así, si un investigador desea demostrar una diferencia entre grupos, procesos, métodos o efectos, entonces le conviene hipotetizar la no diferencia (esperando rechazar dicha hipótesis nula). El término *nula* implica una negación de una hipótesis científica. Cuando una hipótesis nula se rechaza o no, considerando la información de una muestra, existen cuatro posibles resultados:

1. No rechazar la hipótesis cuando es verdadera.
2. Rechazar la hipótesis cuando es verdadera.
3. No rechazar la hipótesis cuando es falsa.
4. Rechazar la hipótesis cuando es falsa.

La posibilidad 2 se llama *error de tipo I* (α); la 3, *error de tipo II* (β).

La investigación científica es sistemática, controlada, empírica y crítica en relación con las hipótesis de investigación propuestas que vinculan ciertos fenómenos. Estas hipótesis se pronuncian acerca de una supuesta relación entre una o varias variables independientes y una o varias variables dependientes. La hipótesis de investigación puede provenir de una teoría, basarse en observaciones anteriores o constituir un presentimiento de las expectativas del investigador, referentes a su investigación.

Por consiguiente, una tarea del investigador consiste en trasladar sus hipótesis de investigación a un conjunto dicotómico de hipótesis estadísticas, que son mutuamente excluyentes y completamente exhaustivas, siempre que la hipótesis nula sea específica o delimitada y la alternativa sea compuesta o combinada; aunque, si ambas son específicas, podrá calcularse el valor del error de tipo II (β).

Clasificación de hipótesis

A continuación se presentan algunas consideraciones:

1. *Hipo* significa bajo y *tesis* es afirmación, entonces la *hipótesis* es “bajo el supuesto o la afirmación”.
2. *Hipótesis*. Suposición de una cosa, sea posible o imposible, para sacar de ella una consecuencia.
3. *Hipótesis de trabajo*. La que se establece provisionalmente como base de una investigación, que puede confirmar o negar la validez de aquella (definición de diccionario).
4. *Hipótesis*. Proposición para eliminar la deficiencia de conocimiento, en forma de una declaración con consecuencias deductivas verificables. Por su importancia hay que distinguir los siguientes tipos:
   a) Hipótesis descriptiva. Especifica forma y propiedades de los procesos y objetos.
   b) Hipótesis explicativa. Establece la forma de asociación o causalidad (necesaria, suficiente, contribuyente o determinística) entre dos o más propiedades de los objetos o procesos. (I. Méndez, en *Ciencia*, núm. 40, 1989, pp. 39-48.)
5. *Hipótesis*. Forma tentativa de llenar el conocimiento.
   a) Hipótesis explicativa. En términos de relaciones de causalidad (contesta a un por qué).
   b) Hipótesis descriptiva. En términos de ubicación temporal o espacial, determinando magnitudes (contesta dónde, cuándo, cómo, cuánto). (R. Rojas Soriano, *El proceso de la investigación científica,* Trillas, México, 1983.)

c) Hipótesis estadística. Proposición en forma declarativa.

Es una afirmación que se plantea, tentativamente, como guía para la investigación. Las hipótesis dadas están sujetas a comprobación para ser aceptadas o rechazadas; en general, se inducen de hechos u observaciones. Lo que en realidad sucede cuando se crea una hipótesis es pasar de una situación particular a una general, proceso que se conoce con el nombre de inducción; pero tal proceso no termina allí, porque una vez hecha la hipótesis supuesta general, al aplicarse a otro fenómeno similar y extraer consecuencias de ella, se regresa a una situación particular, proceso que se conoce como deducción. Esto en sí marca el método de trabajo con el que se crea la ciencia y consiste en una sucesión de procesos inductivos y deductivos.

6. *Ley*. Una hipótesis cuyas predicciones se han visto confirmadas muchas veces (significa la confianza que tenemos en ella). Conviene tener presente que todas las leyes son abstracciones de la realidad, en las que aparecen los factores relevantes de la situación o fenómeno, pero en las que se omite una variedad de otros factores que harán su aparición en cualquier situación real.
7. *Ley científica*. Es una expresión que afirma en forma cualitativa, o de preferencia cuantitativa, relaciones funcionales entre dos o más variables. (H. Riveros y L. Rosas, *El método científico aplicado a las ciencias experimentales*, Trillas, México, 1980.)
8. *Teoría*. Serie de leyes que sirven para relacionar determinado orden de fenómenos. Hipótesis cuyas consecuencias se aplican a toda una ciencia o parte muy importante de la misma.

El análisis estadístico permite detectar una hipótesis falsa y descartarla, pero no permite establecer en forma definitiva si ésta es verdadera. En la ciencia no existe una verdad final.

Diferentes tipos de error en la investigación

1. Dar por hecho que el cuestionario, prueba psicológica o instrumento de medición cumple con lo que pretende medir, sin antes realizar una evaluación de los datos disponibles sobre la confiabilidad de dichos dispositivos.
2. Pretender utilizar mediciones, para administrar, analizar o interpretar los resultados obtenidos, sin estar lo suficientemente entrenado.
3. Tratar de adaptar forzadamente un método estadístico para el análisis de los resultados obtenidos.
4. Utilizar un solo método estadístico, cuando pueden utilizarse varios, para analizar correctamente los datos.
5. No cumplir con las especificaciones y requisitos de uso de los modelos estadísticos, que dan resultados precisos cuando su aplicación es adecuada.
6. No definir con claridad y en forma precisa la población de estudio, así como utilizar una muestra pequeña y no representativa de la misma.
7. No establecer con precisión ni claridad los objetivos de la investigación.
8. No definir la población de estudio en forma adecuada.
9. Utilizar una muestra demasiado pequeña, que no permita conformar subgrupos o bloques homogéneos.
10. Recopilar información del estudio, investigación o experimento sin haber realizado un estudio piloto, o, en última instancia, sin verificar las mediciones y/o procedimientos.

Sesgos

El error de medición tiene dos componentes, el *aleatorio* y el *sistemático*.

El *aleatorio* o *experimental* consiste en una fluctuación de las mediciones, que están fuera del control del investigador, para atribuirles una causa específica y poder controlarlas. El *sistemático* o *sesgo*, no depende únicamente del azar. Pero estos dos componentes son inherentes tanto a las observaciones o mediciones objetivas como a las subjetivas; por lo que no es aceptable pensar que existe un investigador sin sesgo, ya que esto es una predisposición natural en el ser humano. El investigador no puede "ver" los hechos desde afuera y no involucrarse con sus expectativas, contaminadas con sus deseos, miedos, juicios de valor, implicaciones bioéticas y valores culturales científicos y tecnológicos de su comunidad, por mencionar sólo algunas de las influencias externas pero no ajenas a cualquier estudio, investigación o experimento, por muy bien planeado que se encuentre.

Nivel de significancia, valor *p* y potencia

El valor p, estadísticamente, siempre significa lo mismo con respecto a H_0. Por ejemplo un valor de $p = 0.05$, indica que los resultados de la muestra son diferentes estadísticamente a lo establecido por H_0. Pero en una interpretación práctica, el valor de p depende en forma crucial del tamaño de la muestra; si H_0: $\mu = 100$ y el tamaño de la muestra es $n = 10$ y $p = 0.05$, implicaría no sólo que μ es diferente a 100, sino también que algunos valores alrededor de μ son diferentes, por ejemplo 99, 101, etc., en cambio, si el valor de $p = 0.05$, está asociado con una muestra grande, $n = 500$, significaría que μ no es exactamente igual a 100, podría haber valores cercanos pero no iguales a 100.

Para un valor fijo de α, la *potencia* (habilidad de que una prueba estadística rechace correctamente H_0 cuando es falsa) puede incrementarse, ya sea aumentando el tamaño de la muestra o reduciendo el error estándar de la media, pero como no siempre es posible obtener una muestra grande, puede utilizarse otro dispositivo para incrementar la potencia de la prueba estadística en el contraste de hipótesis; si la varianza poblacional se reduce, el coeficiente de variación también se reduce. Pero esta estrategia implica un cuidadoso control de las condiciones en que se realiza un experimento o investigación; manteniendo estas condiciones constantes y replicando la mayor cantidad de veces que sea posible el experimento o la investigación, esta estrategia es excelente para controlar los factores y disminuir el error experimental, que contribuyen a la variación de las observaciones o mediciones. En resumen, esto significa controlar el error experimental.

Aquellos experimentos en los cuales la variabilidad atribuible al error experimental o al error de muestreo es pequeña, se dice que son experimentos precisos.

En experimentos con una pequeña variación en la medición de cada una de las unidades experimentales (*ue*), o en las unidades de observación se puede contar con una potencia estadística aceptable, aun con muestras de unidades experimentales o unidades de observación no homogéneas y en los que se requiere un número grande de éstas para obtener la misma potencia y precisión.

En esencia, el objetivo de un excelente diseño de investigación es maximizar la validez tanto externa[†] como interna[††] y minimizar el error. Bajo este esquema, pueden alcanzarse conclusiones útiles y significativas, después que los datos han sido recopilados y analizados dentro del marco teórico de la investigación.

[†] Validez externa. Es la representatividad de las muestras; la distribución de las variables de interés en el estudio es aproximadamente la misma en la población y en la muestra.

[††] Validez interna. Es el control de factores de confusión (ruido), y posibles explicaciones alternativas.

Básicamente, los propósitos de diseño de la investigación son: proponer respuestas a las preguntas de investigación tratando de tener bajo control la variabilidad. Existen dos tipos de varianza a controlar:

1. **Varianza no deseada.** Son los efectos de variables no deseadas, que puedan influir los resultados obtenidos en el estudio, y no son el objetivo de la investigación; esto se puede llevar a cabo de la siguiente manera:
   a) Agrupar a los sujetos o en general a las *ue* en bloques homogéneos, respecto de la(s) variable(s) extraña(s).
   b) Aleatorizar, que es una técnica que controla en forma simultánea a todas las posibles variables no deseadas. Lo ideal sería que los sujetos sean seleccionados en forma aleatoria y, a su vez, asignados aleatoriamente a los grupos, los cuales también son asignados al grupo control o al de estudio.
   c) Realizar el análisis de covarianza, con los puntajes previos a la prueba (*pretest*).
2. **Minimizar el error de varianza.** Aun controlando los efectos de las fluctuaciones aleatorias y las condiciones de medición e incrementando la confiabilidad de las mediciones se pueden filtrar errores de medición.

Contrastación de hipótesis

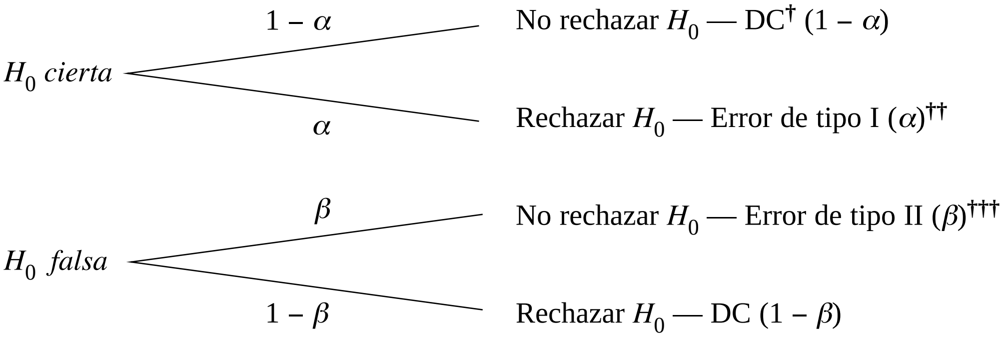
Regla convencional para contrastar hipótesis estadísticas: establecer α (probabilidad de rechazar falsamente H_0) igual a un valor lo más pequeño posible; a continuación, de acuerdo con H_1, escoger una región de rechazo tal que la probabilidad de observar un valor muestral en esa región sea igual o menor que α cuando H_0 es cierta.

Una forma esquemática de presentar estos resultados aparece en la tabla 8.1.

Tabla 8.1 Errores de tipo I y II
Situación real

			H_0 cierta	H_0 falsa
Decisión		No rechazar H_0	Decisión correcta $1 - \alpha$	β Error de tipo II
		Rechazar H_0	α Error de tipo I	Decisión correcta $1 - \beta$

o también



† DC: Decisión correcta.
†† También se denota E_{I}.
††† También se denota E_{II}.

Ejemplo de prueba de hipótesis y error de tipo I y de tipo II.

Un individuo y la naturaleza	Estado del universo	
Acción	W_1 Lluvioso	W_2 Despejado
A_1: Traer paraguas	√	E_{II}
A_2: No traer paraguas	E_{I}	√

Si traigo paraguas y llueve: acerté
Si traigo paraguas y no llueve: error

Si no traigo paraguas y llueve: error
Si no traigo paraguas y no llueve: acerté

	Estado del universo	
Acción	W_1 Despejado	W_2 Lluvioso
A_1: No traer paraguas	√	E_{II}
A_2: Traer paraguas	E_{I}	√

Si no traigo paraguas y no llueve: acerté
Si no traigo paraguas y llueve: error

Si traigo paraguas y no llueve: error
Si traigo paraguas y llueve: acerté

Un individuo y un juez	Estado del universo	
Acción	W_1 Inocente	W_2 Culpable
A_1: Liberarlo	√	E_{II}
A_2: Encarcelarlo	E_{I}	√

Si lo liberan y es inocente: acertó el juez
Si lo liberan y es culpable: error

Si lo encarcelan y es inocente: error
Si lo encarcelan y es culpable: acertó el juez

	Estado del universo	
Acción	W_1	W_2
A_1:	√	E
A_2:	E	√

Llenar los espacios

H_0: (Hipótesis nula)	Estado del universo	
Acción	W_1 Verdadera	W_2 Falsa
A_1: No rechazar	√	E_{II}
A_2: Rechazar	E_{I}	√

No existe el dual para este planteamiento.

El error de tipo I (E_{I}) es rechazar la hipótesis nula (H_0), cuando es verdadera.

El error de tipo II (E_{II}) es no rechazar la hipótesis nula (H_0), cuando es falsa.

$$P\begin{bmatrix}\text{se cometa}\\ \text{el error tipo I}\end{bmatrix}=\alpha \text{ (nivel de significación)}$$

$$P\begin{bmatrix}\text{no se cometa}\\ \text{el error tipo I}\end{bmatrix}=1-\alpha \text{ (nivel de confianza)}$$

$$P\begin{bmatrix}\text{se cometa}\\ \text{el error tipo II}\end{bmatrix}=\beta$$

$$P\begin{bmatrix}\text{no se cometa}\\ \text{el error tipo II}\end{bmatrix}=1-\beta \text{ (potencia de la prueba)}$$

$$\therefore\ \alpha = P\,[E_1]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = P\,[\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera}]}$$

$$1-\alpha = 1 - P\,[\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1-\alpha = P\,[\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera}]}$$

$$\beta = P\,[E_{\text{II}}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta = P\,[\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}]}$$

$$1-\beta = 1 - P\,[\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1-\beta = P\,[\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}]} \qquad \text{Esto se llama potencia}$$

H_0:	Estado del universo	
Acción	W_0 Verdadera	W_1 Falsa
A_1: No rechazar	$1-\alpha$	β
A_2: Rechazar	α	$1-\beta$

α puede reducirse a la mínima expresión si se incrementa el valor crítico (reduciendo el tamaño de la región de aceptación). Sin embargo, la probabilidad de cometer el error de tipo II (β) se incrementará; además, si se disminuye demasiado el valor de α también se reduce la probabilidad de rechazar tanto H_0 cierta como H_0 falsa.

En el caso extremo $\alpha = 0$, no se cometería el error de tipo I y, por consiguiente, la hipótesis nula falsa nunca sería rechazada. Obviamente, no rechazar una H_0 falsa también constituye un error.

Una hipótesis es una suposición teórica que se acepta provisionalmente para explicar ciertos hechos. En estadística, se establecen hipótesis ante la imposibilidad de conocer cabalmente todos los elementos de una población y, por tanto, conocer exactamente cuál es la función de distribución de una variable en dicha población, por lo que en forma aleatoria se toma una muestra de elementos de la población, sobre la cual se quiere probar una hipótesis. Suponiendo que la hipótesis nula es cierta, con los datos de la muestra se evalúan las probabilidades de tener una estadística que discrepa del parámetro como el obtenido o mayor y, si dicha probabilidad es baja, cuando la hipótesis es verdadera se tendrán dos opciones:

a) La hipótesis es cierta y ha sucedido un evento improbable.[†]
b) La hipótesis es falsa.

Siempre se optará por la opción a), quedando b) como posibilidad de error, por lo que **rechazar una hipótesis nula, verdadera**, es la probabilidad de cometer el error tipo I y es igual a α (nivel de significancia). Se le llama entonces β al error tipo II (**no rechazar una hipótesis falsa**).

Una forma de disminuir el valor de β es aumentando el valor de n; así también se incrementa la potencia del estadístico de prueba, aunque se aumenta el costo en recursos y tiempo del estudio.

Curva característica de operación

Si se representa un parámetro por θ (puede ser μ, σ^2, π, etc.) y un valor determinado del parámetro por θ_0, al establecer la hipótesis nula se tiene:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

Pero la hipótesis alternativa podría ser:

$$\text{a) } H_1 : \theta > \theta_0$$

o

$$\text{b) } H_1 : \theta < \theta_0$$

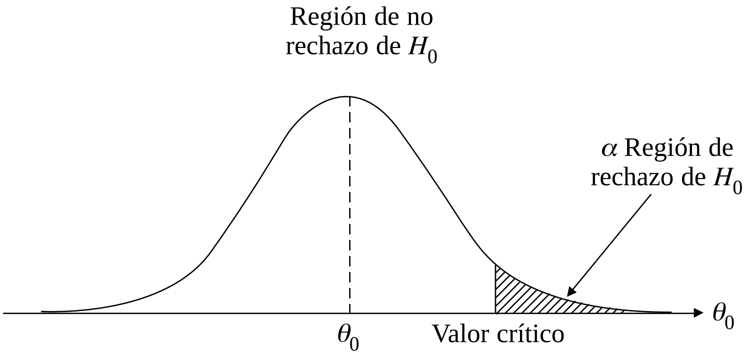
o

$$\text{c) } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

donde a) y b) suelen denominarse *hipótesis de una cola, unidireccionales* o *de una vía* (*one way*). A c) se le conoce como *hipótesis de dos colas, bidireccional* o *de dos vías* (*two ways*).

Y la zona de rechazo para cada una de las situaciones anteriores sería:

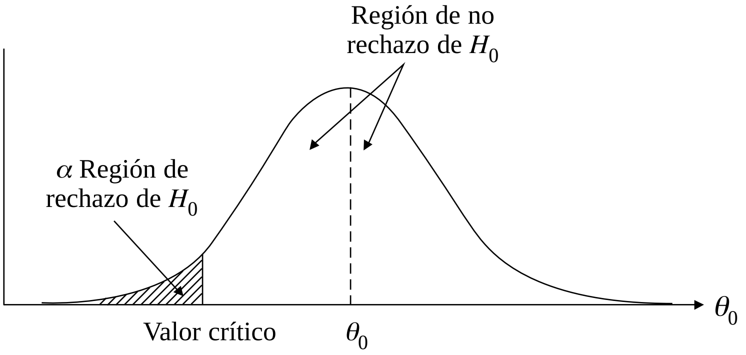
$$\text{1) } H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$



[†] La significancia estadística sólo elimina una explicación alternativa, ¡el azar!

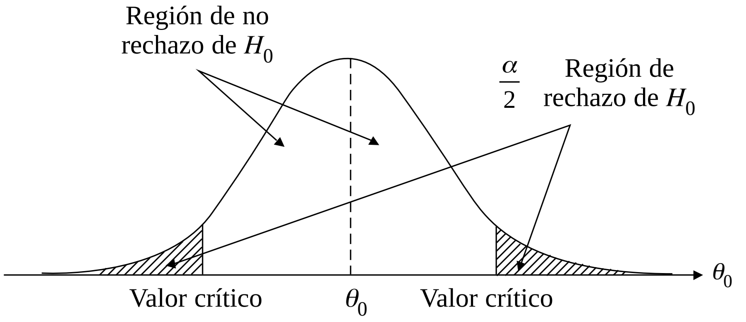
2) $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta < \theta_0$



3) $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$



Reglas operativas para realizar un contraste de hipótesis

Paso 1. Identifique la(s) variable(s) de interés, analizando las características de los parámetros que intervienen en el estudio, investigación o experimento.

Paso 2. Proponga las hipótesis estadísticas (H_0 y H_1).

Paso 3. Establezca el valor del error (α o β que está dispuesto a aceptar).

Paso 4. Determine el modelo estadístico adecuado.

Paso 5. Obtenga mediante la tabla correspondiente el valor crítico y ubique la zona de rechazo en una gráfica.

Paso 6. Especifique la regla de decisión para rechazar H_0.

Paso 7. Calcule el valor del estadístico de prueba, utilizando el modelo propuesto.

Paso 8. Obtenga las conclusiones, considerando el rechazo o no de H_0.

Relación entre tamaño de muestra y prueba de hipótesis

Con base en el teorema central del límite:

1. La media de $\overline{X}$ (media muestral) es μ_x; y $\mu_{\overline{x}} = E\left[\overline{X}\right] = \mu_x$;

2. La varianza de $\overline{X}$ es $\dfrac{\sigma_x^2}{n}\dfrac{N-n}{N-1}$; esto es $\sigma_{\overline{x}}^2 = \dfrac{\sigma_x^2}{n} \times \dfrac{N-n}{N-1}$

No se pierde generalidad si al factor de corrección para poblaciones finitas lo convierte en 1; $\dfrac{N-n}{N-1} = 1$, entonces:

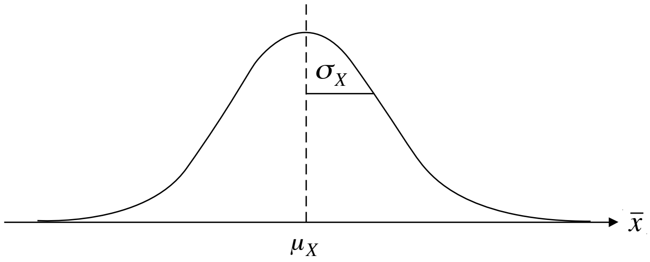
$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\sigma_{\overline{x}}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sqrt{\sigma_x^2}}{n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\text{si } n = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_x}{1} = \sigma_x$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_{\overline{x}} = \sigma_x$$

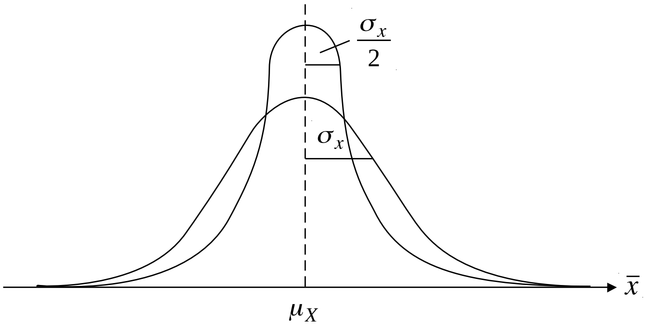
Tiene la distribución poblacional



$$\text{Si } n = 4 \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 2$$

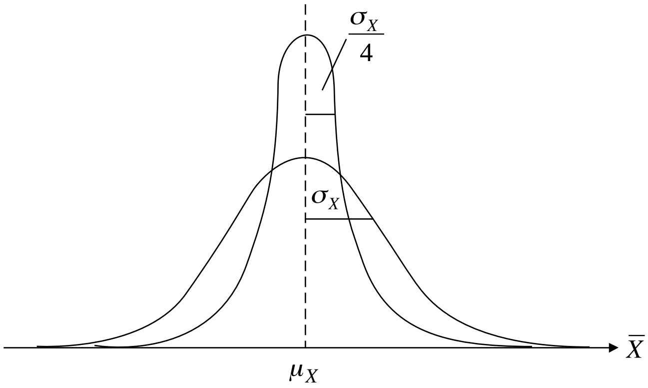
$$\Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{2}$$



Si $n = 16 \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{16} = 4$ y $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{n} = 4$

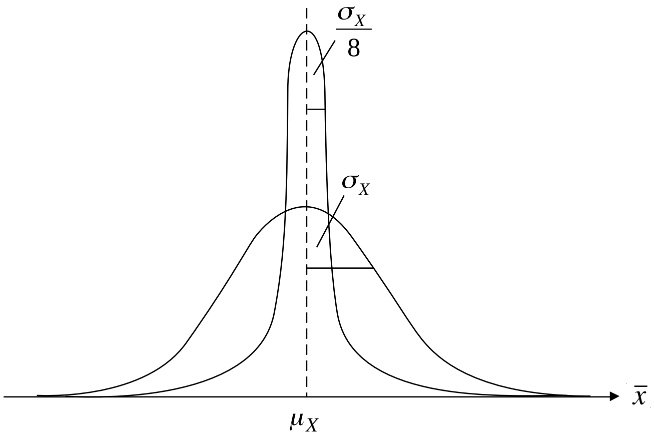
$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{4}$



Si $n = 64 \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{64} = 8$ y $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{8}$

$\Rightarrow \sqrt{n} = 8$

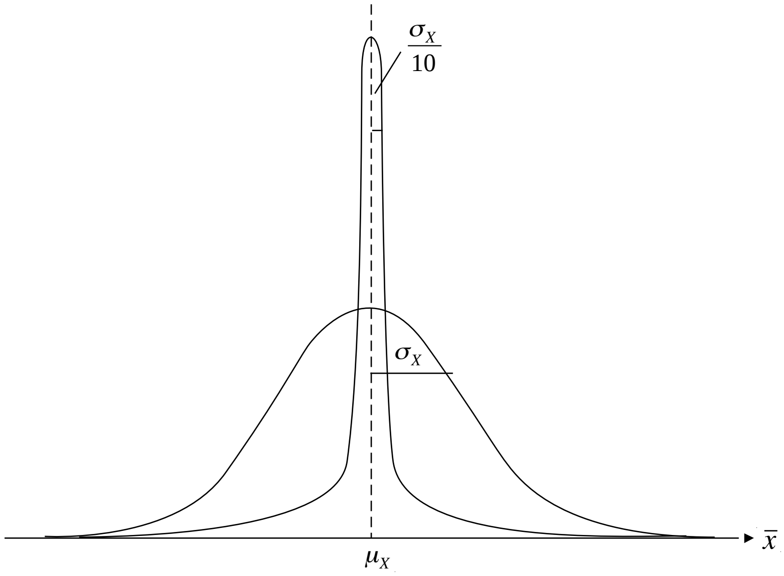
$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{8}$



$$\text{Si } n = 100 \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{y} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 10$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{10}$$



Ahora bien, si se le da un tratamiento [cambio de alguna(s) variable(s) en el procedimiento que se le aplica] a la población o a parte de ella, y se elige una muestra (de tamaño mayor que 16), entonces, si el tratamiento no es funcional, no modifica los valores de la variable; la distribución de la población no cambiará, esto es casi seguro, pero si el tratamiento funciona (hace que cambie la distribución de la población), esto es casi seguro. El decisor tiene que fijar el nivel de significancia, α.

Hay tres casos:

1. $H_0 : \mu_X = \mu_0$

   $H_1 : \mu_X < \mu_0$ si $\bar{x}_c < \mu_0$ (el tratamiento funcionó de forma decreciente)

2. $H_0 : \mu_X = \mu_0$

   $H_1 : \mu_X > \mu_0$ si $\bar{x}_c > \mu_0$ (el tratamiento funcionó de forma creciente)

3. $H_0 : \mu_X = \mu_0$

   $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ si el problema es de control

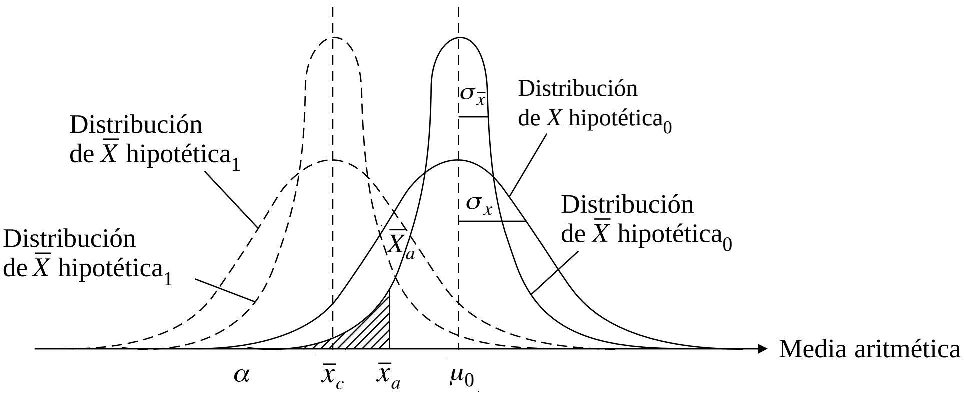
$\bar{x}_c$ se llama $\bar{x}$ *calculada*
$\bar{x}_\alpha$ se llama $\bar{x}$ *crítica*

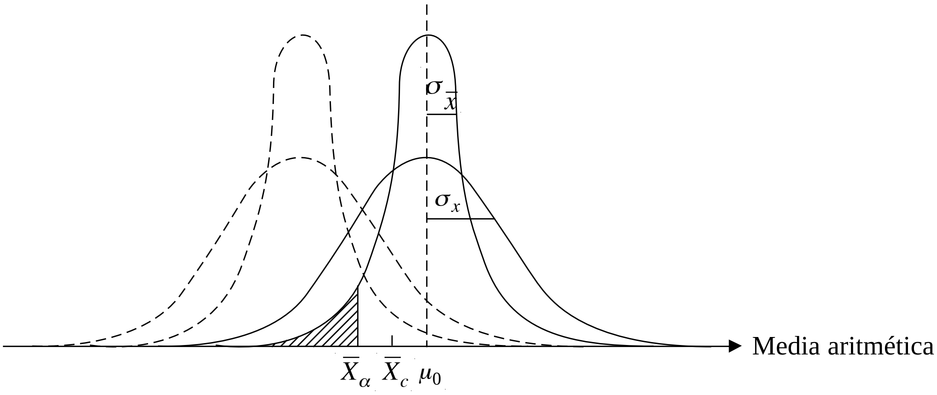
donde

$$P\left[\,\bar{x}_c \geq \bar{x}_\alpha\right] = \alpha$$

Caso 1

$\left(\bar{X}_c < \mu_0\right)$
$H_0 : \mu_x = \mu_0$
$H_1 : \mu_x < \mu_0$





Como $\overline{X}_c \leq \mu_\alpha$, entonces se rechaza $H_0: \ \mu_x = \mu_0$

El tratamiento funcionó significativamente a nivel α

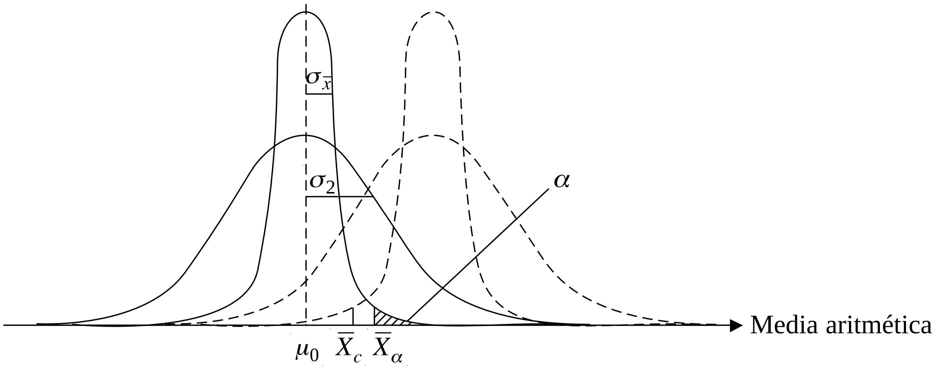
Como $\overline{X}_c > \mu_\alpha$, entonces no se rechaza $H_0: \ \mu_x = \mu_0$

o $\overline{x}_c > \mu_\alpha$, por azar.

Caso 2

$(\overline{X}_c > \mu_0)$
$H_0: \ \mu_x = \mu_0$
$H_1: \ \mu_x > \mu_0$

Como $\overline{X}_c \geq \mu_\alpha$, entonces se rechaza $H_0: \mu_x = \mu_0$



En otras palabras: el tratamiento funciona significativamente a un nivel α.

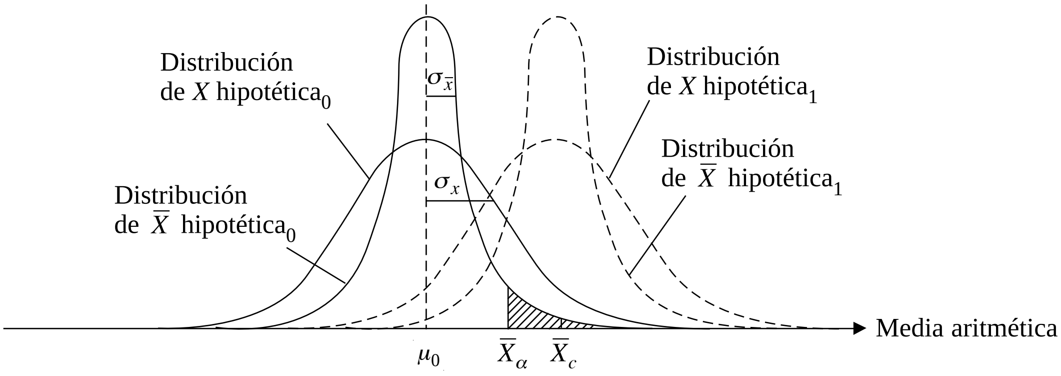
Como $\overline{X}_c < \overline{X}_\alpha$ entonces no se rechaza $H_0: \ \mu_x = \mu_0$

En otras palabras $\overline{X}_c > \mu_0$ por simple azar.

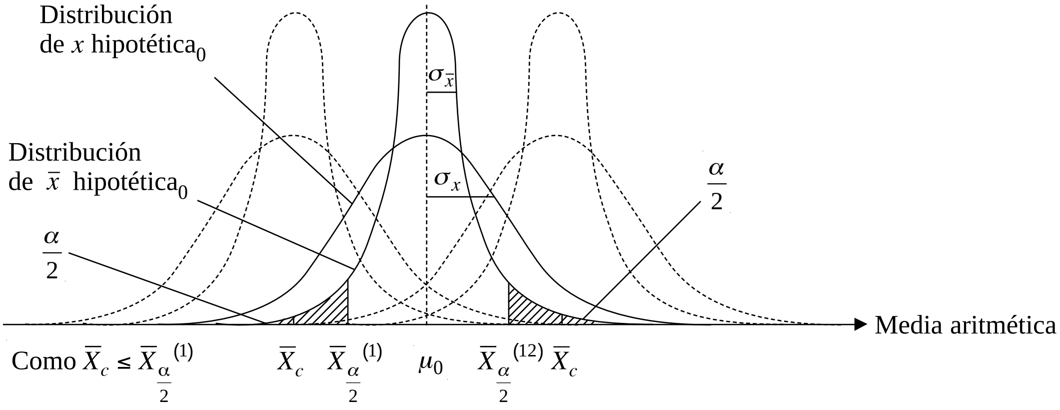
Caso 3

Control
$H_0 : \mu_x = \mu_0$
$H_1 : \mu_x <> \mu_0$

Como $\overline{X}_c \leq X_{\frac{\alpha}{2}}^{(1)}$ o $\overline{X}_c \leq X_{\frac{\alpha}{2}}^{(2)}$ se rechaza $H_0 : \mu_x = \mu_0$



El proceso está fuera de control.

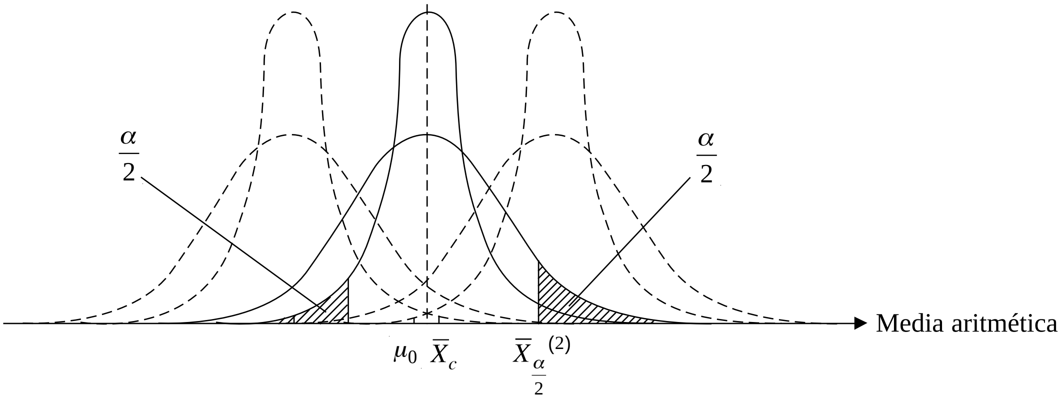


Como $\overline{X}_c \leq \overline{X}_{\frac{\alpha}{2}}^{(1)}$

o $\overline{X}_c \geq \overline{X}_{\frac{\alpha}{2}}^{(2)}$ Se rechaza $H_0 : \mu_x = \mu_0$

Como $\overline{X}_{\frac{\alpha}{2}}^{(1)} < \overline{X}_c < \overline{X}_{\frac{\alpha}{2}}^{(2)}$ no se rechaza $H_0 : \mu = \mu_0$

El proceso está bajo control.



Resumen

A veces una encuesta típica y simple es el estudio de una muestra extraída de una población real (por ejemplo, una encuesta de personas con crédito hipotecario).

Un experimento es el estudio de una población artificial creada por el experimentador. A un grupo de sujetos se les suministra cierto fármaco para saber si éste afecta el deseo de fumar. La población es ficticia, ya que la mayoría de los fumadores no ingieren dicho fármaco (la población existe únicamente para fines del estudio).

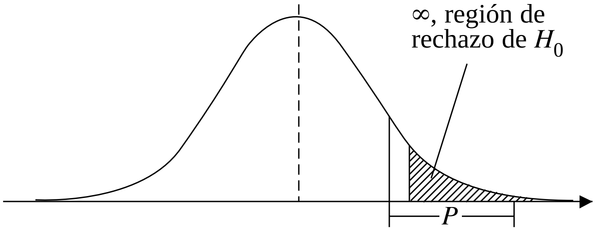
Una de las tareas del investigador es traducir sus hipótesis de investigación en un conjunto dicotómico de hipótesis estadísticas (H_0 *y* H_1) mutuamente excluyentes; se debe señalar si la diferencia entre la información obtenida a partir de la muestra y la información que se espera de acuerdo con H_0 o aun mayor tiene mucha o poca probabilidad de ocurrir, por ejemplo $P < 0.05$.

La inferencia estadística en relación con los estudios, investigaciones o experimentos se basa en el contraste de hipótesis, cuya probabilidad de observar un hecho se evalúa suponiendo cierta la hipótesis (H_0). Si esta probabilidad es baja, entonces H_0 se rechaza y se dice que el hecho observado es estadísticamente significativo, aunque existen algunos factores externos (factores de confusión) que pueden causar inexactitud. A esto último se le llama *error experimental*.

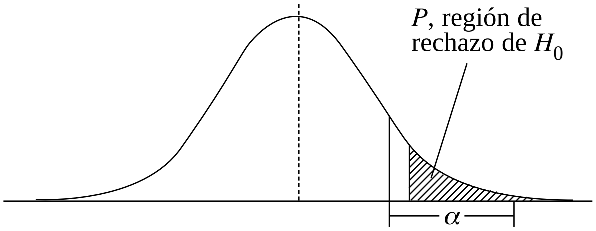
Con el propósito de ubicar a la estadística clásica, el enfoque de la estimación y contraste de hipótesis es el de la escuela objetiva de la probabilidad, en la cual no se utiliza información anterior.

No rechazar H_0 si el estadístico de prueba no está en la región de rechazo; entonces P es mayor que α, ($P > \alpha$).

Procedimiento del valor P.



Las hipótesis científicas o de investigación explican los hechos en términos de relaciones de causalidad determinística o probabilística.



La probabilidad de que el estadístico de prueba quede en la región de rechazo de H_0, si ésta es cierta, es menor o igual que α.

El valor de P de un estadístico de prueba observado es la probabilidad de un valor como ese o valores más extremos. Estas probabilidades se calculan a partir de la distribución H_0 del estadístico de prueba.

La regla de decisión es la siguiente: rechazar H_0 si el valor de P menor (área en el extremo más allá del valor observado del estadístico de prueba y menor que α) o igual que α ($P \leq \alpha$).

Ejercicios

8.1 De los siguientes enunciados, mencionar si es falso o verdadero.

a) Cuando se comete un error de tipo II, la hipótesis nula H_0 es falsamente aceptada.
b) Cuando se comete un error de tipo I, la hipótesis nula H_0 es falsamente rechazada.
c) Si $H_0 : \mu_1 < \mu_2$, se trata de una prueba de dos colas.
d) α es la probabilidad de cometer el error de tipo I.
e) β es la probabilidad de cometer el error de tipo II.

8.2 De los siguientes enunciados, una sola opción es la verdadera.

El establecer la hipótesis alterna (H_1) depende de:

a) Lo que el investigador esté interesado en probar.
b) Los datos obtenidos en el estudio.
c) La región crítica.
d) El nivel de significancia (α).
e) La potencia de la prueba.

8.3 Suponga que la región crítica para una cierta prueba de hipótesis tiene la forma $| t | \geq 3.5$ y la t calculada ($t = -2.75$).

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Rechazar H_0.
b) α es la probabilidad de que bajo H_0, $t > 2.75$ o $t < -2.75$.
c) La región de no rechazo de H_0 es $-3.5 < t < 3.5$.
d) La región de rechazo de H_0 consiste en los valores de $t > 3.5$ o $t < -3.5$.
e) Ninguna de las anteriores.

8.4 Una línea aérea desea probar la hipótesis de que 60% de sus pasajeros desaprueba que se fume dentro de los aviones. Si se establecen las hipótesis H_0 y H_1 como:

$H_0 : P = 60\%$
$H_1 : P \neq 60\%$

Explique en qué condiciones se cometería:

a) Un error de tipo I.
b) Un error de tipo II.

8.5 El departamento de investigación de un laboratorio farmacéutico, al obtener un nuevo medicamento, desea probar la hipótesis $H_0 : P = 0.90$, $H_1 : P < 0.90$. Si se realiza un estudio binomial, y X es el número de aciertos observados y $n = 20$ ensayos, entonces no se rechaza H_0 si $X \geq 15$ y, por consiguiente, H_1 no se rechaza.

a) Establecer la región de rechazo de H_0.
b) Establecer la región de rechazo de H_1.

8.6 Se realiza un estudio entre los estudiantes en dos grupos independientes (hombres y mujeres) en una universidad, la variable de interés es la presión arterial con los siguientes resultados.

El promedio obtenido por el grupo de hombres es 125.2 y el grupo de mujeres 125.4; si la hipótesis establecida $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ se rechaza para un $\alpha = 0.001$, ¿cuál de las siguientes conclusiones es la más razonable?

a) Existe una diferencia significativa clínica pero no estadística.

b) La diferencia es significativa, tanto estadística como clínica.

c) Hay una diferencia significativa estadística pero no clínica.

d) No existe diferencia significativa ni estadística ni clínica.

e) Los tamaños de muestra son pequeños.

Capítulo 9

Estudio de una población

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector esté en condiciones de utilizar el modelo estadístico adecuado para construir el intervalo de confianza y realizar el contraste de hipótesis para el parámetro de su interés.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Describir el procedimiento para obtener el error estándar de la media aritmética y de la proporción binomial, aplicándolo a cada uno de los siguientes casos.

Si se conoce la varianza poblacional, el lector será capaz de:

- Construir el intervalo de confianza para la media aritmética poblacional.
- Aplicar la prueba Z, para comparar la media aritmética muestral con su parámetro.

Si no se conoce la varianza poblacional, el lector podrá:

- Obtener el intervalo de confianza de la media aritmética poblacional.
- Utilizar la prueba *t* de Student, comparando las medias aritméticas muestral y poblacional.

A partir de la proporción binomial el lector será capaz de:

- Obtener el intervalo de confianza para la proporción poblacional.
- Realizar el contraste de hipótesis de la proporción muestral con su parámetro.

A partir de la varianza el lector podrá:

- Desarrollar el intervalo de confianza para la varianza poblacional.
- Contrastar esta varianza con la muestral.

Diseño antes-después

- Aplicar la prueba *t* de Student y la prueba de Sandler para contrastar una o dos veces una muestra medida.

INTRODUCCIÓN

En muchos estudios o investigaciones es necesario construir un intervalo de confianza para estimar la media aritmética poblacional, la varianza o proporción, así como contrastar la hipótesis de los parámetros anteriores con los muestrales de una sola población; considerando sus estadísticos muestrales como un estimador insesgado, eficiente, consistente y suficiente, que corresponda a una población representada por su distribución muestral.

Si se conoce la varianza poblacional, el error estándar puede ser calculado directamente y la prueba Z es la más apropiada, utilizando la tabla de distribución estandar (0, 1).

En el caso más común, cuando no se conoce la varianza poblacional, el error estándar se obtiene a partir de los datos de la muestra y el modelo estadístico más adecuado es la t de Student, utilizándose la tabla de dicha distribución.

ERROR ESTÁNDAR DE LA MEDIA

Si de una población muy grande ($N \rightarrow \infty$) se extrae un número (k) finito de muestras y se obtiene la media aritmética de cada una de ellas, se encontraría una variabilidad entre dichas medias muestrales, de la misma manera en que se encontraría en las observaciones individuales de una sola muestra.

Si se calcula un número grande ($n \rightarrow \infty$) de muestras de tamaño K y posteriormente se obtiene la media de estas medias, sería un estimador insesgado, eficiente, suficiente y consistente de la media aritmética poblacional (el parámetro μ). Estas medias muestrales se distribuyen normalmente.[†]

La variación entre las medias sería menor que π_x, esto se debe a que la media de cada una de las muestras se desviaría menos de la media poblacional de lo que se desviarían cada uno de los elementos de una muestra con respecto a su media aritmética.

La varianza entre un grupo de medias muestrales se obtiene de la siguiente forma:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{K-1} \text{ ; y es una estimación de } \sigma_{\bar{X}}^2,$$

donde:

$s_{\bar{x}}^2$ = Representa la varianza de un grupo de medias muestrales.

$\bar{x}$ = Es una media aritmética muestral.

$\bar{\bar{x}}$ = Es la media aritmética de todas las medias muestrales.

K = Es el número de medias incluidas.

n = Tamaño de una muestra.

Un caso particular es cuando se tiene una sola media muestral y desea estimar la varianza esperada en una distribución de muchas medias muestrales, esto se obtiene de la manera siguiente:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n}$$

[†] Considerando el teorema central del límite.

Donde s^2 es la varianza calculada entre las “n” observaciones dentro de la muestra. La raíz cuadrada de esta varianza de las medias $s_{\bar{x}}$ se denomina “desviación estándar o error estándar de la media” y tiene el mismo propósito para la distribución de las medias muestrales, como el que tiene la desviación estándar para una distribución de observaciones individuales.

El error estándar de la media está relacionado en forma inversa a la raíz cuadrada del tamaño de la muestra. Si el tamaño de la muestra se incrementa, el error estándar de la media se reduce; también se puede considerar como una medida de las discrepancias entre las $\overline{X}$ y μ.

Al conocer la varianza poblacional σ^2 el error estándar de la media poblacional se obtiene de la siguiente manera:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

INTERVALO DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA UNA MEDIA POBLACIONAL CUANDO SU VARIANZA ES CONOCIDA

La población de la cual se obtiene la muestra debe distribuirse en forma normal con media μ y varianza σ^2; en caso de que la población no se distribuya siguiendo el modelo normal, el tamaño de la muestra deberá ser lo suficientemente grande ($n \to \infty$) para que la distribución de las posibles medias muestrales sea normal, cumpliendo así el teorema central del límite.

Para obtener el IC y basado en el teorema central, se utilizará la siguiente aseveración:

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

Cuando el nivel de significancia α, también llamada probabilidad de cometer error tipo I, la confianza del intervalo es de $1 - \alpha$. Para un $\alpha = 5\%$ o $\alpha = 0.05$, el intervalo de confianza será de 95% o 0.95, ya que $1 - 0.05 = 0.95$.

El modelo anterior puede representarse como $P\left[\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}}\right] = 1-\alpha$

o también: $P\left[\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{x}} \le \mu \le \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$,

debido a que $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el error estándar de la media.

En una forma más sencilla, la media aritmética poblacional μ está contenida en el IC: $\overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

con una confianza de $1 - \alpha$. En este texto, el IC se considerará de 95% y como

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{5\%}{2}} = Z_{2.5\%}$ $Z_{0.025} = 1.96$; el IC adquiere la forma simple de $\overline{X} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donde

$\overline{X}$ = es la media aritmética muestral.

μ = es la media aritmética poblacional.

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el error estándar de la media.

n es el tamaño de la muestra.

Con los elementos anteriores, el estadístico Z, la prueba Z para contrastar hipótesis, se define como:

$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y se le suele llamar Z calculada (Z_c).

■ Ejemplo 1

La máquina expendedora de café, ubicada en la escuela de odontología, se calibra para servir los recipientes con 100 ml de café y, según el fabricante, con una variación de $\sigma^2 = 4$ ml^2, en una hora de la mañana se sirven 36 recipientes y se obtiene un llenado promedio de 100.5 ml

a) Construya un IC al 95% de confianza para la media del proceso.
b) Contraste las hipótesis nula y alternativa con $\alpha = 5\%$
c) ¿La máquina necesitará servicio de calibración?

Datos:

$\overline{X} = 100.5$ ml

$\mu = 100$

$\sigma^2 = 4$ ml

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2$ ml

$n = 36$

$\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{3} = 0.333$

$\alpha = 5\%$

Paso 1
Utilizar $\overline{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z \dfrac{\alpha}{2}$

Paso 2
Como $\alpha = 5\%$, $\dfrac{\alpha}{2} = 2.5\%$; $Z_{0.025} = -1.96$ y $Z_{1-0.023} = Z_{0.075} = 1.96$

Paso 3
Sustituir en el modelo anterior
100.5 ± (0.333 × 1.96)

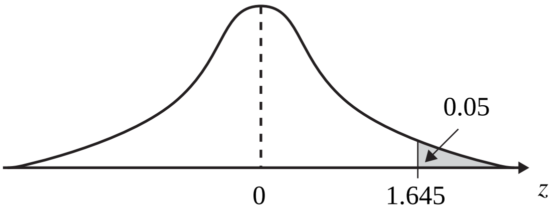
La media aritmética poblacional μ se encuentra en el intervalo con 95% de confianza, esto significa (99.85, 101.15).

Paso 4
Se plantea la hipótesis nula H_0 como $H_0 : \mu = \mu_0$ y la hipótesis alternativa en alguna de sus tres modalidades, con sus respectivas regiones críticas (región de rechazo de H_0).

a) $H_1 : \mu > \mu_0,\ Z_c \geq Z_{1-\alpha}$

como $\alpha = 5\% = 0.05$

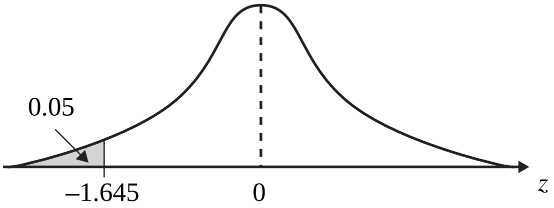
$Z_{1-0.05} = Z_{0.95} = 1.645$



b) $H_1 : \mu < \mu_0, Z_c \leq Z_\alpha$

como $\alpha = 5\% = 0.05$

$Z_{0.05} = -1.645$



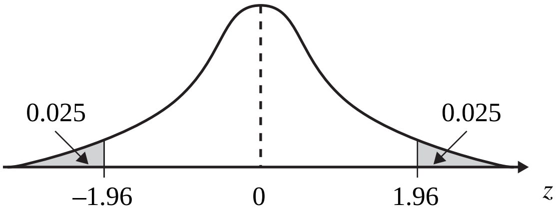
c) $H_1 \neq \mu_0,\ Z_c \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

y $Z_c \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

como $\alpha = 5\% = 0.05$

$Z_{0.025} = -1.96$

$Z_{1-0.025} = Z_{0.975} = 1.96$



En este ejemplo, la hipótesis alterna será de dos colas (bilateral), por lo que la opción alternativa es el inciso c.

Paso 5
Se sustituyen los datos en el modelo $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$, la diferencia es $\overline{X} - \mu = -(\mu - \overline{X})$ y el resultado es positivo, debido a que la hipótesis alterna es bilateral, H_0: $\mu = 100$.

$$Z = \frac{100.5 - 100}{0.333} = \frac{0.5}{0.333} = 1.50$$

Entonces, la Z calculada es $Z_c = 1.50$. Como la regla de decisión para el contraste de hipótesis es: si $Z_c > Z$ tablas, entonces H_0 se rechaza.

En este caso, como 1.50 no es mayor de 1.96, H_0 no se rechaza. La diferencia entra 100.5 y 100 ml, no es estadísticamente significativa (ns).

Conclusión

¡La máquina expendedora de café no necesita calibración!

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA ARITMÉTICA POBLACIONAL Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS CUANDO LA VARIANZA POBLACIONAL ES DESCONOCIDA

Si la varianza muestral es un estimador adecuado,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \text{ distribución } t \text{ de Student}$$

donde:

s = es la desviación estándar muestral

$s_{\bar{x}}$ = es el error estándar de la media $s_n = \frac{s}{\sqrt{n}}$

n = tamaño de la muestra

Cuando $n < 30$, la muestra es pequeña, de tal manera que el teorema central del límite no se aplica, depende de la distribución original; la muestra debe seleccionarse en forma aleatoria de una población que se distribuya de manera normal y la fórmula de IC es:

$$P\left[\overline{X} - t_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu \le \overline{X} + t_{n-1,\,\frac{\alpha}{z}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

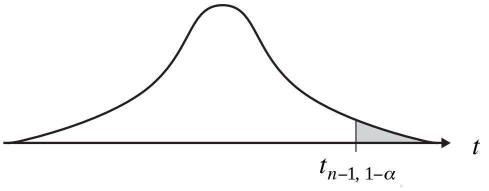
o en la forma corta $\bar{x} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$

donde $n - 1$ son los grados de libertad; el número de casos (unidades de estudio o experimentales) menos uno. La varianza muestral s^2 es un buen estimador de σ^2, cuando la muestra es ≤ 30.

La regla de decisión y la región crítica (región de rechazo de H_0). Para el contraste de hipótesis la nula y la alternativa tienen el siguiente formato:

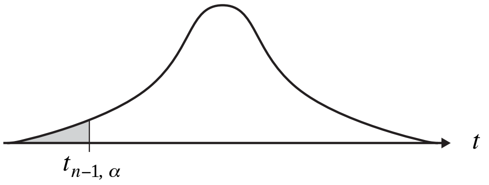
$H_0 : \mu \le \mu_0$

a) $H_1 : \mu > \mu_0,\ t_c \ge t_{n-1,\,1-\alpha}$



$H_0 : \mu \ge \mu_0$

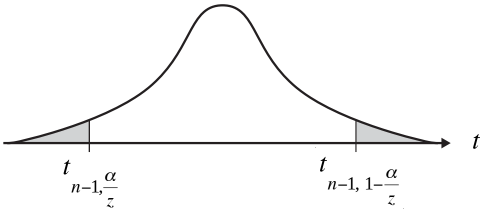
b) $H_1 : \mu < \mu_0,\ t_c \le t_{n-1,\,\alpha}$



$H_0 : \mu = \mu_0$

c) $H_1 : \mu \ne \mu_0,\ t_c \ge t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{z}}$

y $t_c \ge t_{n-1,\,\frac{\alpha}{z}}$



■ Ejemplo 2

A 25 estudiantes universitarios, que participan voluntariamente en un estudio, cuyas edades se ubican entre 20 y 21 años, se les pide dormir únicamente 4 horas al día durante una semana; posteriormente se registra el promedio de su metabolismo basal (calorías por hora), obteniendo los siguientes datos:

Estudiante	Metabolismo	Estudiante	Metabolismo	Estudiante	Metabolismo
1	35.30	11	37.90	21	34.60
2	35.90	12	35.60	22	33.50
3	37.20	13	29.00	23	33.60
4	33.00	14	33.70	24	31.50
5	31.90	15	35.70	25	33.80
6	33.70	16	32.50		
7	36.00	17	34.00		
8	35.00	18	31.80		
9	33.30	19	35.00		
10	33.60	20	34.60		

Construir un IC al 95% de la media poblacional μ

Datos

$\overline{X} = 34.068$

$s = 1.913$

$n = 25$

$t_{24,\,0.025} = 2.064$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.913}{\sqrt{25}} = 0.3826$$

Sustituyendo en $\overline{X} \pm t_{24,0.025}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

se tiene: 34.068 ± 2.064 × 0.3826

34.068 ± 0.7896 = 33.278, 34.857,

redondeado (33.3, 34.9).

El parámetro μ tiene 95% de
confianza de encontrarse en (33.3, 34.9)

Si la media poblacional μ (de donde proviene la muestra de estudiantes universitarios) es igual a 35 calorías por hora, ¿existe diferencia estadísticamente significativa entre la media muestral $\overline{X}$ y la poblacional μ?

a) Plantea las hipótesis para esta pregunta
b) Aplica el estadístico adecuado
c) Concluye

Datos

$n = 25$

$\overline{X} = 34.068$

$s = 1.913$

$\mu = 35.00$

gl = $n - 1 = 24$

a) $H_0 = \mu = \overline{x}$

H_1: $\mu \neq \overline{x}$

$\alpha = 5\%$

b) $t_c = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$

como la hipótesis planteada es de dos colas, se toma en consideración el valor absoluto de la diferencia

$$t_c = \frac{\left|\overline{X} - \mu\right|}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$$

calculando $\dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.913}{\sqrt{25}} = 0.3826$,

sustituyendo, se tiene $t_c = \dfrac{\left|34.068 - 35.00\right|}{0.3826} = 2.436$

como el valor de tablas de $t_{24,\, 0.025} = 2.064$,

$t_c = 2.436$ es significativa para $\alpha = 5\%$

c) Existe diferencia estadísticamente significativa entre la media de la muestra y la de la población.

El metabolismo basal se redujo en estos 25 universitarios por dormir únicamente 4 horas.

INTERVALO DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA UNA DIFERENCIA DE PROMEDIOS CON MUESTRAS RELACIONADAS

Cuando se desea comparar o estimar la diferencia de dos medias poblacionales dependientes, es decir, cuando de una población se selecciona una muestra en forma aleatoria, que se sujeta de una variable de interés y proporciona los primeros resultados (antes), se le aplica un tratamiento (nuevo método de enseñanza-aprendizaje, un nuevo medicamento para alguna enfermedad, dieta específica, terapia, etc.). Luego que a dicha muestra se le aplicó el tratamiento determinado, se somete nuevamente a medición, con el fin de obtener los segundos resultados (después). Algunos investigadores llaman a este diseño "antes-después" o muestras dependientes o relacionadas, esto es debido a que el método estadístico utilizado también se aplica al de dos muestras correlacionadas o pareadas (grupo de gemelos, parejas con una relación emocional, convivencia profesional de intereses comunes o cualquier relación biunívoca de mucho tiempo).

En este diseño, una muestra se obtiene en forma aleatoria, pero la segunda está determinada por la primera, de tal manera que los sujetos tienen cierto grado de homogeneidad y deben ser los mismos sujetos (unidades experimentales o bien con atributos semejantes) medidos antes y después.

Las varianzas poblacionales son desconocidas, pero la variable de interés se distribuye normalmente, por lo que se considerará a $D = X_1 - X_2$ y a $\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$, donde $X_1 \sim n\ (\mu_1,\ \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim n\ (\mu_2,\ \sigma_2^2)$

Se define a la media aritmética de la diferencia como $\overline{D} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} Dj}{n}$ o también $\overline{D} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}(X_{1j} - X_{2j})}{n}$

lo que es igual a $\overline{D} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_{1j} - \sum_{j=1}^{n} X_{2j}}{n} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_{1j}}{n} - \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_{2j}}{n}$, donde j es el número de parejas.

Por lo que $\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ y $\overline{D} \sim n(\mu_{\overline{D}}, \sigma_{\overline{D}}^2)$

$\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

La varianza poblacional es desconocida, por lo que la varianza muestral es un buen estimador, y se obtiene de la siguiente manera:

$S_D^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}(Dj - \overline{D})^2}{n-1}$, el error estándar es $S_{\overline{D}} = \dfrac{S_D}{\sqrt{n}}$

El modelo estadístico adecuado es la t de Student, entonces $\dfrac{\overline{D} - \mu_{\overline{D}}}{\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

donde $n - 1$ = gl (grados de libertad)

El intervalo de confianza se construye a partir de $\overline{D} - t_{n-1,\ \frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_{\overline{D}} \leq \overline{D} + t_{n-1,\ \frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_D}{\sqrt{n}}$

o en la forma corta $\overline{D} \pm t_{n-1,\ \frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_D}{\sqrt{n}}$

■ Ejemplo 3

Construir un intervalo de confianza de 95% con los resultados que un maestro de español obtuvo al aplicar un nuevo método de enseñanza gramatical en uno de sus grupos. Las puntuaciones obtenidas son: el número de palabras mal escritas.

n	Antes (1)	Después (2)	D_i	D_i^2
1	12	20	–8	64
2	10	10	0	0
3	24	18	+6	36
4	12	9	+3	9
5	28	17	+11	121
6	16	9	+7	49
7	26	16	+10	100
8	18	8	+10	100
9	24	16	+8	64
10	8	4	+4	16
11	27	15	+12	144
12	4	2	+2	4
13	22	14	+8	64
14	19	13	+6	36
15	18	12	+6	36
Σ	268	183	+85	843

$\bar{x}_1 = 17.86667 \qquad \bar{x}_2 = 12.2000$

$$\overline{D} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5.667, \qquad s^2 = \frac{843 - 15\ (5.667)^2}{14} = 25.805$$

$\Rightarrow s = 5.08$

$t_{14,\,0.025} = 2.145$

$$5.667 \pm 2.145\left(\frac{5.08}{\sqrt{15}}\right)$$

$5.667 \pm (2.145 \times 2.81349)$

$2.9 \le \mu_{\overline{D}} \le 8.5$

Conclusión

La diferencia del promedio de palabras mal escritas, antes del nuevo método de enseñanza gramatical, con el promedio después, está entre tres y nueve palabras, con una confiabilidad del 95 por ciento.

■ Ejemplo 4

La propaganda de un refresco dietético asegura que si se toma diariamente y por un mes, se obtendrá una pérdida de peso de 2 kilogramos; el Instituto del Consumidor sospecha que esta propaganda es falsa, por lo que realiza un estudio con 12 personas dispuestas voluntariamente a llevar a cabo dicha investigación, obteniendo los siguientes resultados. Utilice un $\alpha = 5$ por ciento.

i **Sujeto**	X_1 **Antes**	X_2 **Después**	***D*** **Diferencia**
1	126	115	11
2	194	179	15
3	135	124	11
4	179	163	16
5	205	186	19
6	139	137	2
7	142	146	–4
8	172	161	11
9	159	160	–1
10	194	198	–4
11	164	158	6
12	139	125	14

$$\sum_{i=1}^{12} D_i = 96$$

$$\overline{D} = \frac{96}{12} = 8$$

$$S_D = 8.01$$

$$t_{5\%,\,11} = 1.80$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 2$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 2$$

$$\overline{X}_1 = 162.333$$

$$S_1 = 26.596$$

$$\overline{X}_2 = 154.333$$

$$S_2 = 25.903$$

$$t_c = \frac{\overline{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

$$t_c = \frac{8-2}{\frac{8.01}{\sqrt{12}}} = 2.595$$

$$t_c = 2.595$$

Si $| t_c | \geq t_{11,0.025}$, entonces H_0 se rechaza; como 2.595 > 2.201, H_0 se rechaza.

Conclusión

El refresco sí es dietético; la sospecha del Instituto del Consumidor no procede.

■ Ejemplo 5

Se retomará el ejemplo de la sección anterior. Además de un intervalo de confianza, el profesor de español quiere realizar un contraste de hipótesis para confirmar si existe diferencia en los datos recabados con una confiabilidad de 95% (α = 5 por ciento).

Paso 1. La variable de interés es saber si funciona adecuadamente el método de enseñanza que propone el maestro. Por ello, recurre a comparar medias en medias dependientes, es decir, se obtienen datos antes y después.

Paso 2. Proponer la hipótesis estadística.

$$H_0 : \mu_{\overline{D}} = 0$$

$$H_1 : \mu_{\overline{D}} \neq 0$$

Paso 3. Establecer el error que está dispuesto a aceptarse.

$\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \alpha = 95\%$

Paso 4. Determinar el modelo estadístico adecuado.

$$t_c = \frac{\overline{D} - \mu_{\overline{D}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Paso 5. Obtener, mediante la tabla correspondiente, el valor crítico y ubicar la zona de rechazo en una gráfica.

PRUEBA *A* DE SANDLER

Es un método que puede sustituir a la prueba *t* de Student para muestras correlacionadas, dependientes o una muestra medida dos veces.

El estadístico *A* de Sandler se define en forma sencilla como:

$$A = \frac{\sum D^2}{\left(\sum D\right)^2}$$

donde:

$D = X_1 - X_2$, es la diferencia del puntaje del grupo 1 y 2, o el puntaje antes y el puntaje después

D^2 = es el cuadrado de dicha diferencia

ΣD^2 = es la suma de la diferencia de los puntajes

$(\Sigma D)^2$ = es el cuadrado de la suma de las diferencias de puntajes

■ Ejemplo 6

Un odontólogo desea demostrar que un nuevo aditivo químico (*fc*), presente en un dentífrico por salir al mercado, reduce la caries en los niños. Para reducir el error de muestreo, decide probar dicho producto en una muestra formada por gemelos (10 pares de niños). En cada pareja un gemelo usará el dentífrico con aditivo; el otro, la misma crema dental, pero sin aditivo, X_2 y X_1, respectivamente.

La muestra de los gemelos se extrae aleatoriamente de una población determinada y al azar se forman los dos grupos (control y de estudio). La población la constituyen niños cuyas edades fluctúan entre los ocho y 10 años de edad. La variable de interés es el número de nuevas caries que surgen en el periodo de un año.

En este ejemplo, se aplicará tanto la prueba *t* de Student como la *A* de Sandler.

Gemelos	X_1	X_2
A	4	4
B	0	1
C	2	0
D	5	3
E	3	4
F	4	2
G	5	1
H	1	1
I	4	0
J	3	1
n = 10		

Paso 1. Se establecen las hipótesis: puesto que la hipótesis del investigador considera que el *fc* disminuye la caries, las hipótesis quedan establecidas de la siguiente forma:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

y

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Paso 2. El nivel de confianza será el siguiente:

$\alpha = 0.05$

$gl = n - 1 = 10 - 1 = 9$

por lo que

$t_{9,\ 0.05} = 1.833$

$\alpha = 5\%$

El valor crítico de tablas es

$A_{9,\ 0.05} = 0.368$

Paso 3. Se calculará: ΣX_1, ΣX_2, ΣD y ΣD^2, donde $D = X_1 - X_2$.

Gemelos	X_1	X_2	D	D^2
A	4	4	0	0
B	0	1	–1	1
C	2	0	2	4
D	5	3	2	4
E	3	4	–1	1
F	4	2	2	4
G	5	1	4	16
H	1	1	0	0
I	4	0	4	16
J	3	1	2	4
$n = 10$	$\Sigma X_1 = 31$	$\Sigma X_2 = 17$	$\Sigma D = 14$	$\Sigma D^2 = 50$

Paso 4. Se sustituye en el modelo $A = \dfrac{\sum D^2}{(\sum D)^2} = \dfrac{50}{(14)^2} = \dfrac{50}{196}$

Paso 5. Se obtiene A_c

$$A_c = 0.255$$

Paso 6. Se aplica la regla de decisión: si $A_c < A$ tablas al 95%, H_0 se rechaza como $0.255 < 0.368$

$$H_0 \text{ se rechaza}$$

Conclusión

El dentífrico con *fc*, disminuye la caries dental infantil.
En este ejemplo se aplicará la t de Student

Paso 3 *bis.* Se calcula $\overline{D} = \dfrac{\sum D}{n} = \dfrac{14}{10} = 1.4$

Paso 4 *bis.* Se calcula el error estándar de la media de la diferencia de puntajes $S_{\overline{D}} = \dfrac{S_D}{\sqrt{n}}$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum (D - \overline{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{30.04}{9}} = \sqrt{3.3377}$$

$$S_D = 1.83$$

$$S_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{1.8378}{\sqrt{10}} = \frac{1.8378}{3.162} = 0.578$$

Paso 5 *bis.* Se sustituye en el modelo

$$t = \frac{\overline{D}}{S_{\overline{D}}} = \frac{1.4}{0.578} = 2.42$$

Paso 6 *bis.* $t_c = 2.42$

Paso 7 *bis.* Regla de decisión.

Si $t_c \geq t_{9,\ 0.05}$, H_0 se rechaza

Paso 8.

Como $2.42 > 1.833$, H_0 se rechaza

Conclusión

El dentífrico con *fc* disminuye la caries infantil.

INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA UNA PROPORCIÓN

Si se extrae aleatoriamente una muestra de tamaño n de una población ($N \to \infty$) y dentro de la muestra hay X elementos que poseen cierta característica común, entonces p es la proporción estimada de esos elementos que cumplen con X.

entonces $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{n}$ es un estimador puntual de la proporción π de la población, de donde fue extraída la muestra n.

Por consiguiente, la proporción de que no cumplan dicha característica común es $(1-\hat{p})$, también conocida como q; por tanto $p + q = 1$.

Si la muestra es grande ($n \to \infty$), como regla práctica si $(n\hat{p} \geq 5)$, entonces la proporción binomial $\hat{p}$ se distribuye aproximadamente normal, la media es $E(\hat{p}) = \pi$ y su varianza será var $(\hat{p}) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$.

La desviación estándar es $\sigma_{\hat{p}} = \frac{\sqrt{\pi(1-\pi)}}{n}$

El modelo estadístico será $Z = \frac{\hat{p}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$ y aproximadamente sigue una distribución normal estándar, por lo que, para construir un intervalo de confianza de π aproximado, se tiene;

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\ (1-\hat{p})}{n}} \leq \pi \leq \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\ (1-\hat{p})}{n}},$$

o en la forma corta $\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

■ Ejemplo 7

A partir de experiencias entre los ganaderos, se sabe que la proporción de ganado vacuno que tiene un defecto congénito es de 0.001, siempre y cuando se siga un procedimiento de apareo adecuado. Esta proporción cambia si se violan las reglas de apareo. En una muestra de 10 000 animales, hay 20 con defecto genético. Construya un intervalo de confianza de π al 95 por ciento.

Datos
$n = 10\,000$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{20}{10\ 000} = 0.002$$

Paso 1

$\alpha = 5\%$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

Paso 2

El IC es: $\hat{p} \pm Z_{0.025}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\ (1-\hat{p})}{n}}$

Paso 3

Se sustituye

$$0.002 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.002\ (0.998)}{10\ 000}} = 0.002 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.001996}{10\ 000}}$$

$= 0.002 \pm 1.96\ (0.0004467)$

$= 0.002 \pm 0.0008756$

Paso 4

El IC de π al 95% es:

(0.00112, 0.00287)

Conclusión

Contraste la hipótesis H_0 en el ejemplo anterior

H_0: $\pi = 0.001$

$H_1 = \pi > 0.001$

Datos

$\pi = 0.001$

$n = 10\,000$

$x = 20$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{20}{10\ 000} = 0.002$$

$\alpha = 5\%$

Paso 1

Se utiliza el modelo $Z = \dfrac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}}$

Paso 2

Sustituyendo:

$$Z = \frac{0.002 - 0.001}{\sqrt{\frac{0.001\ (0.999)}{10\ 000}}} = \frac{0.001}{\sqrt{0.0000000999}} = \frac{0.001}{0.000316}$$

$Z_c = 3.164$

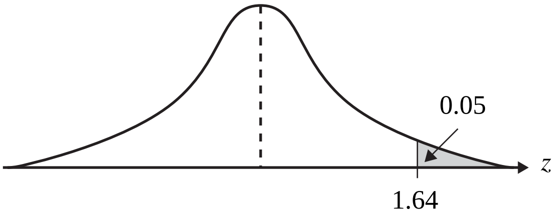
Paso 3

Como $\alpha = 5\%$, $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$

Paso 4

Regla de decisión

Si $Z_c \geq 1.645$, H_0 se rechaza.



Como 3.164 > 1.645

H_0 se rechaza

Conclusión

El procedimiento de apareo fue violado.

Otro procedimiento para calcular Z es:

$$Z = \frac{X - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \text{ cuando } n \to \infty$$

Sustituyendo los datos anteriores, se tiene:

$$Z = \frac{20 - 10\ 000(0.001)}{\sqrt{10\ 000(0.001)(0.999)}} = \frac{20-10}{\sqrt{9.99}} = \frac{10}{3.160} = 3.164$$

$Z_c = 3.164$

CONTRASTE DE HIPÓTESIS E INTERVALO DE CONFIANZA PARA UNA VARIANZA

Para algunos investigadores resulta de mayor importancia estimar una varianza que una media; por eso, en ocasiones será necesario construir un intervalo de confianza para una varianza poblacional desconocida. Es importante recordar que en todo estudio se busca minimizar la varianza σ^2 de la variable de interés.

Algunos ejemplos en los que se busca estimar un intervalo de confianza para σ^2 son los siguientes:

- Un economista analiza el poder de compra que tiene la clase media de cierta ciudad: como él considera insuficiente el promedio (μ) para sus estudios, decide estimar σ^2. En países con problemas económicos, la variabilidad tiende a ser grande.

- La gerencia de manufactura de cierto producto, desea conocer cuál es la variabilidad de piezas defectuosas por mes. Como puede observar, en este problema se espera que σ_X^2 sea pequeña.
- Un psicólogo desea saber la variabilidad que existe entre hombres o mujeres, casados o solteros, profesionistas o no profesionistas, en una población de personas que padecen migraña.

Para construir el intervalo de confianza, se considera s^2 como el mejor estimador insesgado, consistente y suficiente de σ_X^2 cuando la población es normal, se obtiene $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n-1}$

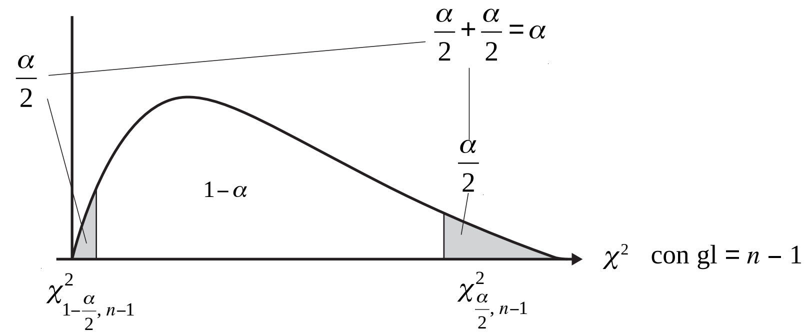
entonces $P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \leq \dfrac{(n-1)\, s^2}{\sigma_X^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}\right] = 1 - \alpha$ tiene una distribución *ji* cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.

$$P\left[\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \leq \frac{\sigma_X^2}{(n-1)s^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \leq \sigma_X^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}}\right] = 1-\alpha$$

donde el estadístico de prueba es $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$.

La representación gráfica es:



A partir de la varianza muestral se construirá un intervalo de confianza para la varianza poblacional, al 95 por ciento.

$\alpha = 0.05$

$\dfrac{\alpha}{2} = 0.025$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.975$

Como n = 10 grados de libertad

gl = n – 1 = 9

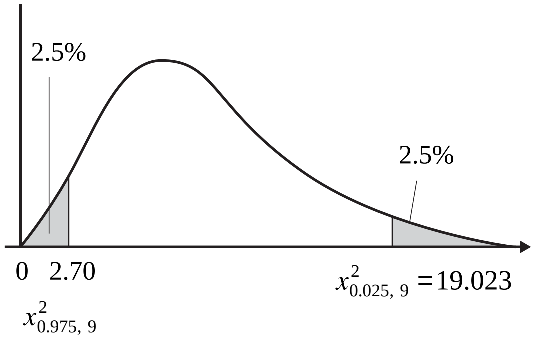
Se busca en la tabla de x^2 los valores de

$x^2_{0.025,\ 9}$ y $x^2_{0.975,\ 9}$

$x^2_{0.025,\ 9} = 19.023$

$x^2_{0.975,\ 9} = 2.70$

$$\frac{(n-1)\ s^2}{x^2_{0.025,\ 9}} \leq \sigma^2_X \leq \frac{(n-1)\ s^2}{x^2_{0.975,\ 9}}$$



Al sustituir los valores en el intervalo de confianza, se obtiene:

$$\frac{9\ (23.81)}{19.03} \leq \sigma^2 \leq \frac{9\ (23.81)}{2.70}$$

$(11.26 < \sigma^2 \leq 79.4)$ al 95 por ciento.

Se realiza un experimento para medir el tiempo de reacción ante un estímulo visual, en este caso, el encendido de una luz roja semejante a la del semáforo y la respuesta de oprimir un pedal, que equivale al frenado del auto. Participan 10 adultos, cuyos resultados en décimas de segundo fueron los siguientes: 14.5, 24.4, 23.5, 13.6, 19.0, 19.2, 15.4, 13.6, 17.2, 27.4. El tiempo de reacción es el que transcurre entre el encendido de la luz y el frenado.

n = 10

$\bar{x}$ = 18.78

s = 4.879

s^2 = 23.81

Si $\sigma_0^2 = 20$

Contraste la hipótesis

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Aplicando:

$$\chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)\ 23.81}{20}$$

$\chi^2_c = 10.71$, como $\chi^2_{9,\ 0.025} = 19.023$

y, además, 10.71 no es mayor que 19.023, H_0 no se rechaza.

Ejercicios

9.1 Una empresa desea estimar el promedio de tiempo que necesita un empleado para llegar a su trabajo. Selecciona al azar una muestra de 36 empleados y se encuentra que la media es de $\bar{x} = 40$ minutos. Suponiendo $\sigma_x = 12$ minutos, construya un intervalo de confianza de 95%, de la media poblacional μ_x.

9.2 De un libro de 600 páginas, se toma una muestra aleatoria de $n = 64$ páginas y se encuentra que el número promedio de palabras es $\bar{x} = 300$. La desviación estándar de las palabras por página es $\sigma_x = 40$. Construya un intervalo de confianza de 95% para el promedio del número de palabras por página.

9.3 La propaganda de cierta bebida refrescante dice que tiene 50 calorías por botella. Se toma al azar una muestra de 36 botellas y se determina que el promedio de calorías por botella es de 49.3. Si éstas se encuentran distribuidas de manera normal y la varianza es conocida, $\sigma_x^2 = 9$, determine, utilizando un nivel de confianza $\alpha = 5$ por ciento.

1. Las hipótesis correspondientes.
2. Si los datos apoyan lo que se anuncia.

9.4 En un autódromo se realiza una carrera de autos fórmula 1. La carrera consiste en un número determinado de kilómetros y n es el número de autos o participantes que terminaron la carrera. Si el promedio fue de 20 horas, con una desviación estándar de 3 horas, construya un intervalo de confianza de 90% de la media poblacional.

9.5 Una distribuidora de agua purificada lanza al mercado una nueva presentación, cuyo envase tiene una capacidad de 5 litros en promedio. El proceso de llenado en cierta etapa muestra una desviación estándar de medio litro (0.5 lt); si el Instituto del Consumidor hace un muestreo aleatorio en el mercado y obtiene una muestra $n = 50$, construya un intervalo de confianza de 95% de la media poblacional.

9.6 Una empacadora de café tiene una presentación de paquetes de 1 kg; la desviación estándar de dichos paquetes es $\sigma_x = 0.02$ de kg. Se quiere saber si dicha máquina trabaja satisfactoriamente. Se realiza un muestreo aleatorio de 25 paquetes, cuyo peso promedio en la muestra es $x = 1.014$ kg. Compruebe la hipótesis H_0: $\mu = 1$ kg para $\alpha = 1$ por ciento.

9.7 Con base en la información anterior, si $\sigma^2 = 9$ desconocida, se toma una muestra $n = 36$ observaciones, cuya media es 41 200, desviación estandar de la muestra de 3 000; si la media poblacional $\mu_x = 40\,000$, pero σ^2 es desconocida, entonces:

a) Contraste las siguientes tres hipótesis:

1. H_1: $\mu_x < 40\,000$
2. H_1: $\mu_x > 40\,000$
3. H_1: $\mu_x \uparrow 40\,000$

b) Realice un intervalo de confianza de 95%.

9.8 Un especialista en control de calidad hace una auditoría en una empresa que fabrica envases *tetrapac* para jugos, y el fabricante asegura que 1% de los envases están defectuosos. Se hace un muestreo aleatorio y se obtiene una muestra de n = 200, de los cuales, 4 resultan defectuosos.

Construya un intervalo de confianza de 95% y contraste la hipótesis con un $\alpha = 1\%$ y $\alpha = 5\%$ para $p \neq 1\%$ (o sea, para una proporción $\pi \neq 0.01$).

9.9 En un periódico de gran circulación, se afirma que aproximadamente 25% de los adultos en la ciudad de México son analfabetos. Ponga a prueba esta hipótesis (contra la alternativa de que el porcentaje verdadero no es 25%) con un nivel de significancia de 5% de que se cometa el error de tipo I. Se realiza un muestreo aleatorio y se tiene una muestra de 740 personas que indica que 20% de ellas son consideradas analfabetas; establezca un intervalo de confianza de 95%.

9.10 Una embotelladora de vinos asegura que menos de 3% de las botellas están por debajo del nivel de llenado. Se obtiene una muestra en forma aleatoria de 50 botellas, de las cuales, 4 se encuentran en esa situación. La muestra fue seleccionada de una producción de 400 botellas; establezca la hipótesis y realice el contraste al 5%.

9.11 El departamento de control de calidad de una óptica revisa las lentes de un pedido, cuyo índice de refracción debe tener una desviación estándar que no exceda el 1%. Si se toma una muestra aleatoria de 20 lentes de este pedido, de las que el índice de refracción tiene una varianza de 0.00023:

a) Establezca un intervalo de confianza de 99%.

b) Las lentes se deben aceptar o rechazar a un $\alpha = 1\%$.

9.12 En una ciudad se toma una muestra aleatoria de 64 familias para estimar, a un nivel de confianza de 95%, el gasto promedio semanal en alimentos. Por datos obtenidos anteriormente se sabe que la desviación estándar es de $10 y por una encuesta se sabe que el gasto promedio (muestral) semanal en alimentos resultó ser de $32.

9.13 Se toma una muestra aleatoria de 64 automóviles en cierta autopista durante determinado periodo, y se encuentra que la velocidad promedio es de 60 kilómetros por hora. La desviación estándar es de 15 kilómetros por hora. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la velocidad promedio de los automóviles.

9.14 Un bioquímico desea estimar el contenido vitamínico de cierto alimento. Se toma una muestra de tamaño 49 y se encuentra que el contenido promedio (muestral) de vitaminas por cada 100 gr es de 12 mg. Se estima que la desviación es de 2 mg. Encuentre el intervalo de confianza de 95% para el contenido promedio de vitaminas por cada 100 gr.

9.15 Una muestra de láminas de vidrio se toma al azar para estimar su grosor promedio. Por estudios anteriores, se sabe que la desviación estándar es de 1.2 mm. Si el error debe hallarse dentro de un rango de 0.3 mm, con un nivel de confianza de 96%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra?

9.16 Un bioquímico desea estimar el promedio del contenido vitamínico de un alimento y sabe que por estudios anteriores, se puede suponer que la desviación estándar es de 2 mg. Si el error debe ser de +/– 0.5 mg con un nivel de confianza de 95%, ¿de qué tamaño debe ser la muestra?

9.17 Para embarcar una fibra de algodón debe estimarse la longitud promedio. Por estudios anteriores, se sabe que es posible suponer que la desviación estándar es de 50 mm. Si el error debe hallarse dentro de un rango de 15 mm, ¿qué tamaño de muestra debe tomarse para tener un nivel de confianza de 92%?

9.18 Una compañía de teléfonos sabe, por su experiencia, que el número promedio de llamadas mensuales por familia es de 84 y que la desviación normal es de 15 llamadas en dicho periodo por familia. Se desarrolló una campaña publicitaria con el fin de que las familias instalaran teléfonos en sus alcobas y cocinas, y usaran el teléfono con frecuencia. Una encuesta reciente hecha a 100 familias, demostró que el número promedio (muestral) de llamadas aumentó a 89. ¿Esta muestra apoya el argumento de que la campaña publicitaria aumentó de manera significativa (a un nivel de 1%) las llamadas?

9.19 El promedio de calificaciones del examen de admisión a la universidad de 800 estudiantes, fue de 500 puntos y la desviación normal de 40 puntos. Hubo 16 estudiantes del colegio A que obtuvieron un promedio de 485 puntos. ¿Podrían considerarse las calificaciones de los estudiantes de dicho colegio como significativamente (a un nivel de 10%) menores que la calificación promedio total?

9.20 Una compañía controla su proceso de producción en forma tal que pone en bolsitas un promedio de 20 g de un producto químico, con una desviación estándar de 2 g. El proceso se detendrá cuando el promedio no sea de 20 g al tomar muestras aleatorias de tamaño 25. La última muestra aleatoria arrojó un promedio de 19 g. ¿Debe detenerse el proceso y ajustarse si el nivel de significancia es de 5%?

9.21 Investigaciones previas indican que 20% de las familias de una ciudad están suscritas al periódico K. Hay motivos para creer que en los últimos tiempos disminuyó la tasa de suscripción. Para comprobar si en realidad hubo cambio, se toma una muestra al azar de 100 familias y se observa que la proporción muestral es de 0.16 (16%). ¿Ha sido significativa (a un nivel de 10%) la disminución de la suscripción?

9.22 En enero, 40% de 2000 comerciantes comunican que van a aumentar su demanda de lavadoras; en marzo, puede pensarse que ya realizó el incremento. Para comprobarlo se toma una muestra al azar de 400 comerciantes y se comprueba que la proporción muestral es de 46% (0.46). ¿Ha sido significativo (a un nivel de 1%) el aumento de la demanda?

9.23 Una compañía productora de transitores tiene un promedio de 20% defectuosos. Cada hora se toma una muestra aleatoria de 100 transistores para llevar el control de calidad. A las 3 pm se encuentra una proporción de 28% (0.28) defectuosos. ¿Debe pararse el proceso de producción para regularlo? El nivel de significancia es de 5%.

9.24 Una moneda se lanzó 1000 veces y cayó águila en 520 ocasiones, ¿es confiable esta moneda ($\alpha = 5\%$)?

9.25 Un periódico afirma que por lo menos lo leen 30% de familias; se toma una muestra aleatoria de 400 familias y se encuentra que 230 lo leen. ¿Este resultado confirma lo dicho? Suponga que $\alpha = 5\%$.

9.26 A una muestra aleatoria 1000 amas de casa que han escuchado determinado programa, se les preguntó sobre la efectividad de la propaganda, 420 amas de casa dijeron que habían sido inducidas a comprar cierto producto. ¿Este resultado da suficiente evidencia para que los patrocinadores del programa digan igualmente que la mayoría de las amas de casa serán inducidas a comprar el producto? Suponga que el nivel de significancia es de 5%.

9.27 A 15 embarazadas de alto riesgo, cuyas edades fluctúan entre 30 y 40 años de edad, y con problemas de hipertensión, se les invita a participar en una sesión de terapias psicologicas diarias, por el espacio de una semana. Al inicio se les mide a lo largo de un día, cinco mediciones de la presión arterial sistólica, al finalizar la semana se repiten las mediciones y en ambos casos se considerará el promedio, obteniéndose los siguientes resultados:

Paciente	Presión arterial sistólica Inicial (promedio)	Presión arterial sistólica Final (promedio)
1	194	212
2	163.	150
3	205	190
4	235	182
5	240	200
6	180	150
7	201	190
8	180	145
9	178	179

Continúa...

Continúuación...

10	245	229
11	225	221
12	168	150
13	210	220
14	230	206
15	180	153

Suponiendo que la diferencia D, se distribuye en forma normal.

a) Construir un intervalo de confianza de 95% de la media aritmética poblacional.
b) ¿Las terapias psicológicas son efectivas?

9.28 Al realizar el exámen médico a 600 niños de una escuela primaria, se detectó que 80 de ellos presentaban problemas de bajo peso. Al revisar sus expedientes, se encontró que sus padres (al menos uno) eran fumadores habituales desde solteros. Construya un intervalo de confianza de 95% de la proporción de niños con problemas de bajo peso, cuyos padres son fumadores.

9.29 Once pacientes de la unidad de terapia intensiva de cardiología, son hipertensos severos y reportan su presión arterial sistólica, con los siguientes resultados:

Paciente	Presión arterial sistólica
1	240
2	300
3	258
4	290
5	278
6	289
7	239
8	269
9	220
10	301
11	294

Construya un intervalo de confianza de 95 % de la varianza de la presión arterial sistólica.

Capítulo 10

Estudio de dos poblaciones

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que al finalizar su estudio, el lector será capaz de utilizar adecuadamente los modelos estadísticos para obtener el intervalo de confianza y realizar el contraste de hipótesis.

De igual forma, al analizar cada uno de los temas siguientes el lector podrá:

Respecto a las varianzas conocidas

- Construir el intervalo de confianza para la diferencia de dos medias poblacionales.
- Contrastar la hipótesis de la diferencia de dichos parámetros.

Respecto a las varianzas desconocidas

- Obtener el intervalo de confianza para la diferencia de dos medias poblacionales.
- Desarrollar el contraste de hipótesis de la diferencia de dichos parámetros.

Respecto a las varianzas poblacionales

- Construir el intervalo de confianza para la diferencia de dos varianzas.
- Implementar el contraste de hipótesis de dichos parámetros.
- Contrastar las hipótesis para más de dos varianzas, utilizando las siguientes pruebas:

  Cochran
  Hartley
  Bartlett

Respecto a las proporciones binomiales

- Desarrollar el intervalo de confianza para la diferencia de dos proporciones.
- Realizar el contraste de hipótesis para dichos parámetros.

INTRODUCCIÓN

Como no es posible conocer la verdadera diferencia de los valores promedio $\mu_1 - \mu_2$ (medias aritméticas) de dos poblaciones, de las cuales fueron extraídas aleatoriamente sus respectivas muestras, se puede estimar el tamaño del efecto del tratamiento, $\mu_1 - \mu_2$. Esta estimación se lleva a cabo construyendo un intervalo de confianza, que consiste en un par de valores, entre los cuales se encuentra el parámetro por estimar, con una confianza $(1 - \alpha)$ determinada. Como el intervalo de confianza (IC) se construye a partir de los datos contenidos en las muestras, entonces el IC suministra información complementaria; esto hace que la inferencia estadística sea más consistente y confiable, por lo que tanto dicho intervalo como la contrastación de hipótesis estadísticas es quizá lo más importante de la inferencia estadística y, por consiguiente, de la teoría de la decisión.

Dado que una hipótesis estadística puede ser falsa o verdadera, se considerarán los intervalos de confianza que proveen otra ruta para el contraste de hipótesis; esto es, si el 100 $(1 - \alpha)$ porcentaje del intervalo de confianza asociado con un conjunto de datos incluye el valor de cero, entonces no existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula ($H_0 : \mu_1 = \mu_2, \mu_1 - \mu_2 = 0$) de no efecto con $P < \alpha$. En cambio, si el IC no incluye el valor de cero, existe suficiente evidencia para rechazar Ho con una $P > \alpha$.

INTERVALO DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA DOS MEDIAS

Caso 1 Varianzas conocidas

Varianzas no iguales

Sean dos variables aleatorias X_1, X_2 independientes, con medias μ_1, μ_2, varianzas $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ y sus respectivas medias muestrales $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$; calculadas así como el tamaño de las muestras n_1 y n_2. Se tiene:

$$\overline{X}_1 \sim N\left(\mu_1,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \text{ y } \overline{X} \sim N\left(\mu_2,\ \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Entonces, la diferencia de las medias se distribuye en forma normal

$$N\left(\mu_1 - \mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Por ello, el IC a un nivel de confianza $1 - \alpha$, para la diferencia de medias es:

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

o también, $\mu_1 - \mu_2$ está en $\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ Z_{\frac{\alpha}{2}}$ con una probabilidad $1 - \alpha$

Varianzas iguales

Si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, entonces se considera una sola varianza y se conoce como σ^2, el intervalo de confianza de la diferencia de dos medias poblacionales, lo cual queda como:

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

o también, $\mu_1 - \mu_2$ está en $\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}}$ con una probabilidad $1 - \alpha$

■ Ejemplo 1

En una línea de producción de ciertos dispositivos, alimentada por dos máquinas de tecnologías diferentes, se obtienen los siguientes datos:

Máquina 1	Máquina 2
$n_1 = 25$	$n_2 = 20$
$\overline{X}_1 = 12.2$	$\overline{X}_2 = 10.5$
$\sigma_1 = 1.5$	$\sigma_2 = 0.5$
$\sigma_1^2 = 2.25$	$\sigma_2^2 = 0.25$

Construya un IC de 95%, de la diferencia de las medias poblacionales ($\mu_1 - \mu_2$);
como 1 – 0.95 = 0.05, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$

Paso 1. Al sustituir en

$$P\left[\mu_1 - \mu_2 \in \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

Paso 2. Con una confianza del 95% $\mu_1 - \mu_2$ está en (12.2 – 10.5) ± $\sqrt{\frac{2.25}{25} + \frac{0.25}{20}}\,(1.96)$

Paso 3.

$$P\left[1.03 \le \mu_1 - \mu_2 \le 2.33\right] = 0.95$$

(1.03, 2.33) al 95%

Paso 4. Conclusión

Para el contraste de hipótesis, se tiene:

Paso 1.

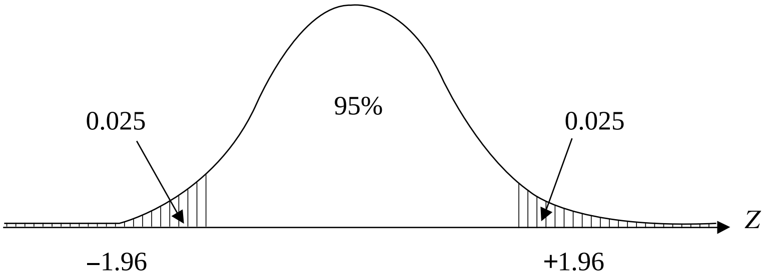
$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$$

Paso 2. Se establece el nivel de significancia $\alpha = 5\%$, por lo que $Z_{0.025} = \pm 1.96$

Paso 3. Se establece la regla de decisión: si $|Z|$ es mayor a ± 1.96, H_0 se rechaza.

Paso 4. Se ubica la región crítica de rechazo de H_0 en la curva de operación



Paso 5. Se aplica la estadística de prueba

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Paso 6. Sustituyendo los datos se obtiene:

$$Z_c = \frac{12.2 - 10.5}{\sqrt{\dfrac{2.25}{25} + \dfrac{0.25}{20}}} = \frac{1.7}{\sqrt{0.09 + 0.0125}} = \frac{1.7}{0.320}$$

$$Z = 5.31$$

Paso 7. Se considera la regla de decisión: como 5.31 es mayor que 1.96, H_0 se rechaza para $\alpha = 5\%$.

Paso 8. Conclusión.

Existen diferencias estadísticamente significativas entre $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$

Nota. Cuando las muestras son grandes $n \to \infty$, por medio del teorema central del límite, $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ puede ser sustituido por $\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$

■ Ejemplo 2

Un fabricante de cigarrillos publicita que la marca 1 no es más dañina para la salud que la 2 (con filtro). Suponiendo que el daño a la salud está asociado con el contenido de nicotina, el Instituto del Consumidor tomó al azar dos muestras de cigarrillos de cada marca y midió la cantidad de nicotina con la misma técnica, de donde surgieron los siguientes datos:

Marca 1	Marca 2
$n_1 = 125$	$n_2 = 180$
$\overline{X}_1 = 24.6$ mg	$\overline{X}_2 = 24.3$ mg
$S_1 = 1.4$ mg	$S_2 = 1.1$ mg
$S_1^2 = (1.4)^2 = 1.96$	$S_2^2 = (1.1)^2 = 1.21$

Establezca las hipótesis adecuadas y contrástelas, utilizando un nivel de significancia de 5%.

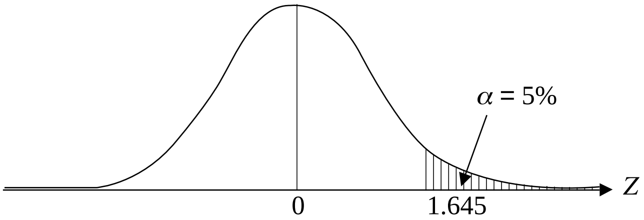
Solución

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 > \mu_2$

$\alpha = 0.05$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{24.6 - 24.3}{\sqrt{\frac{1.96}{125}+\frac{1.21}{180}}};\ Z = 2.00$$



dado que $\alpha = 5\%$, la región crítica es:
como $Z > Z_{0.05}$, o sea, $2.00 > 1.645$, H_0 se rechaza.

Conclusión

La marca 1 de cigarrillos es más dañina que la 2.

Caso 2

Varianzas poblacionales desconocidas pero iguales

Se puede obtener la varianza combinada (también conocida como varianza *pooled*), que es un estimador insesgado de las varianzas combinadas, de la siguiente manera:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\,S_1^2 + (n_2 - 1)\,S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{y} \quad S_p = \sqrt{S_p^2}$$

por lo que se tiene que la distribución del estadístico es la t de Student, el estadístico más poderoso para el investigador, cuando se quiere conocer la diferencia entre los efectos, en lugar de los efectos mismos. La distribución t, es más apropiada que la Z, para muestras pequeñas, y si $n \geq 120$, entonces $t = Z$.

El intervalo de confianza al $(1 - \alpha)\%$ se construye de este modo:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\; t_{n_1+n_2-2,\ \frac{\alpha}{2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\; t_{n_1+n_2-2,\ \frac{\alpha}{2}}$$

o también $\mu_1 - \mu_2$ está en $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\; t_{n_1+n_2-2,\ \frac{\alpha}{2}}$ con una probabilidad $1 - \alpha$

donde $n_1 + n_2 - 2$ son los grados de libertad (gl); esto es, el número total de participantes en las muestras, menos el número de muestras.

El modelo estadístico lineal para la prueba t de dos muestras independientes es:

$X_{ij} = \mu + A_i + E_{ij}$

$i = 1, 2$

$j = 1, 2, ..., n$

donde

X_{ij} = las observaciones a cada muestra j para el tratamiento i-ésimo

μ = el promedio combinado del efecto del tratamiento de los tratamientos muestrales

A_i = el efecto debido al tratamiento 1, si $i = 1$ y 2, si $i = 2$

E_{ij} = el error experimental o aleatorio, debido a cada tratamiento i en cada muestra j. En el capítulo 11, cuando se utiliza la prueba F, o sea, un análisis de varianza (ANOVA) para dos muestras, se tiene que $F = t^2$

■ Ejemplo 3

Suponga que en el ejemplo de los dispositivos producidos por las dos máquinas, las varianzas poblacionales son desconocidas pero iguales, debido a que las máquinas producen los mismos dispositivos; entonces las varianzas se obtienen a partir de los datos de las muestras.

Máquina 1	Máquina 2
$n_1 = 25$	$n_2 = 20$
$\overline{X}_1 = 12.2$	$\overline{X}_2 = 10.5$
$S_1 = 1.2$	$S_2 = 0.3$
$S_1^2 = 1.44$	$S_2^2 = 0.09$

a) Construir un IC al 95%
b) Contraste de hipótesis

Paso 1. El estadístico de prueba es la *t* de Student

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

Paso 2. Calcule $S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

$$S_p = \sqrt{\frac{24 \times 1.44 + 19 \times 0.09}{25 + 20 - 2}} = \sqrt{0.84349} = 0.918$$

Paso 3. Sustituya en

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \ \pm \ S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\ t_{gl, \frac{\alpha}{2}}$$

$$(12.2 - 10.5) \ \pm \ 0.918 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}\ t_{43,\ 0.025}$$

$$1.7 \pm 0.918\ (0.3)\ (2.0167)$$

donde $t_{43,\ 0.025} = 2.0167$ se obtiene de la tabla de valores críticos de la *t* de Student.

Entonces

$$1.7 \pm 0.05554$$

y el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ al 95% es (1.15, 2.25)

b) Contraste de hipótesis.

Paso 1. Establecer las hipótesis y α.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 5\%$

Paso 2. Utilice el modelo

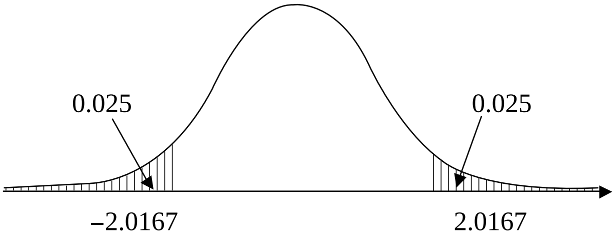
$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Paso 3. Sustituyendo los datos, se tiene:

$$t = \frac{12.2 - 10.5}{(0.918)\ (0.3)} = \frac{1.7}{0.2754} = 6.17$$

Paso 4. Aplique la regla de decisión si la $t = 6.17$ es mayor o igual que la t_{tabla}, $t_{43,\ 0.025} = 2.0167$, entonces H_0 se rechaza.

Paso 5. Ubique la región crítica en la curva de operación



Paso 6. Como 6.17 > 2.0167

H_0 se rechaza con $\alpha = 0.05$ (5%)

Caso 3

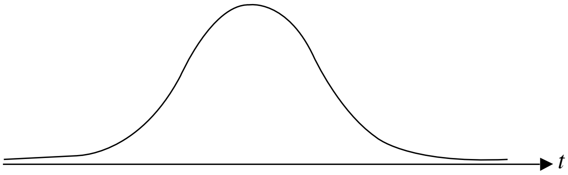
Varianzas poblacionales desconocidas y diferentes.

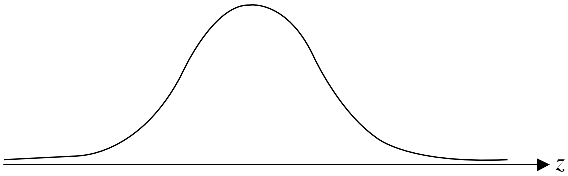
Entonces, el estadístico de prueba es:

$$t=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Si las varianzas son conocidas y las muestras grandes, n_1 y $n_2 \to \infty$, entonces las varianzas muestrales s_2 y s_2^2 son una buena aproximación de sus respectivas varianzas poblacionales σ_1^2 y σ_2^2. Así, $Z = t$,

donde $Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$





La distribución t de Student y la distribución normal estandarizada Z son equivalentes, cuando $n \to \infty$. Consideraciones acerca de la t de Student:

- Se requiere que ambas muestras sean seleccionadas aleatoriamente. La t de Student es lo bastante "robusta" (característica de una prueba estadística de no ser violada fácilmente), para tolerar desviaciones considerables del requisito de distribución normal. En particular, dado que $n_1 = n_2$ (o muy cercanamente), si $n_1 \neq n_2$, la t es menos eficiente. Por lo que es necesario e importante calcular los tamaños de muestra necesarios para obtener una diferencia $\delta = |\, \mu_1 - \mu_2 \,|$ estadísticamente significativa.
- La t es más robusta si también se establecen las hipótesis de dos colas, esto es porque no se afecta por el sesgo de la distribución. Es más conveniente si $\alpha = 5\%$ o $\alpha = 1\%$.
- La "potencia" es la habilidad de que una prueba estadística rechace correctamente H_0 cuando es falsa. Esta potencia de la t se ve afectada seriamente para hipótesis unilaterales (de una cola).
- Si las varianzas no son iguales, el error tipo I tenderá a ser mayor que el α establecido. Pero si las muestras son iguales, la t es robusta para muestras de tamaño moderado a grande, $n > 30$.

INTERVALO DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA DOS PROPORCIONES

Es esencial recordar que, cuando se estudian proporciones, se hacen referencias intrínsecamente a la distribución binomial con parámetro π. La construcción de intervalos de confianza para diferencias entre dos proporciones pertenece a este caso. Otra condición que no debe dejar de señalarse es que las muestras deben ser independientes, es decir, muestras aleatorias, las distribuciones binomiales serán independientes.

En algunas situaciones el investigador requiere comparar la proporción de un grupo distinto con la de otro, en relación con una característica en común. Por ejemplo, las autoridades de cierto país necesitan comparar los índices de divorcios que registran las zonas sur y norte del mismo. Se decide elaborar un intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de divorcio.

Sean

π_1 = Proporción (índice) de divorcios en la zona sur del país.
π_2 = Proporción (índice) de divorcios en la zona norte del país.

La diferencia de ambas proporciones es un buen instrumento para la comparación. Se considera un intervalo de confianza aproximado del $(1 - \alpha)$ 100% para $(\pi_1 - \pi_2)$ y la diferencia entre los dos parámetros binomiales (dicotómicos).

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1\,(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\,(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq \pi_1 - \pi_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1\,(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\,(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

o también $(\pi_1 - \pi_2)$ está en

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1\,(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\,(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

con probabilidad $1 - \alpha$

donde:

$$\hat{P}_1 = \frac{\text{número de casos favorables en la muestra 1}}{\text{número total de casos en la muestra 1}}; \quad \hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{\text{número de casos favorables en la muestra 2}}{\text{número total de casos en la muestra 2}}; \quad \hat{P}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

■ Ejemplo 4

Dos grupos de pacientes (A y B) sufren cefaleas crónicas y constan de 150 y 100 individuos, respectivamente. Al primer grupo se le suministra una nueva clase de píldora contra el dolor, mientras que el segundo recibe píldoras ordinarias. Se alivian de inmediato 60 miembros del grupo A y 30 del B. Construya un intervalo de confianza de 95%, de la diferencia de proporciones poblacionales $(\pi_1 - \pi_2)$ binomiales.

Datos

$X_1 = 60$
$n_1 = 150$
$X_2 = 30$
$n_2 = 100$

Paso 1. Se calculan $\hat{P}_1$ y $\hat{P}_2$

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{60}{150} = 0.40$$

$$\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{30}{100} = 0.30$$

Paso 2. Se obtienen $\hat{q}_1$ y $\hat{q}_2$

$$\hat{q}_1 = 1 - \hat{P}_1 = 1 - 0.40 = 0.60$$

$$\hat{q}_2 = 1 - \hat{P}_2 = 1 - 0.30 = 0.70$$

Paso 3. Se aplica el modelo

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}}}$$

Paso 4. Como 1 – α = 95%, α = 5% y $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025}$ = 1.96. Dado que se considera una aproximación normal de la distribución normal, entonces $(-1.96 \leq Z \leq 1.96)$.

Paso 5. Se sustituyen los datos en:

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \ \pm \ Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1\ (1 - \hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\ (1 - \hat{P}_2)}{n_2}}$$

$$(0.40 - 0.30) \ \pm \ 1.96\sqrt{\frac{0.40 \times 0.60}{150} + \frac{0.30 \times 0.70}{100}}$$

Paso 6. Se realizan las operaciones

$$(0.10) \pm 1.96 \ \sqrt{0.0016 + 0.0021}$$

$$(0.10) \pm 1.96 \ \sqrt{0.0037}$$

$$(0.10) \pm 1.96 \times 0.0608$$

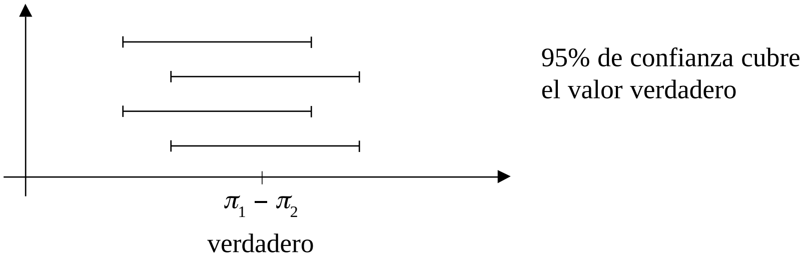
$$0.10 \pm 0.1192$$

redondeando: 0.10 ± 0.12

$\pi_1 - \pi_2$ está en (0.02, 0.22)

o sea, entre 2 y 22%

La diferencia entre las dos proporciones está dada por el intervalo anterior, con una confiabilidad de 95%. Su representación gráfica aparece a continuación:



Realizar el contraste de hipótesis del ejemplo anterior:

Paso 1. Se establecen las hipótesis estadísticas y el nivel de significancia $\alpha = 5\%$

H_0: $\pi_1 = \pi_2$
H_i: $\pi_1 \neq \pi_2$

Paso 2. Se define el modelo a utilizar:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{P\,(1-P)}\;\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1\,n_2}}}$$

donde H_0 es verdadera si $\pi\,(1 - \pi)$, o sea, $\pi_1 = \pi_2 = \pi$
Se puede utilizar el estimador

$$\hat{P}\,(1-\hat{P})$$

debido a que Z se distribuye normalmente.

Paso 3. Se define $\hat{P}$ como:

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Paso 4. El estadístico de prueba para la Z calculada es:

$$Z_c = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}\,(1-\hat{P})\left(\dfrac{n_1+n_2}{n_1\,n_2}\right)}}$$

Paso 5. Se calcula $\hat{P}$

$$\hat{P} = \frac{60+30}{150+100} = \frac{90}{250} = 0.36$$

Paso 6. Se sustituyen los datos del ejemplo anterior y se obtiene Z

$$Z = \frac{0.40 - 0.30}{\sqrt{(0.36)\ \frac{150 + 100}{150 \times 100}}}$$

$$Z = \frac{0.10}{\sqrt{0.36 \times \frac{250}{15\,000}}} = \frac{0.10}{\sqrt{0.36 \times 0.01667}}$$

$$Z_c = \frac{0.10}{0.077} = 1.29$$

Paso 7. Se considera la siguiente regla de decisión:
Si $Z_b \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$, entonces H_0 se rechaza, pero como 1.29 no es mayor que 1.96 ¡H_0 no se rechaza!

Paso 8. Conclusión

No existe diferencia estadísticamente significativa entre la proporción de los que tienen alivio utilizando las nuevas píldoras y los que usan las ordinarias.

INTERVALO DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA DOS VARIANZAS

Intervalo de confianza a un nivel (1 – α) para el cociente de dos varianzas si X_1 y X_2 son independientes

como

$$\frac{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} \sim F_{n_1 - 1, - n_2 - 1}$$

$$= P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2}\left[F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}\right]\right] = 1 - \alpha$$

$\therefore$ el intervalo de confianza deseado es

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2}\left[F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}\right]$$

o también

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ está en } \pm\frac{S_1^2}{S_2^2}\left[F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}\right]$$

■ Ejemplo 5

Construir un intervalo de confianza de 90% del cociente de dos varianzas.

$n_1 = 11$

$S_1^2 = 90\ 000$

$S_2^2 = 40\ 000$

$n_2 = 21$

$F_{0.05,\ 10,\ 20} = 2.35$

donde

$F_{0.05,\ 20,\ 10} = 2.774$

Sustituyendo los valores:

$$2.25 \times \frac{2.35}{1.94} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 2.25 \times 2.774$$

$$5.287 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 6.241$$

lo que significa que al 95% $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ está en (5.29, 6.24)

■ Ejemplo 6

Al poner a prueba cierto plástico, se obtuvieron los siguientes datos respecto de dos muestras provenientes de fábricas distintas. Realice la prueba para homogeneidad de varianzas.

Fábrica	Tamaño muestral	Estimación de la desviación estándar
A	11	300
B	21	200

Paso 1. Identifique la variable de interés. Se desea saber si existe diferencia entre las varianzas de las dos muestras extraídas.

Paso 2. Proponga las hipótesis estadísticas.

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$
$$H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$$

Paso 3. Establezca el valor del error que se está dispuesto a aceptar (α).

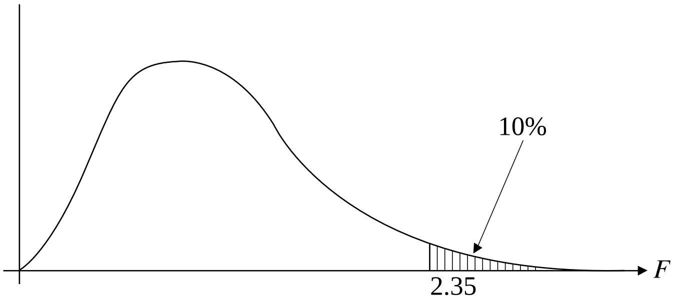
$$\alpha = 5\%$$

Paso 4. Determine la estadística de prueba adecuada.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ donde } S_1^2 > S_2^2$$

Paso 5. Obtenga el valor crítico mediante la tabla correspondiente y ubique la zona de rechazo en una gráfica.

$$S_A^2 = 90\,000$$
$$S_B^2 = 40\,000$$
$$gl = 11 - 1 = 10$$
$$gl = 21 - 1 = 20$$
$$F_{0.05,10,20} = 2.35$$



Paso 6. Especifique la regla de decisión para H_0.

Si $F_c > 2.35 \Rightarrow H_0$ se rechaza.

Paso 7. Calcule el valor del estadístico de prueba mediante el modelo propuesto.

$$F_c = \left(\frac{300}{200}\right)^2 = 2.25$$

Paso 8. Obtenga las conclusiones.

Como $2.25 < 2.35 \Rightarrow H_0$ no se rechaza.
No es significativa la diferencia entre las varianzas.

■ Ejemplo 7

Se quiere comparar la variabilidad de las emisiones de CO_2 que se presentan al utilizar dos tipos de gasolina (A y B). Se emplea un par de automóviles en las mismas condiciones (de afinación, marca y modelo) y se obtienen los siguientes porcentajes de emisión:

Automóvil A	93.12	93.57	92.81	94.32	93.77	93.52
Automóvil B	92.54	92.38	93.21	92.06	92.55	

Paso 1. Identifique la variable de interés. La emisión de CO_2 está en porcentaje y se busca saber si existe variabilidad entre las dos clases de gasolina, expuestas en las mismas condiciones.

Paso 2. Proponga las hipótesis.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Paso 3. Establezca el valor del error que está dispuesto a aceptarse (α);

$$\alpha = 10\%,\ \alpha = 0.1$$

Las tablas de los valores críticos de la prueba F son de una cola superior para $\alpha = 5\%$ o $\alpha = 1\%$. Por consiguiente, la hipótesis alterna para dicha prueba únicamente puede considerarse para una cola, con $\alpha = 5\%$ o $\alpha = 1\%$; o es una hipótesis alterna para dos colas y entonces $\alpha = 10\%$ o $\alpha = 2\%$.

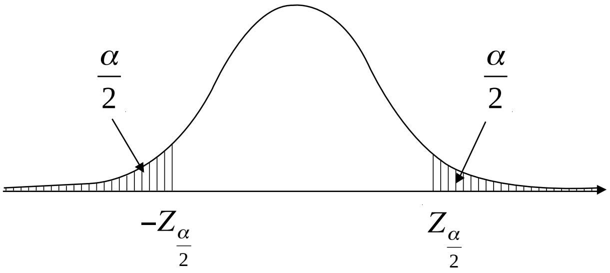
$$\frac{\alpha}{2} = 5\%.$$

a) $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ o $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

b) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

La regla de decisión es:

a) Tanto como para una cola.
b) Como para dos colas.



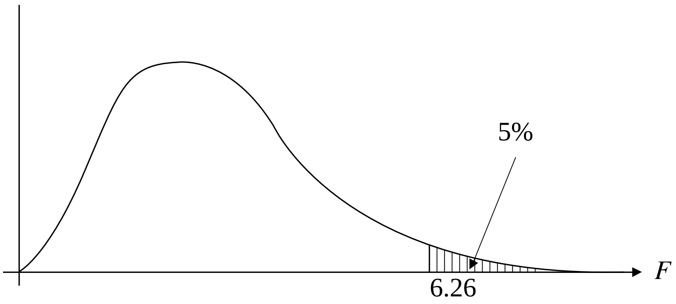
Paso 4. Determine el modelo estadístico.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ donde } S_1^2 > S_2^2$$

El grupo 1 es el que tiene la varianza mayor.

Paso 5. Obtenga el valor crítico mediante la tabla correspondiente:

$$F_{5,\,4,\,0.05} = 6.26$$



Paso 6. Establezca la regla de decisión para rechazar H_0:

Si $F > 6.26 \Rightarrow H_0$ se rechaza.

Paso 7. Calcule el valor estadístico.

$$S_1 = 0.52327$$
$$S_1^2 = 0.27382$$
$$S_2 = 0.41973$$
$$S_2^2 = 0.17617$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.27382}{0.17617} = 1.55$$

Paso 8. Obtenga las conclusiones.

Como 1.55 < 6.26 $\Rightarrow H_0$ no se rechaza. Luego, las varianzas son iguales y existe la misma variabilidad de emisión de CO_2 en ambas gasolinas.

Si las muestras son grandes $n_1 \to \infty$ y $n_2 \to \infty$, y X_1 y X_2 son independientes, puede utilizarse la prueba Z.

$$Z = \frac{S_1 - S_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_1}}} \qquad S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_2 + n_2 - 2}}$$

donde S_1 y S_2 son las desviaciones estándar de cada muestra.

CONTRASTE PARA MÁS DE DOS VARIANZAS

Uno de los supuestos más importantes para aplicar un análisis de varianza es la *homoscedasticidad*, o sea, la igualdad de las varianzas, también llamada *homogeneidad de varianzas*. Sin embargo, en algunas situaciones, por ejemplo, en control de calidad, la variabilidad de un producto manufacturado mediante procesos diferentes debe mantenerse igual.

Cuando las muestras independientes son del mismo tamaño, se utiliza la prueba de Cochran o la de Hartley. Por otra parte, cuando las muestras independientes son de diferente tamaño, se emplea la prueba de Bartlett.

Una condición para aplicar las tres pruebas mencionadas anteriormente es que las poblaciones se distribuyan de manera normal.

La prueba de Cochran consiste en obtener la suma de las varianzas muestrales de las *k* muestras

$$\sum_{i=1}^{k} S_1^2$$

Por observación, se encuentra la varianza mayor $S^2_{\text{máx}}$ y se aplica.

$$R_{n,k} = \frac{S^2_{\text{máx}}}{\sum_{i=1}^{k} S_1^2}$$

La prueba de Hartley es parecida a la anterior: se observan las varianzas mayor y menor, y se aplica la siguiente fórmula:

$$F_{\text{máx}} = \frac{S^2_{\text{máx}}}{S^2_{\text{mín}}}$$

■ Ejemplo 8

Se desea saber si existe homoscedasticidad entre las varianzas de cinco muestras independientes del mismo tamaño (16 datos).

Paso 1. Se supone que las poblaciones a las cuales pertenecen estas muestras se distribuyen normalmente.

$$n = 16$$

$$k = 5$$

$$S_1^2 = 38.7,\ S_2^2 = 98.6,\ S_3^2 = 78.0,\ S_4^2 = 85.1,\ S_5^3 = 56.3$$

Paso 2

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2$$

H_1: al menos una varianza es diferente.

Paso 3

$$\alpha = 5\%$$

Paso 4. Prueba de Cochran (homogeneidad de varianzas).

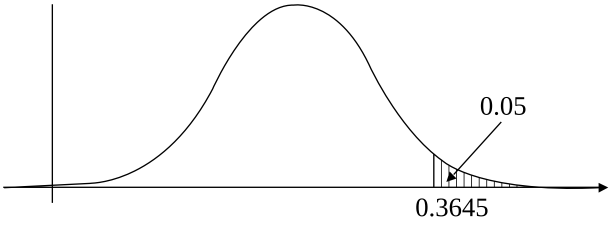
$$R^{\dagger}_{n,k} = \frac{S^2_{\text{máx}}}{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}$$

Paso 5. Al consultar la tabla de valor crítico de Cochran, se obtiene:

$$R_{16,\,5,\,0.05} = 0.3645$$

---

† En la tabla se usa *C* en lugar de *R*.



Paso 6

$$\text{Si } R_{16,\,5} \geq 0.3645$$

$$H_0 \text{ se rechaza.}$$

Paso 7

$$R_{16,\,5} = \frac{98.6}{356.7} = 0.27642$$

$$S^2_{\text{máx}} = 98.6$$

$$\sum_{i=1}^{5} S_i^2 = 356.7$$

Paso 8. Como 0.27642 < 0.3645

H_0 no se rechaza.
En conclusión, las varianzas se pueden considerar iguales.
Utilizando los mismos datos de este problema, aplicar el modelo de Hartley.

Prueba de Hartley

Paso 1

$$n = 16$$

$$k = 5$$

$$S_1^2 = 38.7,\ S_2^2 = 98.6,\ S_3^2 = 78.0,\ S_4^2 = 85.1,\ S_5^2 = 56.3$$

Paso 2

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2$$

H_1: al menos una varianza es diferente.

Paso 3

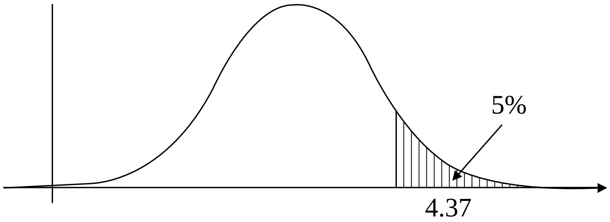
$$\alpha = 5\%$$

Paso 4. Prueba de Hartley

$$F_{\text{máx}} = \frac{S^2_{\text{máx}}}{S^2_{\text{mín}}}$$

Paso 5. Se consulta la tabla de valores críticos de Hartley.

$$F_{16,\,5,\,0.05} = 4.37$$



Paso 6

$$\text{Si } F_{máx} > 4.37$$

H_0 se rechaza.

Paso 7

$$F_{16,\,5} = \frac{S^2_{\text{máx}}}{S^2_{\text{mín}}} = \frac{98.6}{38.7} = 2.5478$$

$$S^2_{\text{máx}} = 98.6$$

$$S^2_{\text{mín}} = 38.7$$

Paso 8. Como 2.5478 < 4.37, H_0 no se rechaza.

En conclusión, las varianzas son iguales.

Prueba de Bartlett

Cuando las muestras no son del mismo tamaño y provienen de poblaciones normales, se aplica el siguiente estadístico de prueba:

$$B = \frac{2.3026}{C}\left[(N-k)\log\, S_p^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log S_i^2\right]$$

donde:

2.3026 es una constante

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

log = logaritmos comunes (base 10)

n_i = tamaño de cada muestra

S_p^2 = varianza combinada; $S_p^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)\, S_i^2}{N - k}$

k = número de muestras que intervienen

$$C = 1 + \frac{1}{3\,(k-1)} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k} \right]$$

Si B está en la región de rechazo, es necesario calcular C, ya que siempre $C > 1$ y disminuirá el valor de B.

Para muestras grandes $n \to \infty$, B se aproxima a la distribución χ^2 con $k - 1$ grados de libertad.

De hecho, la región crítica de B se consulta en la tabla de la distribución χ^2.

■ Ejemplo 9

De cuatro muestras independientes, que se suponen distribuidas de manera normal, se obtienen las siguientes varianzas muestrales y sus tamaños de muestra:

$$\begin{array}{lll}
S_1^2 = 103 & n_1 = 10 & \\
S_2^2 = 86 & n_2 = 12 & \\
S_3^2 = 416 & n_3 = 8 & k = 4 \\
S_4^2 = 212 & \underline{n_4 = 9} & \\
 & n = 39 &
\end{array}$$

Calcule el estadístico de Bartlett.

Paso 1. Se supone que las muestras se distribuyen normalmente.

Paso 2. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$

H_1: al menos una varianza es diferente.

Paso 3

$$\alpha = 5\%$$

Paso 4. Prueba de Bartlett.

Paso 5. Al consultar la tabla de valores críticos de χ^2 para $\chi^2_{3,\,0.05}$

Se tiene $\chi^2_{3,\,0.05}$ = 7.815.

Paso 6. Si $B \geq 7.815$, H_0 se rechaza.

Paso 7

$$S_p^2 = \frac{9\,(103) + 11\,(86) + 7\,(416) + 8\,(212)}{39 - 4} = 185.17143$$

$$\log S_p^2 = \log 185.17143 = 2.2676$$

$$(N - K)\log\ S_P^2 = 35\,(2.2676) = 79.3730$$

$$(n_1 - 1)\log\ S_1^2 = 9\,(2.0128) = 18.1152$$

$$(n_2 - 1)\log\ S_2^2 = 11\,(1.9345) = 21.2795 \qquad \sum_{i=1}^{4}(n_1 - 1)\log S_1^2 = 76.3388$$

$$(n_3 - 1)\log\ S_3^2 = 7\,(2.6191) = 18.3337$$

$$(n_4 - 1)\log\ S_4^2 = 8\,(2.3263) = 18.6104$$

Se calcula $C = 1 + \frac{1}{3\,(3)}\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{35}\right] = 1.04902$

$$B = \frac{2.3026}{1.04902}\left[79.3730 - 76.3388\right] = 6.660$$

Sin dividir entre C

$B = 6.98655$, dividiendo entre $C = 1.04902$; $\boxed{B = 6.660}$

Paso 8. Como $6.660 < 7.815$, H_0 no se rechaza. En conclusión, las varianzas se consideran iguales.

■ Ejemplo 10

En 4 grupos de 6 personas cada uno, se trata de comprobar si “el repaso” es una variable decisiva para retener una lista de palabras monosílabas de igual valor asociativo, para lo cual se obtuvieron los siguientes resultados.

Datos:

Factor = repaso

Sujetos (n = 6)

Grupos (k = 4)

$S_1^2 = 1.30$

$S_2^2 = 2.50$

$S_3^2 = 1.30$

$S_4^2 = \underline{0.70}$

o sea, $\sum S_j^2 = 5.80$

Paso 1. Calcular la suma de las varianzas $\sum S_j^2$

Paso 2. Establecer las hipótesis.

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$

H_1 = al menos una varianza es diferente.

$\alpha = 5\%$

Paso 3. Calcular $R_{n,\,k} = \dfrac{S^2_{\text{máx}}}{\sum S_j^2}$

$$R_{n,k} = \frac{2.50}{5.80} = 0.4310$$

Paso 4. Buscar en tablas $R_{n,\,k}$ para $\alpha = 0.05$.

$$R = 6,\ 4,\ 0.05 = 0.5598$$

Paso 5. Regla de decisión:

Si $R_{n,\,k}$ calculada es > que la $R_{n,\,k}$ de tablas, entonces H_0 se rechaza.

$R_{n,\,k} = 0.4310 < 0.5598$ de tablas, $\therefore$ H_0 no es rechazada.

Prueba de Hartley para muestras independientes del mismo tamaño.

Factor = “repaso”
Sujetos ($n = 6$)
Grupos ($k = 4$)

$$S_1^2 = 1.30$$
$$S_2^2 = 2.50$$
$$S_3^2 = 1.30$$
$$S_4^2 = 0.70$$

Paso 1. Obtener las varianzas (S^2 de cada muestra).

Paso 2. Establecer hipótesis.

$H_0 : S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2$

H_1 = al menos una varianza es diferente.

$\alpha = 5\%$

Paso 3. Calcular $F_H = \dfrac{S^2_{\text{máx}}}{S^2_{\text{mín}}}$

$$F_H = \frac{2.50}{0.70} = 3.57$$

Paso 4. Tablas.

$F_{6,\,4,\,0.05} = 10.4$

Paso 5. Regla de decisión.

Si $F_H > F_{6,\,4,\,0.005}$ entonces H_0 se rechaza.

Conclusión

Como $F_H = 3.57$, no es mayor que F_H tablas, $\therefore$ H_0 no se rechaza.

Prueba de Bartlett para grupos de diferente tamaño.

■ Ejemplo 11

	S_i^2	n_i
S_1	1.30	$n_1 = 15$
S_2	2.50	$n_2 = 5$
S_2	1.30	$n_3 = 5$
S_4	0.70	$n_4 = 5$
		30
	$k = 4$ grupos	$n = 30$

$$\text{Fórmula} \quad C = 1 + \frac{1}{3\,(k-1)}$$

Paso 1. Obtener varianza combinada.

$$S_p^2 = \frac{14\,(1.30) + 4\,(2.50) + 4\,(1.30) + 4\,(0.70)}{(26)}$$

$$S_p^2 = \frac{36.2}{26} = 1.392307692$$

Paso 2. Obtener log S_p^2 = 0.1437

Paso 3. $(N - K)$ log S_p^2 = 26 × 0.1437 = 3.7362

$$
\begin{aligned}
&(n_1-1)\log S_{1p}^2 = 14 \times \log\ 1.30 = && 1.59\\
&(n_2-1)\log S_{2p}^2 = 4 \times \log\ 2.50 = && 1.59\\
&(n_3-1)\log S_{3p}^2 = 4 \times \log\ 1.30 = && 0.45\\
&(n_4-1)\log S_{4p}^2 = 4 \times \log\ 0.70 = && \underline{-0.61}\\
&(n_j-1)\ \log S_{jp}^2 = 3.02 && \sum 3.02
\end{aligned}
$$

Paso 4. Calcular $B = \dfrac{2.3026}{C}\left[(N-k)\log\ S_p^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_{i-1})\log\ S_i^2\right]$

$$B = 3.7362 - 3.02 = 0.7162 \qquad \boxed{B = 0.7162}$$

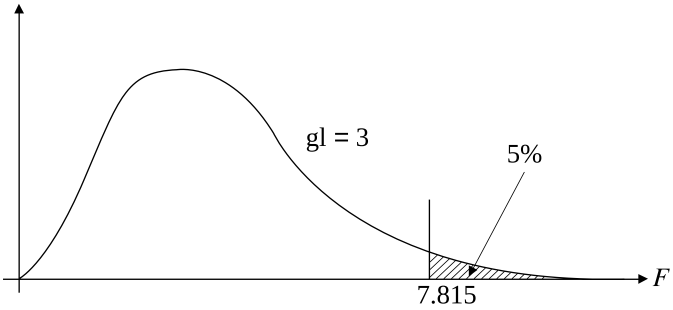
Paso 5. Calcular C.

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{N-k}\right) \therefore\ C = 1 + \frac{1}{3(3)}\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{26}\right) =$$

$$C = 1 + 0.1111\ (0.7829) = 1 + 0.08699$$

ya que C siempre es mayor que 1

$$\boxed{C = 0.869} = 1.08699$$



Paso 6. Si $B \geq X^2_{3,\,0.05}$, entonces H_0 se rechaza, como 0.7162 < 7.815 H_0 se rechaza.

Conclusión. Las varianzas son homogéneas.

Resumen

Los conceptos, definiciones y requisitos de uso de los modelos estadísticos desarrollados en este capítulo, así como el contraste de hipótesis para dos o más varianzas, son la base para los temas posteriores, como análisis de varianzas de uno y de dos factores, en el caso de estudios comparativos; para el capítulo de regresión lineal (estudios correlativos), la homogeneidad de las varianzas es de vital importancia.

Ejercicios

10.1 (Cuando se conoce σ_x^2). Se tienen dos grupos independientes del mismo tamaño $n_1 = n_2 = 36$, donde $\bar{x} = 20$ y $\sigma_1 = 3$, $\bar{x}_2 = 18$, $\sigma_2 = 3$, por lo que

$$\sigma_x^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 9$$

a) Establezca un intervalo de confianza de 95% para la diferencia de las dos medias.

b) Contraste las hipótesis con un $\alpha = 5\%$ para la diferencia de las dos medias.

10.2 La sección maternal de una guardería decide reemplazar la leche materna por la de fórmula a los bebés de un mes de edad; en dicha guardería hay 50 niños y 100 niñas. Un mes después, los pesos promedio son de 3 kg, con una desviación estándar de 0.2, 2.5 y 0.5 kg, respectivamente.

a) Construya un intervalo de confianza de 99% de la diferencia de medias.

b) Contraste las hipótesis de la diferencia de medias a un $\alpha = 1\%$.

10.3 (Cuando no se conocen σ_x^2 y muestras grandes). Se tienen dos grupos independientes del mismo tamaño $n_1 = n_2 = 36$, donde

$\bar{X}_1 = 5.4$ y $S_1 = 1.1$

$\bar{X}_2 = 5$ y $S_2 = 1.2$

$S_1^2 = 1.21$

$S_2^2 = 1.44$

a) Construya un intervalo de confianza de 95% de la diferencia de medias.

b) Contraste las hipótesis de la diferencia de dos medias.

10.4 Realice un análisis estadístico y concluya, si se están comparando los efectos de un placebo y de un fármaco (pilocarpina), en pacientes con cáncer de cabeza y cuello, que iniciaban tratamiento de radioterapia: la variable de interés es *flujo salival* (ml/min).

Calcule la prueba *t* de Student para cada cuantificación, comparando el grupo de estudio con el grupo control. (Placebo contra pilocarpina).

Tabla I. Grupo control. Placebo.

Paciente	1a. cuantificación (ml/min) inicio del tratamiento	2a. cuantificación (ml/min) quinta semana	3a. cuantificación (ml/min) séptima semana
1	1.005	0.474	0.089
2	1.248	1.000	0.911
3	0.389	0.091	0.035
4	1.391	0.304	0.176
5	0.496	0.311	0.209
6	0.368	0.221	0.191
7	1.772	0.260	0.256
8	1.475	0.457	0.286
9	0.123	0.064	0.059
10	0.918	0.320	0.343

Fuente: directa

Tabla II. Grupo de estudio. Pilocarpina.

Paciente	1a. cuantificación (ml/min) inicio del tratamiento	2a. cuantificación (ml/min) quinta semana	3a. cuantificación (ml/min) séptima semana
1	0.930	0.822	0.811
2	0.109	0.129	0.438
3	1.918	0.541	1.043
4	1.170	0.749	1.004
5	1.514	0.864	1.307
6	0.727	0.147	0.201
7	0.402	0.427	0.603
8	0.227	0.106	0.532
9	0.386	0.207	0.412
10	0.452	0.130	0.155

10.5 Entre las políticas de una compañía de seguros para satisfacer al cliente, los ajustadores evalúan los daños en un automóvil que sufrió un siniestro y la aseguradora da opción a que los dueños pregunten presupuestos en dos talleres independientes, para comparar precios. Se hace un estudio con 15 asegurados; los datos se muestran a continuación en miles pesos (7600 = 7.6 miles de pesos).

Automóvil	Taller 1	Taller 2
1	7.6	7.3
2	10.2	9.1
3	9.5	8.4
4	1.3	1.5
5	3.0	2.7
6	6.3	5.8
7	5.3	4.9
8	6.2	5.3
9	2.2	2.0
10	4.8	4.2
11	11.3	11.0
12	12.1	11.0
13	6.9	6.1
14	7.6	6.7
15	8.4	7.5

Contraste las hipótesis con $\alpha = 5\%$ de diferencia de las dos medias.

10.6 Un odontólogo debe demostrar que un nuevo aditivo químico (*fc*), presente en una crema dental que saldrá al mercado, disminuye la caries en los niños. Para reducir el error de muestreo, se decide que dicha crema dental sea probada en una muestra formada por gemelos (10 pares de gemelos). En cada una de las parejas, uno de los gemelos usará el dentífrico con aditivo y el otro la misma crema dental, pero sin éste.

La muestra aleatoria de los gemelos se extrae de una población determinada y al azar se escogen los dos grupos (control y estudio). La población está formada por gemelos cuyas edades están comprendidas entre los 8 y 10 años de edad y la muestra se constituye por 10 parejas de gemelos escogidos al azar de dicha población. La variable de interés es el número de nuevas caries en un periodo de un año.

Gemelos	X_1	X_2
A	4	4
B	0	1
C	2	0
D	5	3
E	3	4
F	4	2
G	5	1
H	1	1
I	4	0
J	3	1

a) Aplique una prueba *t* de student para muestras dependientes.
b) Aplique la prueba de Sandler (*A*).

10.7 A los comerciantes de dos ciudades fronterizas se les pregunta si están a favor o en contra de la propuesta 187 (ley antiinmigrante), que se encuentra en estudio en la legislatura de California. Para determinar si los comerciantes de las dos ciudades difieren en términos del porcentaje que está a favor, se toma una muestra aleatoria en cada ciudad de tamaño 100; 30 de los comerciantes están a favor en una ciudad, en tanto que 20 lo están en la otra.

a) Establezca un intervalo de confianza de 95%.
b) Realice un contraste de hipótesis con un $\alpha = 5\%$.

10.8 Se quiere saber si un recubrimiento especial que se aplica a las superficies de las matrículas de automóvil las hará más resistentes a la oxidación. En una zona costera se recubren 20 000 matrículas con dicho material y a otras 20 000 no se les aplica nada. Un año después, se toma una muestra de 400 placas, de las cuales 360 están en buen estado; y de una muestra aleatoria de 225 no recubiertas, 195 también están en buen estado. Establezca la hipótesis correspondiente y concluya con un $\alpha = 5\%$.

10.9 Un investigador desea aplicar una prueba *t* de Student para la diferencia entre dos medias de dos poblaciones. Se selecciona al azar una muestra de la población (a) de tamaño 15 y una varianza de 22.5. Una muestra aleatoria de la población (b) consta de 20 observaciones y una varianza de 4.2; contraste la hipótesis de las varianzas con un $\alpha = 1\%$.

10.10 Un investigador selecciona 4 muestras aleatorias de 4 poblaciones normales e independientes, calcule sus varianzas y obtenga los siguientes datos:

$S_1^2 = 103$ $\qquad n_1 = 10$

$S_2^2 = 86$ $\qquad n_2 = 12$

$S_3^2 = 416$ $\qquad n_3 = 8$

$S_4^2 = 212$ $\qquad n_4 = 9$

Compruebe la homoscedasticidad de las varianzas con un $\alpha = 5\%$, aplicando:

a) Prueba de Bartlett.
b) Prueba de Hartley.
c) Prueba de Cochran.

10.11 En referencia al problema 7 del capítulo 2, al comparar la medición *A* en los cuatro métodos, se obtienen los siguientes datos:

$S_1^2 = 3.85$ $\qquad n_1 = 8$

$S_2^2 = 10.10$ $\qquad n_2 = 8$

$S_3^2 = 4.71$ $\qquad n_3 = 8$

$S_4^2 = 4.07$ $\qquad n_4 = 8$

Calcular la homoscedasticidad de las varianzas, aplicando

a) Cochran.
b) Hartley.

10.12 Se realiza un estudio comparativo de autoconcepto en 2 grupos de adultos, morfinómanos y no morfinómanos y se aplica la escala Tennessee de autoconcepto, que consta de 9 escalas. El grupo control, o de no morfinómanos, está formado por 24 sujetos y el grupo de adictos al clorhidrato de morfina, por 20. Los datos se muestran a continuación en cada una de las escalas de la Tennessee. Establezca las hipótesis correspondientes y contrástelas al 5 y al 1% (aplique una prueba *t*).

Grupo de no morfinómanos									
Sujeto	**Identidad**	**Satis- facción**	**Conducta**	**Auto- concepto físico**	**Auto- concepto ético moral**	**Auto- cepto de perso- nalidad**	**Auto- concepto familiar**	**Auto- concepto social**	**Auto- concepto de crítica**
	1	**2**	**3**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**A.C.**
1	123	121	135	69	81	83	72	74	33
2	148	140	128	86	79	82	83	86	44
3	116	102	109	64	69	69	57	68	35
4	113	117	121	71	70	74	71	65	34
5	126	119	104	72	72	69	72	64	31
6	119	117	116	68	73	76	68	67	35
7	115	121	125	67	71	74	70	79	39
8	117	116	127	65	73	74	68	80	33
9	138	135	130	84	76	83	77	83	30
10	133	115	134	77	78	78	67	82	29
11	132	108	130	77	71	79	70	73	29
12	127	110	128	67	76	78	72	72	24
13	118	110	120	61	73	69	72	73	27
14	114	95	111	65	64	65	64	62	30
15	122	115	119	61	78	73	69	75	29
16	113	110	113	60	67	67	70	72	41
17	133	115	126	66	75	76	78	79	30
18	115	113	110	64	68	71	67	68	31
19	125	116	130	66	76	77	74	78	31
20	105	107	115	66	71	59	62	69	33
21	124	130	136	82	77	80	73	80	28
22	108	112	110	59	66	65	71	70	39
23	114	118	116	69	72	75	67	66	37
24	136	138	134	85	78	80	81	85	42

Grupo de morfinómanos									
Sujeto	**Identidad**	**Satis-facción**	**Conducta**	**Auto-concepto físico**	**Auto-concepto ético moral**	**Auto-cepto de perso-nalidad**	**Auto-concepto familiar**	**Auto-concepto social**	**Auto-concepto de crítica**
	1	**2**	**3**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**A.C.**
1	65	62	63	36	40	36	36	42	45
2	86	84	78	47	53	49	52	47	37
3	71	70	73	43	39	48	41	43	42
4	62	65	70	36	36	36	44	45	51
5	61	60	68	35	40	34	39	41	43
6	75	74	78	37	51	45	51	43	42
7	86	80	82	48	51	52	47	50	38
8	75	68	54	36	42	39	42	38	44
9	92	84	88	53	51	54	55	56	34
10	85	83	82	46	52	56	46	50	32
11	60	63	55	33	37	31	37	40	45
12	88	87	91	52	55	54	49	56	36
13	88	99	94	58	50	54	59	60	36
14	88	88	97	47	53	58	56	59	41
15	68	73	54	33	42	37	41	42	44
16	90	94	79	55	55	52	56	48	41
17	73	65	74	41	37	45	47	42	47
18	91	83	96	55	53	58	48	56	33
19	84	90	92	49	56	52	53	56	33
20	60	61	54	31	37	30	37	40	49

Capítulo 11

Análisis de varianza de un factor

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector comprenda la utilidad del análisis de varianza paramétrico de un factor.

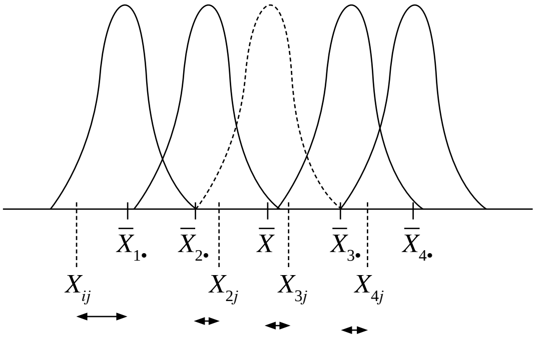
De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Explicar la lógica del análisis de varianza de un factor y establecer las hipótesis adecuadas.
- Reconocer las características fundamentales de la alternativa paramétrica al calcular la prueba *F* (Snedecor-Fisher)
- Comprender el diseño completamente aleatorizado de un factor.
- Ubicar este diseño experimental en el contexto de la investigación, de la experimentación o del estudio.
- Desarrollar el procedimiento de cálculo correspondiente a un caso particular para dos tratamientos ($k = 2$), obtención de *F* y *t* (cuadrada).
- Obtener la prueba *F* para el mismo número de sujetos y más de dos tratamientos.
- Calcular la prueba Tukey-Snedecor para grupos iguales.
- Aplicar la prueba *F* a un diferente número de sujetos y en más de dos tratamientos.
- Determinar la prueba Tukey-Snedecor para grupos diferentes.
- Verificar los siguientes supuestos del análisis de varianza:
  a) Normalidad
  b) Homoscedasticidad.
- Describir las características de la prueba Dunnett, comparando el grupo control con respecto a los experimentales.
- Utilizar MacStat para obtener el análisis de varianza de un factor.

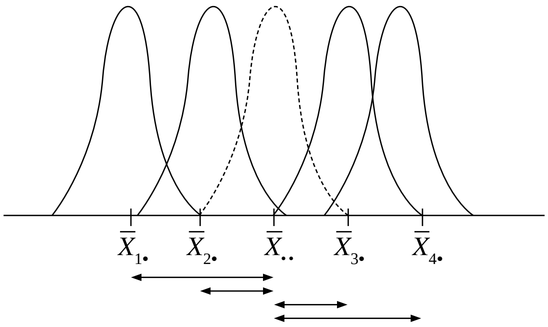
INTRODUCCIÓN

En ocasiones, el investigador de ciencias del comportamiento debe comparar los datos que correspondan a más de dos grupos, por ejemplo, los de estudiantes en seis carreras diferentes. Efectuar todas las comparaciones posibles de carreras, tomadas de dos en dos (psicología frente a medicina, odontología frente a biología, etc.), y aplicar a cada combinación una prueba *t* de Student, requerirá calcular 15 pruebas. Además de representar gran trabajo, incrementa la probabilidad de cometer el error de tipo I (rechazar la hipótesis nula, cuando debe ser aceptada). Al respecto, recuerde que el investigador desea encontrar diferencias entre medias poblacionales que pueden ser estadísticamente significativas. Sin embargo, entre más pruebas estadísticas se realicen, será más probable obtener resultados estadísticamente significativos, lo que se debe al error de muestreo más que a una verdadera diferencia poblacional y, por ello, suele cometerse el error de tipo I.

Para superar este problema y aclarar la interpretación del resultado, se necesita una prueba estadística que mantenga constante el error de tipo I, al tomar una decisión global única acerca de la existencia de una diferencia estadísticamente significativa. Ésta es la prueba *F* de Snedecor-Fisher entre tres o más medias muestrales (también en el caso particular puede aplicarse, si quieren compararse dos grupos; así, en este caso, $F = t^2$).[†] Este método estadístico se conoce como *análisis de varianza*. Se refiere a la varianza total de un conjunto de puntuaciones, que se divide en dos componentes: *i*) la distancia entre las puntuaciones crudas y su media de grupo, conocida como *varianza dentro de los grupos* o *intragrupal*, y *ii*) la distancia entre las medias de cada grupo, también llamada *varianza entre grupos* o *intergrupal*.



Intragrupos (una de las observaciones cualquiera).



Intergrupos (una de las observaciones).

[†] Este concepto implica que $t = \sqrt{F}$, sólo cuando las muestras son independientes; el análisis de varianza debe ser el modelo completamente aleatorizado de efectos fijos de un factor.

LA LÓGICA DEL ANÁLISIS DE VARIANZA

Al modelo estadístico adecuado para estimar la relación entre una o varias variables nominales independientes, respecto de una variable continua dependiente, se le conoce como *modelo de análisis de varianza*.[†]

Las variables independientes se llaman factores; éstos y sus niveles suelen definirse de manera experimental por el investigador. En cada factor hay al menos dos niveles o tratamientos que se medirán.

La hipótesis nula (H_0) que se desea contrastar en el diseño completamente aleatorizado de efectos fijos[††] de un factor es H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... \mu_K$, donde k es el número de tratamientos. En esta hipótesis los tratamientos no producen efectos (no existe diferencia estadísticamente significativa entre los grupos). El análisis de varianza presupone una relación lineal entre las variables experimentales y las observadas.

En general, el objetivo de un experimento es investigar los efectos de las variables, tanto independientes (experimentales) sobre las observadas (dependientes o de respuesta).

DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

Uno de los modelos experimentales más sencillos es el diseño de un factor completamente aleatorizado de efectos fijos, cuyo objetivo consiste en comparar varios niveles o tratamientos de un solo factor, que pueden ser cuantitativos o cualitativos.

En este diseño se tiene un total de $kn = N$ "sujetos" asignados aleatoriamente a cada uno de los k tratamientos, de tal manera que a cada tratamiento le correspondan n sujetos; cuando el número de sujetos varía en los niveles, se dice que es *desbalanceado*. La asignación aleatoria de los sujetos a los tratamientos (grupos o muestras) es un recurso para asegurar que tanto las observaciones o mediciones como las k muestras son aleatorias e independientes, y eso sin que por necesidad tengan el mismo tamaño, aunque facilitaría el proceso si así fuera.

En resumen, una asignación aleatoria determina el tratamiento que se asigna a una unidad experimental (*ue*), es decir, a un animal de laboratorio o a un sujeto, entre otros.

Para realizar la asignación, se utiliza una tabla de números aleatorios, o bien, se asigna la misma condición experimental a las unidades de los diferentes tratamientos (camadas, proceso de manufactura, dosis de un fármaco, por ejemplo). Un proceso obligado deberá ser la asignación aleatoria de las unidades experimentales a cada uno de los grupos.

Una ventaja de seleccionar un diseño experimental apropiado y sensible radica en reducir el error experimental en la medida de lo posible, para mejorar la potencia de una prueba de significancia determinada. Por *error experimental* se entenderán las fuentes de variación no incluidas en el modelo.

Para dos tratamientos (k = 2) con igual número de sujetos

El análisis de varianza del diseño que se mencionó anteriormente tiene una aplicación particular: la de dos grupos o tratamientos independientes. En este caso, puede aplicarse una prueba t de Student (véase el capítulo 10) o la prueba de Snedecor-Fisher, y entonces $F = t^2$.

[†] En otras obras se les conoce como ANOVA, ANDEVA, ANVAR o A. de V.

[††] Los tratamientos son escogidos *a priori* y permanecen fijos. Se le conoce también como modelo I.

Para generalizar la notación que se utiliza en uno, dos o más grupos, es necesario adicionar subíndices a cada una de las mediciones u observaciones *X*. El primer subíndice (*i*) indica en cuál de los grupos o tratamientos se encuentra una observación o medición determinada, y el segundo subíndice (*j*) distingue a la observación de un grupo particular.

■ Ejemplo 1

Se diseña un dispositivo para reducir la emisión de óxido nítrico en automóviles. Se seleccionan 10 automóviles al azar, según el principio de que están en condiciones óptimas y verificados, y se les equipa con este nuevo dispositivo. En paralelo, se escogen otros 10 automóviles de acuerdo con las mismas condiciones y se les equipa con el dispositivo convencional.

Se monitorea a los 20 automóviles por 30 minutos para determinar la cantidad de óxido nítrico que emiten. Se obtienen los siguientes resultados:

j **Núm. de observación**	X_{1j} **Dispositivo A**	X_{2j} **Dispositivo B**
1	1.01	1.35
2	0.98	1.16
3	0.95	1.23
4	1.02	1.20
5	1.05	1.32
6	0.96	1.28
7	0.99	1.21
8	0.98	1.25
9	1.01	1.17
10	1.02	1.19

En el ejemplo hay dos tratamientos ($i = 2$) y 10 observaciones para cada muestra

$n = 10$
$i = 1, 2$
$j = 1, 2, ..., 10$

Se procederá a calcular el análisis de varianza.

Paso 1. La variable factor unidireccional de interés es la emisión de óxido nítrico por los dispositivos (niveles o tratamientos).

Paso 2. Se establecen las hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Paso 3. Se escoge el nivel de significancia

$$\alpha = 5\%$$

Paso 4. Realizar el análisis de varianza completamente aleatorizado de efectos fijos de un factor. Calcular el valor de F, realizando las siguientes seis etapas.

Etapa 1

	Dispositivo A ***i* = 1**		**Dispositivo B** ***i* = 2**		
	$X_{1,\,1} = 1.01$	$X^2_{1,\,1} = 1.02010$	$X_{2,\,1} = 1.35$	$X^2_{2,\,1} = 1.82250$	
	$X_{1,\,2} = 0.98$	$X^2_{1,\,2} = 0.96040$	$X_{2,\,2} = 1.16$	$X^2_{2,\,2} = 1.34560$	
	$X_{1,\,3} = 0.95$	$X^2_{1,\,3} = 0.90250$	$X_{2,\,3} = 1.23$	$X^2_{2,\,3} = 1.51290$	
	$X_{1,\,4} = 1.02$	$X^2_{1,\,4} = 1.04040$	$X_{2,\,4} = 1.20$	$X^2_{2,\,4} = 1.44000$	
	$X_{1,\,5} = 1.05$	$X^2_{1,\,5} = 1.10250$	$X_{2,\,5} = 1.32$	$X^2_{2,\,5} = 1.74240$	
	$X_{1,\,6} = 0.96$	$X^2_{1,\,6} = 0.92160$	$X_{2,\,6} = 1.28$	$X^2_{2,\,6} = 1.63840$	
	$X_{1,\,7} = 0.99$	$X^2_{1,\,7} = 0.98010$	$X_{2,\,7} = 1.21$	$X^2_{2,\,7} = 1.46410$	
	$X_{1,\,8} = 0.98$	$X^2_{1,\,8} = 0.96040$	$X_{2,\,8} = 1.25$	$X^2_{2,\,8} = 1.56250$	
	$X_{1,\,9} = 1.01$	$X^2_{1,\,9} = 1.02010$	$X_{2,\,9} = 1.17$	$X^2_{2,\,9} = 1.36890$	
	$X_{1,\,10} = 1.02$	$X^2_{1,\,10} = 1.04040$	$X_{2,\,10} = 1.19$	$X^2_{2,\,10} = 1.41610$	Total
Σ*X*	9.9700		12.3600		22.3300
Σ*X*²		9.9485		15.3134	25.2619
(Σ*X*²)	99.4009		152.7696		252.1705

Se observa que $n_1 = n_2 = n = 10$, $k = 2$ y $N = n_1 + n_2 = 20$

Ahora se mostrará en forma explícita la notación que se usará en las etapas posteriores, considerando también la notación por algunos otros autores:

$$\sum_{j=1}^{10} X_{1j} = 9.9700 = X_1.. = T_1..$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{2j} = 12.3600 = X_2.. = T_2..$$

$$\sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{10} X_{ij} = X_1. + X_2. = 22.3300 = X.. = T..$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{1j}^2 = 9.9485$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{2j}^2 = 15.3134$$

De las dos sumas anteriores se forma la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{10} X_{ij}^2 = 9.9485 + 15.3134 = 25.2619 = (1.01)^2 + (0.98)^2 + \ldots + (1.19)^2 = 25.2619$$

Es primordial señalar que la doble suma anterior no se expresa en términos de punto y que se llama *suma de cuadrados total no corregida*.

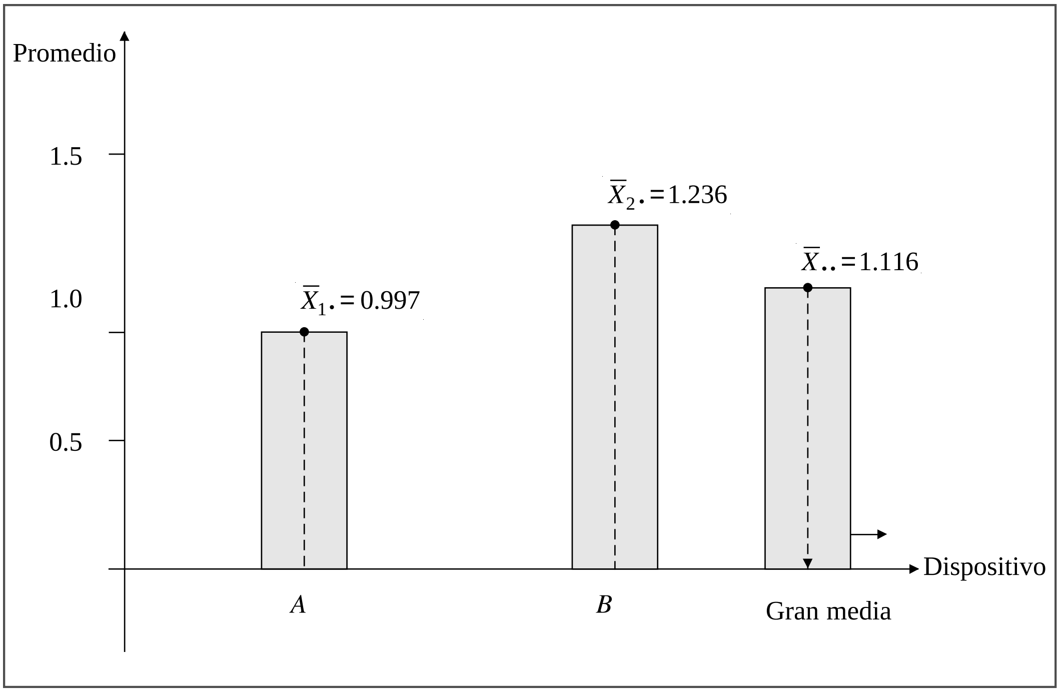
A continuación se calculan las medias aritméticas por cada grupo:

$$\overline{X}_{1\bullet} = \frac{X_{1\bullet}}{n} = \frac{9.970}{10} = 0.997$$

$$\overline{X}_{2\bullet} = \frac{X_{2\bullet}}{n} = \frac{12.3600}{10} = 1.236$$

$$\overline{X}_{\bullet\bullet} = \frac{X_{\bullet\bullet}}{N} = \frac{22.330}{20} = 1.1165$$

Posteriormente, deben graficarse las medias aritméticas obtenidas:



Etapa 2 Calcule la suma de cuadrados total corregida.

Al respecto, la SC_{tot} es

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{10} X_{ij}^2 = (1.01)^2 + (0.98)^2 + \ldots + (1.19)^2 = 25.2619$$

y la suma total es

$$\sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{10} X_{ij} = X_{\cdot\cdot} = T_{\cdot\cdot} = 22.330 = X_{1\cdot} + X_{2\cdot} = T_{1\cdot} + T_{2\cdot}$$

Por consiguiente, la SC_{tot} corregida es

$$SC_{tot} = \sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{(T_{\cdot\cdot})^2}{N}$$

$$(T_{\cdot\cdot})^2 = (22.330)^2$$

$$SC_{tot}\ (\text{corregida}) = 25.2619 - \frac{(22.330)^2}{20}$$

$$SC_{tot}\ (\text{corregida}) = 0.330455$$

Calcular la suma de cuadrados entre grupos SC_{eg} (también llamada *suma de cuadrados de tratamientos: SC_{trat}*).

$$SC_{eg} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{n} - \frac{(T_{\cdot\cdot})^2}{N}$$

Recuerde que

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} T_{i\cdot}^2$$

sustituyendo se tiene

$$SC_{eg} = \frac{(9.9700)^2 + (12.3600)^2}{10} - \frac{(22.330)^2}{20}$$

$$SC_{eg} = 25.21705 - 24.931445$$

$$SC_{eg} = 0.285605$$

Obtenga la suma de cuadrados dentro de los grupos SC_{dg} (también llamada SC_{error}), a partir de la siguiente igualdad

$$SC_{tot} = SC_{eg} + SC_{dg}$$
$$\Rightarrow SC_{dg} = SC_{tot} - SC_{eg}$$

como $SC_{tot} = 0.330455$ y $SC_{eg} = 0.285605$;

$$\begin{array}{r} 0.330455 \\ \underline{-0.285605} \\ \Rightarrow SC_{dg} = 0.044850 \end{array}$$

Etapa 3 Obtenga los grados de libertad (*gl*), si

$k = 2$; $n = 10$; $N = kn \Rightarrow N = 2\ (10) \Rightarrow N = 20$

a) Totales (gl_{tot})

$gl_{tot} = N - 1 \Rightarrow gl_{tot} = 20 - 1 \Rightarrow gl_{tot} = 19$

b) Entre grupos (tratamientos) (gl_{eg})

$gl_{eg} = k - 1 \Rightarrow gl_{eg} = 2 - 1 \Rightarrow gl_{eg} = 1$

c) Dentro de grupos (error) (gl_{dg})

$gl_{dg} = N - k \Rightarrow gl_{eg} = 20 - 2 \Rightarrow gl_{eg} = 18$

Etapa 4 Calcule los promedios de cuadrados o cuadrados medios (CM), también llamadas *varianzas estimadas*.

a) $CM_{eg} = CM_{trat} = \dfrac{SC_{eg}}{gl_{eg}}$

$$\Rightarrow CM_{eg} = \frac{0.285606}{1}$$

$$\Rightarrow CM_{eg} = 0.285605$$

b) Cuadrados medios dentro de grupos o cuadrado medio del error.

$$CM_{dg} = CM_{error} = \frac{SC_{dg}}{gl_{dg}}$$

$$\Rightarrow CM_{dg} = \frac{0.04485}{18}$$

$$\Rightarrow CM_{dg} = CM = 0.0024916$$

Etapa 5 Al obtener el valor de F hay que usar la fórmula $F_c = \dfrac{CM_{eg}}{CM_{dg}} = \dfrac{CM_{trat}}{CM_{error}}$

$$\Rightarrow F_c = \frac{0.285605}{0.0024916}$$

$$F_c = 114.64942$$

Etapa 6 Construya la tabla del análisis de varianza.

Fuente de variación	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Entre grupos (tratamientos)	1	0.2856	0.2856	114.6249
Dentro de grupos (error)	18	0.04485	0.0024916	
Total	19	0.33045		

A continuación se muestra el resultado obtenido mediante el paquete MacStat:

Tabla de análisis de varianza				
Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Razón F
Tratamientos	1	0.2856	0.2856	114.6241
Error	18	0.0449	0.0025	
Total	19	0.3305		

Paso 5. Obtener la F (tablas).

$$F_{(1,\,18,\,0.05)} = 4.41$$

Paso 6. Si $F_c > 4.41 \Rightarrow H_0$ se rechaza.

Paso 7. Conclusiones: existe diferencia estadísticamente significativa entre los dispositivos A y B. Algunos autores consideran que

$$X_1. = T_1.$$

En este caso es

$$\begin{aligned} T_1. &= 9.970 \\ T_2. &= 12.360 \\ X.. = T.. &= 22.330 \\ N &= 20 \end{aligned}$$

por lo que

$$\bar{X}.. = \frac{T..}{N} \text{ es la llamada “gran media”, } \bar{X}... = 1.1165.$$

Para el ejemplo anterior, calcule la t de Student.

$$t = \frac{\bar{X}_1. - \bar{X}_2.}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Se aplica este modelo, porque es el caso cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pero *desconocidas*.

donde $$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 \; + \; (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Se sustituyen los valores en el estadístico y se obtiene

$$S_p = \sqrt{\frac{9 \times 0.00093 + 9 \times 0.00405}{18}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{0.00837 + 0.03645}{18}}$$

$$\Rightarrow S_p = 0.04990$$

$$t = \frac{0.997 - 1.236}{0.04990 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -\frac{0.23900}{0.04990 \times 0.44721}$$

$$t = -\frac{0.239}{0.02232} \Rightarrow |t| = 10.706 \text{ (significativo al 1\%)}$$

y se comprueba que

$$F = t^2 = 114.61^{\dagger}$$

Caso A.

Mismo número de sujetos para más de dos tratamientos ($k > 2$)

Se selecciona al azar una muestra representativa de una población, por ejemplo, los estudiantes de una misma carrera universitaria. Se controla en lo posible que sean alumnos regulares, del mismo semestre y turno, así como con alto promedio de calificaciones. En primera instancia, dicha muestra puede considerarse homogénea.[†, ††]

La muestra se forma con 24 alumnos que cumplen los criterios de inclusión determinados anteriormente, de donde se constituyen cuatro grupos de seis alumnos cada uno, escogidos al azar. Se les asigna una tarea que consiste en resolver el mismo tipo de problemas de matemáticas.

Al grupo 1 se le advirtió que se aplicaría un examen más tarde (se le examinó una hora después). Al grupo 2 también se le informó lo mismo (se le examinó un día después). Al grupo 3 no le notificaron sobre el examen (examinándosele una hora después). Al grupo 4 tampoco se le avisó acerca del examen (se le examinó un día después).

Asi, en este estudio se tienen cuatro grupos (cuatro tratamientos); la variable de interés es el resultado del mismo examen aplicado a cada grupo, que mide el aprendizaje según las condiciones establecidas previamente. La variable de interés (puntuaciones obtenidas en el examen) es la dependiente, cuya naturaleza es continua y numérica; la variable independiente es nominal, o sea categórica, y pertenece a cualquiera de los grupos 1, 2, 3 o 4.

[†] Ver supuestos del análisis de varianza.

[†, ††] Este ejemplo se podrá analizar como un diseño factorial 2 × 2 (capítulo 12).

Las siguientes calificaciones se obtuvieron al aplicar el examen.

Grupo	Condición	Calificaciones
1	Aviso (examen en el corto plazo)	75, 93, 78, 71, 63, 76
2	Aviso (examen en el largo plazo)	78, 91, 97, 82, 85, 77
3	No aviso (examen en el corto plazo)	55, 66, 49, 64, 70, 68
4	No aviso (examen en el largo plazo)	64, 72, 68, 77, 56, 95

Nota: El paso cero consiste en aplicar una prueba para comprobar la homoscedasticidad.

El objetivo de este estudio busca saber si la variabilidad de las puntuaciones obtenidas en el examen es significativa, al grado de considerar diferentes las cuatro formas de comunicación que afectan el resultado del examen.

Paso 1. La variable de interés es la calificación del examen.

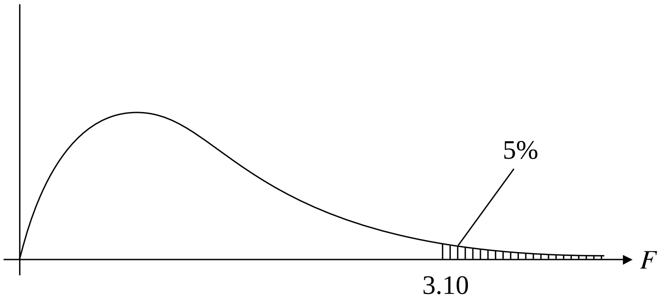
Paso 2. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
H_1: al menos una media es diferente.

Paso 3. $\alpha = 5\%$.

Paso 4. Realice un análisis de varianza completamente aleatorizado de efectos fijos de un factor. Calcule el valor de F para el mismo número de observaciones por grupo.

Paso 5. Obtener la F utilizando tablas

$F_{(3,\ 20,\ 0.05)} = 3.10$



Paso 6. Si $F_c > 3.10 \Rightarrow H_0$ se rechaza.

Para obtener el valor de F, realice las siguientes etapas:

Etapa 1

a) Elabore una lista de las n observaciones X_{ij} en columna de cada tratamiento, 1, 2, 3, ..., k.

b) En una columna adyacente registre el cuadrado de cada una de las observaciones X_{ij}, $i = 1, 2, ..., k$, $j = 1$.

c) Obtenga las sumas de las observaciones en cada tratamiento.

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{i\,\mathrm{j}} = T..$$

también las sumas de cuadrados.

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} X_{i\,\mathrm{j}}^2 = \text{ Suma de cuadrados de las puntuaciones.}$$

$$(X_1.)^2, (X_2.)^2, (X_3.)^2, \ldots, (X_k)^2$$

d) Calcule la $N_{total} = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = kn.$[†]

Sean k = Número de tratamientos, llamada también *grupos* ⇒ $k = 4$
n = Número de observaciones por tratamiento ⇒ $n = 6$
$N = kn$ ⇒ $N = 4\ (6)$
⇒ $N = 24$

e) Calcule las medias aritméticas de cada grupo y grafíquelas.

	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		
	X_{1j}	X_{1j}^2	X_{2j}	X_{2j}^2	X_{3j}	X_{3j}^2	X_{4j}	X_{4j}^2	
	75	5625	78	6084	55	3025	64	4096	
	93	8649	91	8281	66	4356	72	5184	
	78	6084	97	9409	49	2401	68	4624	
	71	5041	82	6724	64	4096	77	5929	
	63	3969	85	7225	70	4900	56	3136	
	76	5776	77	5929	68	4624	95	9025	Total
Σ*X*	456		510		372		432		1 770
Σ*X*²		35 144		43 652		23 402		31 994	134 192
(Σ*X*)²	207 936		260 100		138 384		186 624		793 044
N	$n_1 = 6$		$n_2 = 6$		$n_3 = 6$		$n_4 = 6$		24
$\overline{X}$	76		85		62		72		73.75

Antes de continuar, es primordial conocer la notación *X* usada por algunos autores.

Se relaciona con la notación Σ y quedan expresados de la siguiente manera.

Suma de los seis datos del tratamiento o grupo 1:

$$\sum_{j=1}^{6} X_{1j} = X_1. = 456 \text{ para } i = 1$$

[†] Siempre y cuando sea un experimento balanceado, el número de sujetos por nivel de tratamiento es el mismo.

Para los siguientes tratamientos o grupos se expresan así:

$$\sum_{j=1}^{6} X_{2j} = X_{2}. = 510 \text{ para } i = 2$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{3j} = X_{3}. = 372 \text{ para } i = 3$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{4j} = X_{4}. = 432 \text{ para } i = 4$$

La suma total de las puntuaciones se denota por:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} X_{ij} = X.. = 1770$$

Para la suma de los cuadrados se tiene lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{6} X_{1j}^{2} = 35\,144 \text{ para } i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{2j}^{2} = 43\,652 \text{ para } i = 2$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{3j}^{2} = 23\,402 \text{ para } i = 3$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{4j}^{2} = 31\,994 \text{ para } i = 4$$

La suma total se denota por:

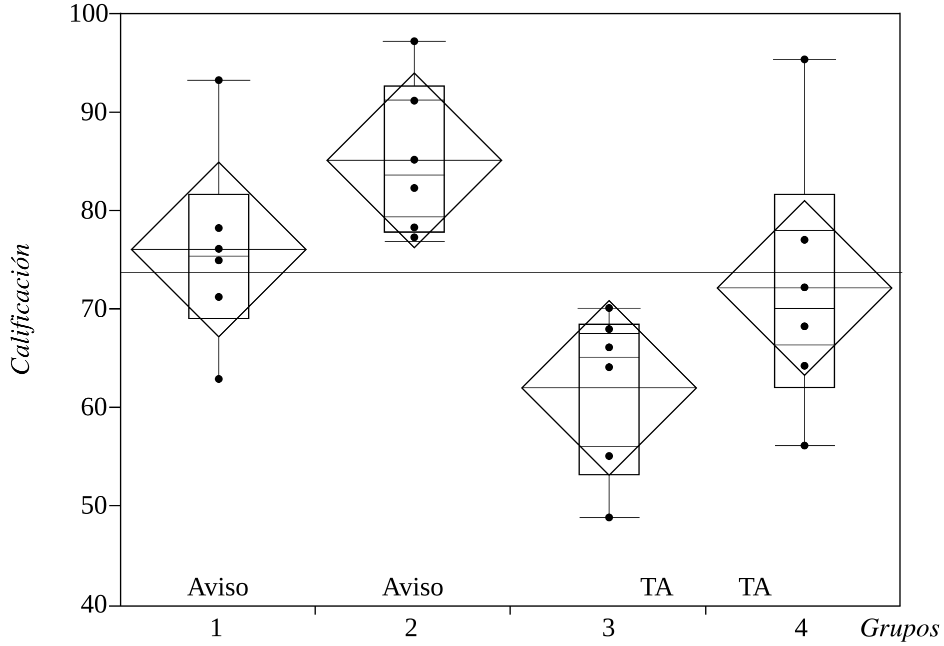
$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} X_{ij}^{2} = 134\,192$$

Las sumas de las observaciones por tratamiento se elevan al cuadrado y los resultados se suman.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} X_{i}^{2}. = \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{6} X_{ij} \right)^{2} &= (456)^{2} + (510)^{2} + (372)^{2} + (432)^{2} \\ &= 207\,936 + 260\,100 + 138\,384 + 186\,624 \\ &= 793\,044\end{aligned}$$

o sea: $(X_{1}.)^{2} + (X_{2}.)^{2} + (X_{3}.)^{2} + (X_{4}.)^{2}$

Grafique las medias muestrales obtenidas



Etapa 2 Calcule la suma de cuadrados total corregida.

$$SC_{tot} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} X_{ij}^2 - \frac{T..^{2\dagger}}{N}$$

$$= 134\,192 - \frac{(1\,770)^2}{24}$$

$$= 134\,192 - 130\,537.5$$

$$\boxed{SC_{tot} = 3\,654.5}$$

Calcule la suma de cuadrados entre grupos.

$$SC_{eg} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{6} X_{i\,j} \right)^2}{n} - \frac{(T..)^{2*}}{N}$$

$$SC_{eg} = \frac{(456)^2 + (510)^2 + (372)^2 + (432)^2}{6} - 130\,573.5$$

$$= 132\,174 - 130\,537.5$$

$$\boxed{SC_{eg} = 1\,636.5}$$

Obtenga la suma de cuadrados dentro de grupos.

$$SC_{dg} = SC_{tot} - SC_{eg} = 3\,654.5 - 1\,636.5$$

$$\boxed{SC_{dg} = 2\,018.0}$$

---

† $T..^2 = (T..)^2$

Etapa 3 Obtenga los grados de libertad (*gl*).

a) $gl_{tot} = N - 1 \Rightarrow gl_{tot} = 24 - 1 \Rightarrow gl_{tot} = 23$
b) $gl_{eg} = k - 1 \Rightarrow gl_{eg} = 4 - 1 \Rightarrow gl_{eg} = 3$
c) $gl_{dg} = N - k \Rightarrow gl_{dg} = 24 - 4 \Rightarrow gl_{dg} = 20$

Etapa 4 Calcule los cuadrados medios entre grupos.

$$CM_{eg} = \frac{SC_{eg}}{gl_{eg}} = \Rightarrow CM_{eg} = \frac{1636.5}{3}$$

$$\boxed{CM_{eg} = 545.5}$$

Cuadrados medios dentro de grupos.

$$CM_{dg} = \frac{SC_{dg}}{gl_{dg}} = \Rightarrow CM_{dg} = \frac{2\,018.0}{20} = 100.9$$

$$\boxed{CM_{dg} = 100.9}$$

Etapa 5 Obtener el valor de *F*.

$$F = \frac{CM_{eg}}{CM_{dg}} \Rightarrow F_c = \frac{545.5}{100.9}$$

$$\boxed{F = 5.40634}$$

Etapa 6 Construya el cuadro o tabla del análisis de varianza.

Fuente de variación	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Entre grupos (tratamientos)	3	1 636.5	545.5	5.40634
Dentro de grupos (error)	20	2 018.0	100.9	
Total	23	3 654.5		

Paso 7. Conclusiones: Como 5.40634 > 3.10, H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ se rechaza con $\alpha = 5\%$ (significativo al 5%).

y como $F_{(3,\ 20,\ 0.01)} = 4.94 \Rightarrow 5.40634 > 4.94$
H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ se rechaza también si $\alpha = 1\%$ (significativo al 1%).

Prueba de Tukey-Snedecor

La prueba de hipótesis no dice cuáles son el o los grupos que ocasionen que se rechace H_0.

Si la prueba F es mayor que la F_{tablas} (H_0 se rechaza), indica que los tratamientos experimentales asignados a los sujetos producen un efecto total significativo. Por consiguiente, es necesario efectuar un análisis posterior para identificar el grupo o grupos particulares que inducen la diferencia estadísticamente significativa.

Existen varios métodos para analizar lo anterior, se les conoce como *comparaciones múltiples* o *comparaciones de medias de tratamiento*. Los principales son:

- Diferencia mínima significativa (LSD).
- Prueba de rango múltiple de Duncan.
- Prueba de Student-Newman-Keuls (SNK).
- Procedimiento de Tukey modificado por Snedecor (1956).
- Prueba de Sheffé.

En este libro se utilizará el procedimiento de Tukey modificado por Snedecor (1956) (al respecto, véase Plutchik, 1983), que se desarrolla en la siguiente forma:

Paso 1. Se ubican las medias de los tratamientos, primero la de mayor valor y por último la de menor, así como las diferencias entre ellas.

Paso 2. Se calcula el error estándar de una media $(S_{\bar{x}})$, por medio de la CM_{dg} (CMe) y n, el tamaño de grupo.

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CM_{dg}}{n}}$$

Paso 3. Determinar el valor Q en la tabla del apéndice mediante el número de tratamientos (k) y los grados de libertad dentro de grupos.

Paso 4. Se calcula D, utilizando

$$D = QS_{\overline{X}}$$

Paso 5. Se compara el valor D con las diferencias de los pares de medias de los tratamientos. La presencia de pares mayores que D significa que dichos tratamientos difieren significativamente del nivel α.

Para el ejemplo anterior, encontrar los pares de medias cuyas diferencias son significativas.

Paso 1.

	Medias	**Diferencias de medias**		
Grupo	$\bar{X}_2 = 85$	$\bar{X}_3 = 62$	$\bar{X}_4 = 72$	$\bar{X}_1 = 76$
B	85	23	13	9
A	76	14	4	
D	72	10		
C	62			

Paso 2. Como $CM_{dg} = 100.9$ y $n = 6$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CM_{dg}}{n}} = \sqrt{\frac{100.9}{6}} = \sqrt{16.81667}$$

$$\boxed{S_{\overline{X}} = 4.100}$$

Paso 3. Como $k = 4$, $gl_{dg} = 20$ y $\alpha = 5\%$

$$Q_{(4.20)} = 3.96$$

Paso 4. Al calcular

$$D = QS_{\bar{x}} = 3.96 \times 4.100$$

$$\boxed{D = 16.24}$$

Paso 5. Al comparar las diferencias de los pares de medias de la tabla[†] (paso 1), se observa que sólo

$$\overline{X}_{\text{B}} - \overline{X}_{\text{C}} = 23$$

es mayor que 16.24.

Conclusión

Sólo el grupo B, respecto del C, tiene una diferencia estadísticamente significativa.

Caso B.

Diferente número de sujetos para más de dos tratamientos (*k* > 2)

Este caso es desbalanceado $n_1 \neq n_2 \neq n_3$

■ Ejemplo 2

Tratamiento 1	4.79, 3.62, 3.42, 2.38, 2.15, 4.65, 3.33
Tratamiento 2	2.05, 2.57, 3.05, 3.10, 2.63
Tratamiento 3	3.61, 3.45, 2.17, 2.27

[†] Rango studentizado (Tukey-Snedecor).

Etapa 1

	Tratamiento 1		Tratamiento 2		Tratamiento 3		
	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2	X_3	X_3^2	
	4.79	22.94	2.05	4.2025	3.61	13.0321	
	3.62	13.10	2.57	6.6049	3.45	11.9025	
	3.42	11.69	3.05	9.3025	2.17	4.7089	
	2.38	5.66	3.10	9.61	2.27	5.1529	
	2.15	4.62	2.63	6.9169			
	4.65	21.62					
	3.33	11.08					Total
Σ *X*	24.34		13.41		11.50		49.25
Σ *X*²		90.71		36.64		34.7964	162.146
(Σ *X*)²	592.435		179.83		132.25		904.51
n	7		5		4		16
$\bar{X}$	3.4771		2.682		2.875		3.01

Nuevamente se considerará la notación punto.

Sean k = Número de tratamientos, llamado también *grupos*.

j = Número de observaciones por tratamiento.

Se introduce la notación Σ, por lo que las sumas se expresan de la siguiente forma:

$$X_1. = \sum_{j=1}^{7} X_{1j} = 24.34 \quad \text{para} \quad i = 1$$

$$X_2. = \sum_{j=1}^{5} X_{2j} = 13.41 \quad \text{para} \quad i = 2$$

$$X_3. = \sum_{j=1}^{4} X_{3j} = 11.50 \quad \text{para} \quad i = 3$$

La suma total es:

$$X.. = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j_i}^{n_i} X_{ij} \right) = 49.25$$

donde n_i = número de observaciones por cada tratamiento, ya que éstos son diferentes.

En forma análoga para X_i^2

o sea:

para $i = 1$

$$\sum_{j=1}^{7} X_{1j}^{2} = 90.71$$

para $i = 2$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{2j}^{2} = 36.64$$

para $i = 3$

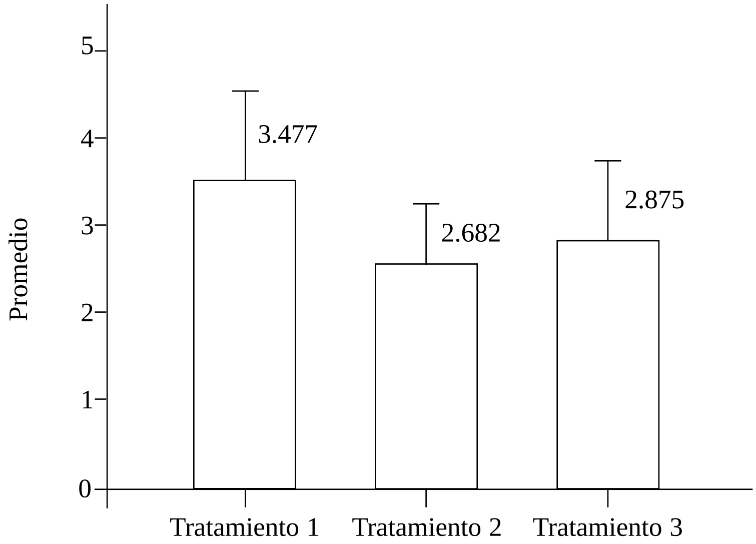
$$\sum_{j=1}^{4} X_{3j}^{2} = 34.7964$$

La suma total queda expresada así

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{n_i} X_{\overset{\cdot\cdot}{y}}^{2}\right) = 162.146$$

donde n_i = Número de observaciones por cada tratamiento, ya que éstos son diferentes.

Análisis de varianza					
Fuente	**DF**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrado de la media**	**Razón F**	**Prob > F**
Tratamientos	2	2.07	1.036	1.572	0.245
Error	13	8.56	0.659		
Total	15	10.64			



Etapa 2 Calcule la suma de cuadrados total.

$$SC_{tot} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{(T..)^2}{N}$$

$$=162.146 - \frac{(49.25)^2}{16}$$

$$= 162.146 - 151.597$$

$$\boxed{SC_{tot} = 10.55}$$

Calcule la suma de cuadrados entre grupos.

$$SC_{eg} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T..)^2}{N}$$

$$= \frac{(T_1.)^2}{n_1} + \frac{(T_2.)^2}{n_2} + \frac{(T_3.)^2}{n_3} - \frac{(T..)^2}{N}$$

$$= \frac{(24.340)^2}{7} + \frac{(13.41)^2}{5} + \frac{(11.500)^2}{4} - \frac{(49.25)^2}{16}$$

$$= 153.66 - 151.59$$

$$\boxed{SC_{eg} = 2.072}$$

Obtenga SC_{dg}

$$SC_{dg} = SC_{tot} - SC_{eg}$$

$$SC_{dg} = 10.55 - 2.072$$

$$\boxed{SC_{dg} = 8.5}$$

Etapa 3 Obtenga los grados de libertad.

a) $gl_{eg} = k - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow gl_{eg} = 2$
b) $gl_{dg} = N - k = 16 - 3 = 13 \Rightarrow gl_{dg} = 13$
c) $gl_{tot} = N - 1 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow gl_{tot} = 15$

Etapa 4 Calcule los cuadrados medios.

$$CM_{eg} = \frac{SC_{eg}}{gl_{eg}} = \frac{2.072}{2} = 1.036$$

$$\boxed{CM_{eg} = 1.036}$$

$$CM_{dg} = \frac{SC_{dg}}{gl_{dg}} = \frac{8.56}{13} = 0.658$$

$$\boxed{CM_{dg} = 0.658}$$

Etapa 5 Obtenga *F*.

$$F_c = \frac{CM_{eg}}{CM_{dg}} = \frac{1.036}{0.658}$$

$$\boxed{F_c = 1.57}$$

Etapa 6 Construya una tabla de análisis de varianza.

Fuente de variación	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Entre grupos (tratamiento)	2	2.072	1.036	1.57 ns
Dentro de grupo (error)	13	8.568	0.658	
Total	15			

ns = no significativa.

debido a que $F_{(2,\ 13,\ 0.01)} = 6.70$, entonces H_0 no se rechaza.

Prueba de Tukey-Snedecor (grupos desiguales)

Debido a que los grupos son de distinto tamaño, para aplicar esta prueba se recomienda una estrategia que consiste en obtener un CM_{dg} promedio (al respecto, véase I. Méndez, 1976, pp. 31-32).

$$CM_{dg} = \frac{1}{k}\left(\frac{CM_{dg}}{n_1} + \frac{CM_{dg}}{n_2} + \ldots + \frac{CM_{dg}}{n_k}\right)$$

■ Ejemplo 3

Calcular la prueba de Tukey-Snedecor.

Paso 1.

Tratamiento	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_1 - 2.682$	$\bar{X}_1 - 2.875$
1	3.477	0.795	0.602
3	2.875	0.602	
2	2.682		

Paso 2. Como $CM_{dg} = 0.659$

$n_1 = 7$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{CM_{dg}}{n_1} + \frac{CM_{dg}}{n_2} + \frac{CM_{dg}}{n_3}\right)}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{0.659}{7} + \frac{0.659}{5} + \frac{0.659}{4}\right)}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{3}\,(0.0941 + 0.1318 + 0.1647)}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{0.1302}$$

$$\boxed{S_{\bar{x}} = 0.3608}$$

Paso 3. Obtenga $Q_{(3,\,13)} = 3.73$, para $\alpha = 5\%$

Paso 4. Calcule $D = QS_{\bar{x}}$

$$D = 3.73 \times 0.3608$$

$$\boxed{D_c = 1.346}$$

No existe diferencia estadísticamente significativa entre ningún grupo.

Supuestos del análisis de varianza

1. Distribución normal

La no normalidad tiene un efecto pequeño cuando la inferencia se realiza respecto de las medias.

2. Varianzas iguales (homoscedasticidad)

Cuando las varianzas no son iguales (no homogéneas), tienen un efecto pequeño en la inferencia de medias, si los tratamientos (grupos) son del mismo tamaño. Pero cuando los grupos son de diferente tamaño, los efectos de la no homoscedasticidad dan resultados erróneos.

3. Independencia de las observaciones

La no independencia de las observaciones conduce a resultados poco veraces en las inferencias acerca de las medias.

Una ventaja de realizar un experimento es que, como se controlan los fenómenos en estudio, pueden contrastarse (comparar) los resultados obtenidos. Así, el investigador selecciona las condiciones más favorables para la interpretación de dichos fenómenos y, al hacerlo, define el grado de generalidad de la población correspondiente que se estudia, así como la aplicabilidad de los resultados.

Para lograr lo anterior, es necesario que el diseño experimental de la investigación garantice la comparabilidad de los tratamientos, al controlar las condiciones que producen problemas, también llamadas *factores de confusión*.

PRUEBA DE DUNNETT (*d*)

Esta prueba compara un grupo control contra varios grupos experimentales, o varios tratamientos de un control.

Con frecuencia, se requiere determinar si la respuesta de los tratamientos difiere de la correspondiente al control. Con este propósito, se realiza un experimento en el cual las diferencias entre los grupos o tratamientos pasan a segundo término, ya que lo importante es saber si los mismos proporcionan una respuesta mayor o menor que la del grupo control. En ocasiones, el único interés radica en establecer si existe una diferencia estadísticamente significativa entre cada uno de los grupos experimentales y el control, considerando sus respectivas medias aritméticas.

Esto es aplicable en un diseño completamente aleatorizado de efectos fijos de un factor, y su desarrollo consiste en lo siguiente:

■ Ejemplo 4

Considere las diferencias de las medias de los grupos 1, 2, 3 y 4.

$$\overline{X}_1 = 76,\ \overline{X}_2 = 85,\ \overline{X}_3 = 62,\ \overline{X}_4 = 72$$

donde el grupo 2 es el control.

Paso 1. Se obtienen los valores absolutos de las diferencias de las medias de cada uno de los tratamientos con el control $\left|\overline{X}_k - \overline{X}_c\right|$

Paso 2. Se considera el número de tratamientos, incluido el control (*k*), los grados de libertad de CM_{error} —que se obtiene en la tabla del análisis de varianza—; con esa información, se consulta la tabla del apéndice (al final del libro) para obtener el valor crítico t a un nivel de significancia α.

$t_{(gl,\ k,\ \alpha)}$, para una o dos colas, según sea el caso.

Paso 3. Se aplica la prueba de Dunnett (*d*).

$$d = t_{(gl,\ k,\ \alpha)},\ \sqrt{\frac{2\ CM_e}{n}}$$

donde n es el tamaño de los grupos (observaciones en los tratamientos).

Paso 4. Se aplica la siguiente regla de decisión:
Toda diferencia entre tratamiento y control, que sea mayor que *d*, es estadísticamente significativa.

Paso 1.

$$\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| = \left|76 - 85\right| = 9$$

$$\left|\overline{X}_2 - \overline{X}_3\right| = \left|85 - 62\right| = 23$$

$$\left|\overline{X}_2 - \overline{X}_4\right| = \left|85 - 72\right| = 13$$

Paso 2. Se obtiene $t_{(gl,\ k,\ \alpha)}$
donde los grados de libertad de CM_e son $gl = 20$

$$k = 4 \text{ grupos (excluyendo el de control)}$$

$$\alpha = 5\%$$

$$t_{(20,\,4,\,0.05)} = 2.19 \text{ (una cola)}$$

Paso 3. Se calcula $d\left(d = t_{(20,\,4,\,0.05)}\right)\sqrt{\dfrac{2\ CM_e}{n}}$

$$d = 2.19\sqrt{\frac{2\ (100.9)}{6}} = 2.19\ (5.79943)$$

$$d = 12.70$$

Paso 4. Como 23 > 12.70 y 13 > 12.70
El grupo 3 y el 4 presentan una diferencia estadísticamente significativa para $\alpha = 5\%$.

Si $\alpha = 1\%$
$t_{(20,\,4,\,0.01)} = 2.97$
$d = 17.22$

El único grupo que tendrá una diferencia estadísticamente significativa con el control sería el 3, para $\alpha = 1\%$.

Conclusión

H_0: $\mu_2 = \mu_1 = \mu_3 = \mu_4$
H_1: $\mu_2 > \mu_1$
$\mu_2 > \mu_3$
$\mu_2 > \mu_4$

El grupo 2 es mejor que el 3 y el 4, o sea, el aviso y el examen de largo plazo constituyen la mejor estrategia académica.

Resumen

El análisis de varianza es un método para separar en componentes la suma de cuadrados total (la suma de los cuadrados de las desviaciones en las puntuaciones o mediciones respecto de la gran media). Esta segmentación es simplemente un desarrollo algebraico, cuyo objetivo es apartar las fuentes de variación entre dichas puntuaciones individuales. Uno de los propósitos de esta separación de las fuentes de variación, las cuales están definidas por el modelo matemático empleado, es el de contrastar la hipótesis acerca de que dos o más tratamientos son iguales. Dicha hipótesis es fundamental para una correcta decisión, debido a que las medias muestrales han sido extraídas de la misma población, o quizá representen observaciones de poblaciones con diferentes medias.

Ejercicios

11.1 Se realiza un experimento con 15 ratas, de las que se forman 2 grupos al azar, el control, con 8, y el experimental, con 7. A este último se le inyectó ARN de 7 ratas que se sacrificaron después de haber sido entrenadas con éxito para desarrollar una conducta específica (la misma que se pretende obtener con las 7 ratas de dicho grupo). Las 8 integrantes del grupo control, nunca han sido entrenadas. Posteriormente, se colocaron ambos grupos en una caja de Skinner y en 5 sesiones diarias de una hora se obtuvo el promedio de veces que mostraron la conducta esperada en cada uno de los sujetos.

Grupo experimental	Grupo control
1	0
10	1
7	1
9	0
8	0
10	1
3	2
	3

Realice un análisis de varianza con los resultados obtenidos.

11.2 Se lleva a cabo un estudio para comprobar la eficacia de tres métodos de enseñanza de un tema sobre ecología.

A_1 control de lectura
A_2 conferencia en el grupo
A_3 asesoría personalizada

Se seleccionan al azar 30 estudiantes de la misma escuela y mismo grado, pero con promedio de 8 o más. Posteriormente se aplica un examen y se obtienen las siguientes puntuaciones:

A_1	A_2	A_3
4	5	3
7	6	5
9	3	1
6	8	4
9	3	4
6	2	5
5	5	7
7	6	3
7	7	5
10	5	3

Realice un análisis de varianza y concluya.

11.3 En una investigación realizada por un psicólogo acerca de la relación que existe entre la pulsión (ansiedad) de un individuo y su desempeño en la elección de puntos difíciles y fáciles en un laberinto, se encontró lo siguiente:

Se vendaban los ojos de los participantes y se midió el nivel de pulsión por medio de la administración de la tabla de ansiedad manifiesta de Taylor; se les conducía al inicio del laberinto y pedía que lo recorrieran y lo aprendieran (con la mano). Se les colocó en la mano un punzón y cuando un participante tomaba un camino equivocado se registraba el error.

El laberinto contenía 10 puntos de elección, 5 fáciles y 5 difíciles.

Se formaron 2 grupos de participantes: de pulsión elevada y baja, y se registró el número de errores cometidos por ambos grupos.

Participantes (elevada pulsión)		**Participantes (baja pulsión)**	
Puntuación MAS	**Número de errores**	**Puntuación MAS**	**Número de errores**
28	21	7	20
35	18	7	18
29	13	8	14
29	12	10	12
36	11	6	10

MAS significa la puntuación, que resulta de aplicar la tabla de ansiedad manifiesta de Taylor.

Compare el grupo de elevada pulsión con el de baja en la puntuación MAS.

11.4 Realice un análisis de varianza con el número de errores, a partir de los datos del problema 11.3.

11.5 Realice un ANOVA con los datos del problema 11.13, considerando los puntajes correspondientes a cero y negativos.

11.6 Se formaron tres grupos de 20 sujetos cada uno para llevar a cabo una investigación sobre aprendizaje programado; a cada grupo se le dio a estudiar un programa de matemáticas.

El primer grupo tomó el programa en forma normal y, por tanto, fue llamado *grupo de respuesta explícita* (RE).

El segundo grupo sólo “pensó” las respuestas sin escribirlas, *grupo de respuesta encubierta* (REn), y luego recibió información.

Un grupo control leyó solamente el programa con las respuestas ya en su lugar y tachó la porción de confirmación de respuesta: *grupo de no respuesta* (NR).

Se computó la cantidad de aprendizaje para cada estudiante, de donde se obtuvieron los siguientes resultados en porcentajes:

Respuestas explícitas (RE)		Respuestas encubiertas (REn)		No respuesta (NR)	
0.46	0.75	0.26	0.42	0.15	0.83
0.36	0.87	0.57	0.81	0.78	0.45
0.56	0.24	0.82	0.40	0.65	0.53
0.28	0.29	0.94	0.78	0.64	0.55
0.72	0.50	0.85	0.89	0.33	0.05
0.80	0.41	0.57	0.43	0.65	0.62
0.59	0.87	0.00	0.32	0.58	0.57
0.60	0.48	0.90	0.56	0.50	0.58
0.91	0.78	0.62	0.58	0.56	0.48
0.93	0.86	0.70	0.71	0.38	0.68

Realice un análisis de varianza y concluya.

11.7 Considere los datos del problema anterior y aplique la transformación de arcoseno para porcentajes en cada una de las puntuaciones para acercar a la normal; realice un análisis de varianza y concluya comparando con dichos resultados.

RE	REn	NR
42.71	30.66	45.57
36.87	49.02	62.03
48.45	64.90	53.73
31.95	75.82	53.13
58.05	67.21	35.06
63.43	49.02	53.73
50.18	0.00	49.60
50.77	71.57	45.00
72.54	51.94	48.45
74.66	56.79	38.06
60.00	40.40	65.65
68.87	64.16	42.13
29.33	39.23	46.72
32.58	62.03	47.87
45.0	70.63	12.92
39.82	40.98	51.94
68.87	34.45	49.02
43.85	48.45	49.60
62.03	49.60	43.85
68.03	57.42	55.55

11.8 Se realizó un experimento para medir la conducta verbal encubierta, utilizando los valores de electromiogramas. Los participantes eran estudiantes universitarios, a quienes se les pidió que se ocuparan en 5 clases de actividades:

El grupo 1 escuchó una historia grabada.

El grupo 2 escuchó música clásica en forma similar.

El grupo 3 memorizó una parte de la misma historia presentada visualmente.

El grupo 4 leyó una sección de la historia.

El grupo 5 escuchó una cinta en blanco en la grabadora, con instrucciones de prestar atención en caso de que escucharan algo (que, por supuesto, nunca escucharon).

Antes de estas actividades todos los participantes descansaron durante un minuto, después de lo cual se ocuparon en su actividad durante cinco minutos.
Se tomaron los registros de los valores del electromiograma originados por la ligera actividad eléctrica de los músculos del mentón, en las distintas condiciones de investigación.

Grupo				
1 (Escuchar una historia)	**2** (Escuchar música)	**3** (Memorizar)	**4** (Leer)	**5** (Nada)
1.7	–1.2	12.4	7.1	–2.2
–0.6	2.0	2.4	–2.3	0.6
2.89	0.1	–0.8	4.3	–0.1
1.1	0.5	0.0	0.0	0.6
0.0	–0.3	0.0	0.6	3.1
–0.5	3.7	2.2	2.4	2.1
2.1		0.2	6.1	4.9
			8.1	2

Realice un análisis de varianza y concluya.

11.9 Se prueban 4 técnicas de iluminación para dibujantes, mismas que básicamente dependen del grado de inclinación del reflector, y se obtuvieron los siguientes datos que miden intensidad luminosa:

0º	**25º**	**50º**	**75º**
31	31	34	37
38	34	35	34
38	27	39	27
33	27	35	32
31	29	30	26

Cada técnica se realizó en 5 situaciones semejantes. Lleve a cabo un análisis de varianza.

11.10 Los datos de la siguiente tabla muestran el CI (Army-Beta) obtenido por 25 alumnos de primer ingreso provenientes de 5 sistemas de bachillerato diferentes. Realice un análisis de varianza y concluya.

Escuelas				
A	**B**	**C**	**D**	**E**
68	49	64	67	61
55	59	63	55	59
60	61	54	65	70
67	60	52	64	69
60	61	62	59	61

11.11 Supuestamente, la temperatura afecta la vida promedio de las baterías para radio. Se lleva a cabo un estudio con 30 baterías de la misma marca e igual fecha de caducidad; las temperaturas a las que se someten se muestran a continuación, con los siguientes resultados:

Vida promedio en horas				
0º	**10º**	**20º**	**30º**	**40º**
55	60	70	72	65
55	61	72	72	66
57	60	73	72	60
54	60	68	70	64
54	60	77	68	65
56	60	77	69	65

Realice un análisis de varianza.

11.12 Se empollan dos diferentes tipos de huevos de codorniz, cuyos pesos son, en gramos:

Camada 1	Camada 2
3.3	2.6
3.6	2.2
2.6	2.2
3.1	2.5
3.2	1.2
3.3	1.2
2.9	–
3.4	–

Realice un análisis de varianza y calcule la prueba *t* de Student, comprobando que $F = t^2$.

[†]11.13 Se lleva a cabo un estudio donde participan estudiantes de nivel profesional a quienes se les detecta baja o alta susceptibilidad para ser hipnotizados. Se crean grupos de 16 estudiantes, cada uno, ya sea con baja o con alta susceptibilidad, de los cuales se forman al azar dos grupos de 8 integrantes, con lo que entonces se tienen 4 grupos, 2 de baja y 2 de alta. A un grupo de cada categoría se les induce a dicho estado; posteriormente se les pide realizar una tarea y se cuenta tanto el número de errores y aciertos como de no respuesta, obteniendo los siguientes resultados:

Baja susceptibilidad		**Alta susceptibilidad**	
Hipnotizado	**No hipnotizado**	**Hipnotizado**	**No hipnotizado**
0	+9	–16	–4
–8	+1	0	+8
+1	–5	–20	–10
–20	–14	–41	+9
–17	–2	–32	–10
–43	–3	–6	–23
–4	+14	–42	+29
–23	+9	–29	–14

donde:

(+) son aciertos
(–) son errores
(0) no contestaron.

Realice un análisis de varianza.

Considere todas las puntuaciones (+, – y 0).

[†] Tambien se puede ver como un factorial 2 × 2.

Capítulo 12

Análisis de varianza de dos factores

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector comprenda los diseños aleatorizados y de bloques aleatorizados, así como el concepto de interacción.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Desarrollar la lógica del análisis de varianza (ANOVA) de dos factores.
- Identificar los estadísticos y las limitaciones que conforman este análisis.
- Reconocer los casos donde se emplea alguno de estos modelos.
- Considerar los requisitos de uso y aplicación de cada uno de los modelos.
- Aplicar el diseño de bloques aleatorizados y establecer las hipótesis adecuadas.
- Utilizar el diseño completamente aleatorizado considerando sus respectivas hipótesis.
- Enunciar el concepto de interacción de los dos factores (variables independientes) con la variable dependiente (de interés).
- Interpretar los resultados obtenidos para cada uno de los diseños anteriores.
- Utilizar MacStat para obtener los dos diseños que se mencionaron anteriormente.

INTRODUCCIÓN

Muchos estudios o investigaciones exigen mediciones repetidas cuando se mide varias veces al mismo elemento o *unidad experimental* en los sujetos, por lo que es necesario dividir en lotes sus efectos, en adición a los efectos de los tratamientos, así como en el caso de que, aunque no se requieran medidas repetidas, suele considerarse más de una variable de tratamiento.

Hay dos modelos del análisis de varianza de dos factores:

En este texto se tratarán únicamente dos esquemas:

1. Diseño de bloques aleatorizados.
2. Diseño completamente aletorizado de dos factores. Tanto éstos como el concepto de interacción se desarrollarán en este capítulo y constituyen la base para la comprensión y aplicación de modelos más complicados que se utilizan en el diseño de experimentos.

DISEÑO DE BLOQUES ALEATORIZADOS

En ciertos casos, las unidades experimentales de una muestra son heterogéneas, pero pueden clasificarse en grupos homogéneos llamados *bloques*. Aunque entre bloques se presentan diferencias, lo más conveniente de este modelo es que el número de casos (*ue* o mediciones) en cada bloque debe ser igual (esta característica es esencial para definir cada uno). Así, cuando desea compararse *a* métodos (tratamientos) distribuidos en *b* bloques, la precisión del experimento puede mejorarse considerablemente, ya que se constituyen estos últimos para controlar algunas fuentes de variación no asociadas con las unidades y no deseables por el investigador. Construir bloques puede considerarse una extensión de formar pares con los tratamientos.

Este procedimiento es útil, por ejemplo, al analizar la producción de un artículo, el procesamiento de un reactivo o, en un plano más específico, el resultado de un experimento del que se sospecha hay una variación diaria, aun cuando las condiciones del laboratorio o proceso se mantienen constantes. Esta variación se eliminaría a partir de una estimación del error que considerase como un bloque todas las unidades experimentales estudiadas el mismo día.

Carece de sentido proporcionar tratamiento a cada bloque, ya que las posibles diferencias serían entre éstos y no entre los tratamientos; por consiguiente, los *bloques tienen que distribuirse entre los tratamientos de tal manera que cada uno de éstos se aplique a cada bloque*, y el valor promedio para cada tratamiento debe ser independiente de las diferencias entre los bloques.

Es necesario considerar:

- Un factor con dos o más niveles.
- Asignar los sujetos a los bloques, de tal manera que la variabilidad entre los sujetos de cada bloque sea menor que la existente entre los bloques. El número de casos (unidades experimentales o mediciones) en cada bloque debe ser igual.
- La asignación aleatoria de los niveles de tratamiento a las unidades experimentales en cada bloque. Si la variación entre las unidades experimentales dentro de los bloques es significativamente menor que la existente entre éstos, un diseño de bloques aleatorizados es más poderoso que uno completamente aleatorizado.[†]

[†] Roger E. Kirk, *Experimental Design*: *Procedures for the behavioral sciences*, Wadsworth Publishing Company, EUA, 1968, pp. 131-132.

Los tratamientos se distribuyen en cada bloque. Los bloques deben formarse con unidades homogéneas en uno o más factores que pueden producir mucha variabilidad en las Y y posiblemente ser factores de confusión.

Si todos los sujetos (unidades experimentales o mediciones) de la muestra son homogéneos, este diseño no es efectivo. Estrictamente no es válida la prueba para bloques, aunque hay que incluir los *gl* y *SC* de bloques en el ANOVA.

■ Ejemplo 1

Suponga que cuatro sujetos (*ue*) se asignan al azar en cuatro bloques y con cuatro tratamientos.

Paso 1. Se establecen las hipóteis:

Para tratamientos

H_0: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$

H_1: H_0 falsa

Para bloques

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$

H_1: H_0 falsa

Paso 2. Establecer el nivel de significancia.

$\alpha = 5\%$

Paso 3. Regla de decisión.

Si $F_{trat} \geq F_{tablas} \Rightarrow H_0$ se rechaza

$F_{bloq} \geq F_{tablas} \Rightarrow H_0$ se rechaza

		Tratamientos (*a*)				
		t_1	t_2	t_3	t_4	$T_{i\cdot}$
BLOQUES (*b*)	b_1	9.8	12.1	15.8	11.7	49.4
	b_2	9.5	11.8	15.5	11.7	48.5
	b_3	11.8	15.5	17.2	13.6	58.1
	b_4	13.9	15.4	17.2	14.6	61.1
	$T_{\cdot j}$	45.0	54.8	65.7	51.6	217.1 = *T*..

Paso 1. Se obtiene el factor de corrección, que es:

$$\boxed{\frac{(T..)^2}{N} \text{ donde } N = ba}$$

Como $b = 4$ y $a = 4$; $N = 16$

$$\frac{(T..)^2}{N} = \frac{(217.1)^2}{4 \times 4} = \frac{(217.1)^2}{16} = \frac{47\,132.4}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{(T..)^2}{N} = 2\,945.77$$

Paso 2. Se elevan al cuadrado cada una de las observaciones X_{ij}, y se obtiene su suma total, que es:

	$\sum_i \sum_j X_{ij}^2$				
	t_1	t_2	t_3	t_4	$T_{i\cdot}^2$
b_1	96.04	146.41	249.64	136.89	628.98
b_2	90.25	139.24	240.25	136.89	606.63
b_3	139.24	240.25	295.84	184.96	860.29
b_4	193.21	237.16	295.84	213.16	939.37
$T_{\cdot j}^2$	518.74	763.06	1 081.57	671.90	3 035.27 = $T..^2$

$$\therefore\ T..^2 = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 = 3\,035.27$$

Paso 3. Se calculan las sumas de cuadrados (SC_{tot}).

$$SC_{tot} = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{(T..)^2}{n} \text{ o también } SC_{tot} = T..^2 - \frac{(T..)^2}{n}$$

$$SC_{tot} = 3\,035.27 - 2\,945.77$$

$$\boxed{SC_{tot} = 89.50}$$

Por bloque (SC_b)

$$SC_b = \sum_{j=1} \frac{T_{\cdot j}^2}{a} - \frac{(T..)^2}{N}$$

donde:

a = número de tratamientos

$T_{i\cdot}$ = la suma de las observaciones por cada bloque [49.4 + 48.5 + 58.1 + 61.1]

$T_{i\cdot}^2$ = la suma de las observaciones por cada bloque elevadas al cuadrado $\left[(49.4)^2 + \ldots (61.1)^2\right]$.

$$SC_b = \frac{(49.4)^2 + (48.5)^2 + (58.1)^2 + (61.1)^2}{4} - 2\,945.77$$

$$SC_b = 2\,975.3575 - 2\,945.77$$

$$\boxed{SC_b = 29.5875}$$

Se obtiene la de suma de cuadrados por tratamiento (SC_{trat})

$$SC_{trat} = \sum_{i=1} \frac{T_{i\bullet}^{\ 2}}{b} - \frac{(T..)^2}{N}$$

donde:

b = número de bloques

$T_{\bullet j}$ = suma de las observaciones por tratamiento

$T_{\bullet j}^{\ 2}$ = suma de las observaciones por tratamiento elevadas al cuadrado.

$$SC_{trat} = \frac{(45.0)^2 + (54.8)^2 + (65.7)^2 + (51.6)^2}{4} - 2\,945.77$$

$$SC_{trat} = 3\,001.7725 - 2\,945.77$$

$$\boxed{SC_{trat} = 56.0025}$$

Paso 4. Se calcula la suma de cuadrados residual o de error SC_e.

$$SC_e = SC_{tot} - (SC_b + SC_{trat})$$

$$SC_e = 89.50 - (29.5875 + 56.0025)$$

$$SC_e = 89.50 - 85.59$$

$$\boxed{SC_e = 3.91}$$

Paso 5. Se obtienen los grados de libertad

$$gl_{trat},\ gl_b,\ gl_{tot} \text{ y } gl_e$$

a) gl_{trat} = número de tratamientos – 1 = columnas – 1 = 4 – 1 = 3

$$\boxed{gl_{trat} = 3}$$

b) gl_b = número de bloques –1 renglones – 1 = 4 – 1 = 3

$$\boxed{gl_b = 3}$$

c) gl_{tot} = (bloques × tratamientos) – 1 = 4 × 4 – 1 = 16 – 1

$$\boxed{gl_{tot} = 15}$$

d) gl_e = (bloques – 1) (tratamientos – 1) = 3 × 3 = 9

$$\boxed{gl_e = 9}$$

Paso 6. Se obtienen los cuadrados medios.

a) $CM_{trat} = \dfrac{SC_{trat}}{gl_{trat}} = \dfrac{56.0025}{3}$

$$\boxed{CM_{trat} = 18.6675}$$

b) $CM_b = \dfrac{SC_b}{gl_b} = \dfrac{29.5875}{3}$

$$\boxed{CM_b = 9.8625}$$

c) $CM_e = \dfrac{SC_e}{gl_e} = \dfrac{3.9100}{9}$

$$\boxed{CM_e = 0.43444}$$

Paso 7. Se calculan las F.

$$F_{trat} = \frac{CM_{trat}}{CM_e} = \frac{18.6675}{0.43444} = 42.9691$$

$$F_{bloques} = \frac{CM}{CM_e} = \frac{9.8625}{0.43444} = 22.7016$$

Paso 8. Se construye la tabla del análisis de varianza.

Fv	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Tratamientos	3	56.0025	18.6675	42.9691[a]
Bloques	3	29.5875	9.8625	22.7016[a]
Error	9	3.9100	0.43444	
Total	15	89.5000		

[a] Significativa al 1%.

Paso 9. Se obtienen:

$F(gl_{trat,}\ gl_e, a)$ para tratamientos

$F(gl_b, gl_e, a)$ para bloques

En este caso, como tratamientos es igual a bloques, se tiene:

$F_{(3, 9, 0.05)} = 3.86$

$F_{(3, 9, 0.01)} = 6.99$

Paso 10.

Conclusiones

Existe diferencia estadísticamente significativa, entre los tratamientos y entre los bloques.

En condiciones particulares, el resultado obtenido con la prueba "*F*" (análisis de varianza en el diseño de bloques aleatorizados), cuando se aplica a dos grupos o tratamientos (donde uno de ellos es el grupo control) es el mismo resultado utilizando la prueba t de Student para una muestra medida dos veces, muestras dependientes o relacionadas. Esto es $F = t^2$; estas condiciones son:

1. Cuando cada observación está formada por un par de:
   - Animales de la misma camada.
   - Lotes del mismo terreno.
   - Hojas de la misma planta.
   - Hermanos (gemelos).
   - Frutos del mismo árbol, etcétera.
2. Cuando el interés radica en conocer la diferencia entre los elementos de cada pareja.

Por último, debe hacerse notar que la t de Student considerada en este caso no indica la diferencia entre pareja y pareja.

Si el objetivo fuese *no* considerar la fuente de variación de los sujetos, entonces en el experimento se considerarían $n_1 + n_2$ sujetos, las dos muestras son independientes y, si $n_1 = n_2 = n$, se trata de una muestra medida dos veces, muestras dependientes o relacionadas.

Si se retoma el ejemplo de la sección del diseño para dos tratamientos con igual número de sujetos (capítulo 11), pero ahora con 10 automóviles en lugar de los 20, tiene una sola muestra medida dos veces (una con el dispositivo *A* y otra con el dispositivo *B*), por lo que $n = 10$.

Se aplica el análisis de varianza de bloques aleatorizados con el paquete MacStat y se obtiene:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Razón F
Tratamientos	1	0.2856	0.2856	132.8739[a]
Bloques	9	0.0255	0.00283	1.3184
Error	9	0.0193	0.00214	
Total	19	0.3305		

[a] Significativa al 1%.

Aplicando la t de Student para muestras dependientes

$$t = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}}, \text{ donde } S_{\bar{d}} = 00.02073, \ \bar{d} = 0.239$$

entonces $t = 11.52918$

por tanto, $t = \sqrt{F}$

DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

Este es un diseño general que consiste en a niveles para el primer factor A, y b niveles para el segundo factor B.

Lo primero que debe considerarse es que los efectos principales de A, en el ANOVA (ANDEVA), tendrán $gl = a - 1$, mientras que para B serán $gl = b - 1$. No obstante, como existen $a \times b$ combinaciones, los grados de libertad del error o residual $gl = ab\,(n - 1)$. Por otra parte, la interacción $A \times B$ representa un conjunto de $(a - 1)\,(b - 1)$ comparaciones independientes.

La diferencia principal con el diseño de bloques aleatorizados, que es un caso especial, consiste en que se obtienen tres valores de F (Snedecor-Fisher): *i*) uno para los efectos principales de A; *ii*) el correspondiente a los efectos principales del factor B, y *iii*) otro para el efecto de interacción $A \times B$.

■ Ejemplo 2

Factor A (tratamientos $a = 2$).
$i = 1$ Naloxeno
$i = 2$ Morfina

Factor B (tratamientos $b = 3$).
$j = 1$ Agua simple
$j = 2$ Agua con azúcar
$j = 3$ Agua con sal

Se establecen las hipótesis para tratamientos α y β y la interacción $\alpha\beta$.

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; H_1: $\alpha_1 \neq \alpha_2$

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$; H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$

H_0: $(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\ \beta)_{12} = 0$
H_1: $(\alpha\beta)_{11} \neq (\alpha\ \beta)_{12}$

El elemento por medir es la ingesta de agua en mililitros (ml),[†] $n = 4$ sujetos (animales de laboratorio) por casilla.
$N = a\,b\,n \Rightarrow N = 2 \times 3 \times 4 = 24$

		Factor *A*	
		***j* = 1**	***j* = 2**
Factor *B*	***i* = 1**	10, 8, 10, 10	5, 4, 6, 5
	***i* = 2**	6, 8, 7, 5	8, 6, 6, 6
	***i* = 3**	4, 5, 5, 4	8, 7, 7, 6

[†] Valores redondeados.

Paso 1. Calcule las sumas totales por casilla, por tratamiento y por bloques.

	***i* = 1**	***i* = 2**	$T_{i\cdot}$
***j* = 1**	$T_{1,1}$ = 38	$T_{2,1}$ = 20	58 = $T_{1\cdot}$
***j* = 2**	$T_{1,2}$ = 26	$T_{2,2}$ = 26	52 = $T_{2\cdot}$
***j* = 3**	$T_{1,3}$ = 18	$T_{2,3}$ = 28	46 = $T_{3\cdot}$
$T\cdot j$	$T_{\cdot 1}$ = 82	$T_{\cdot 2}$ = 74	$T_{\cdot\cdot}$ = 156

Nota: $T_{\cdot j}$ = La suma de los niveles o bloques (1, 2, 3).

Paso 2. Establezca las medias aritméticas.

	***i* = 1**	***i* = 2**	$\overline{X}_{\cdot j}$
***j* = 1**	$\overline{X}_{1,1}$ = 9.5	$\overline{X}_{2,1}$ = 0	$\overline{X}_{\cdot 1}$ = 7.25
***j* = 2**	$\overline{X}_{1,2}$ = 6.5	$\overline{X}_{2,2}$ = 6.5	$\overline{X}_{\cdot 2}$ = 6.500
***j* = 3**	$\overline{X}_{1,3}$ = 4.5	$\overline{X}_{2,3}$ = 4.5	$\overline{X}_{\cdot 3}$ = 5.750
	$\overline{X}_{\cdot 1}$ = 6.833	$\overline{X}_{\cdot 2}$ = 6.166	$\overline{X}_{\cdot\cdot}$ = 6.5

Paso 3. Determine la suma de cuadrados de cada puntuación.

		Factor *A*		
		***j* = 1**	***j* = 2**	$T^{a}_{\cdot j}$
Factor *B*	***i* = 1**	10^2 8^2 10^2 10^2 364	5^2 4^2 6^2 5^2 102	$T^2_{\cdot 1}$ 466
	***i* = 2**	6^2 8^2 7^2 5^2 174	8^2 6^2 6^2 6^2 172	$T^2_{\cdot 2}$ 346
	***i* = 3**	4^2 5^2 5^2 4^2 82	8^2 7^2 7^2 6^2 198	$T^2_{\cdot 3}$ 280
	$T^2_{ij\cdot}$	$T^2_{1\cdot}$ 620	$T^2_{2\cdot}$ 472	T^2..1092

Suma de cuadrados no corregida.

$$\sum_{i}^{2}\ \sum_{j}^{3}\ \sum_{k}^{4} X_{ijk}^{2}\ = 1\,092$$

donde:

$\sum_{k}^{4}$ = la suma de las puntuaciones por casilla o celda.

$\sum_{j}^{3}$ = la suma de los resultados por celda en bloques o renglón.

$\sum_{i}^{2}$ = la suma de los resultados por tratamientos o columnas.

Paso 4. Obtenga la suma de cuadrados de los totales, divididos entre *n* (número de sujetos en la casilla); a esto se le llama *factor de corrección* para la suma de cuadrados dentro de grupos.

$$\frac{\sum_{i}\sum_{j} T_{ij}^{2}}{n_{celdas}} = \frac{38^{2}+20^{2}+26^{2}+26^{2}+18^{2}+28^{2}}{4} = 1\,076$$

Paso 5. Obtenga la suma de cuadrados dentro de grupos.

$$SC_{dg} = \sum_{i}^{2}\ \sum_{j}^{3}\ \sum_{k}^{4} X_{ijk}^{2} - \frac{\sum_{k}^{4}\ \sum_{i}^{2} T_{ij}^{2}}{n_{celdas}} = \sum_{i}^{2}\ \sum_{j}^{3}\left[\sum_{k}^{4} X_{ijk}^{2} - \frac{T_{ij}^{2}}{n_{celdas}}\right]$$

$$SC_{dg} = 1\,092 - 1\,076 = 16$$

$$\boxed{SC_{dg} = 16}$$

Paso 6. Obtenga la suma de cuadrados totales por columna y renglón.

$$\frac{\sum_{i}^{2}(T_{i\cdot})^{2}}{nb} = \frac{82^{2}+74^{2}}{4\times 3} = \frac{6\,724+5\,476}{12} = 1\,016.6667$$

$$\frac{\sum_{j}^{3} T_{\cdot j}^{2}}{na} = \frac{58^{2}+52^{2}+46^{2}}{4\times 2} = \frac{3\,364+2\,704+2\,116}{8} = 1\,023.00$$

Paso 7. Calcule el factor de corrección para la suma de cuadrados de tratamiento y suma de cuadrados de bloques.

$$\frac{(T..)^2}{N} = \frac{(156)^2}{24} = \frac{24\ 336}{24} = 1014$$

donde $N = b \times a \times n$ = (bloques) (tratamientos) (número de observaciones por celda).

Paso 8. Determine la suma de cuadrados de tratamientos (SC_A, suma de cuadrados del factor A).

$$SC_A = \frac{\sum_{i}^{2} T_{i\cdot}^2}{na} - \frac{(T..)^2}{N}$$

$$SC_A = 1016.667 - 1\,014$$

$$SC_A = 2.6667$$

Posteriormente, obtenga la suma de cuadrados de bloques (SC_B).

$$SC_B = \frac{\sum_{j}^{3} T_{\cdot j}^2}{na} - \frac{(T..)^2}{N}$$

$$SC_B = 1\,023 - 1\,014$$

$$\boxed{SC_B = 9}$$

Paso 9. Establezca la suma de cuadrados de la interacción (SC_{AB}).

$$SC_{AB} = \frac{\sum_{i}^{2}\sum_{j}^{3} T_{ij}^2}{n_{celdas}} - \frac{\sum_{i}^{2} T_{i\cdot}^2}{nb} - \frac{\sum_{j}^{3} T_{\cdot j}^2}{na} + \frac{(T..)^2}{N}$$

$$SC_{AB} = 1\,076 - 1\,016.6667 - 1\,023 + 1\,014$$

$$\boxed{SC_{AB} = 50.3333}$$

Paso 10. Calcule la suma de cuadrados total.

$$SC_{tot} = \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{4} X_{ijk}^2 - \frac{(T..)^2}{N}$$

$$SC_{tot} = 1\,092 - 1\,014$$

$$\boxed{SC_{tot} = 78}$$

La relación que guardan las sumas de cuadrados calculadas anteriormente es la siguiente:

$$SC_{tot} = SC_{AB} + SC_B + SC_A + SC_{dg}$$

Paso 11. Determine los grados de libertad.

$gl_{dg} = N - ij = 24 - (2) \times (3) = 18 = 2 \times 3\ (4 - 1) = ab(n - 1),\ N = abn$

$gl_A = a - 1 = 2 - 1 = 1$

$gl_B = b - 1 = 3 - 1 = 2$

$gl_{AB} = (a - 1)\ (b - 1) = (2 - 1)\ (3 - 1) = 2$

$gl_{tot} = N - 1 = 24 - 1 = 23 = abc - 1 = 2 \times 3 \times 4 - 1$

y se cumple

$gl_{tot} = gl_{dg} + gl_A + gl_B + gl_{AB}$

Paso 12. Establezca los cuadrados medios (*CM*).

$$CM_A = \frac{SC_A}{gl_A} = \frac{2.6667}{1} = 2.6667$$

$$CM_B = \frac{SC_B}{gl_B} = \frac{9}{2} = 4.500$$

$$CM_{AB} = \frac{SC_{AB}}{gl_{AB}} = \frac{50.333}{2} = 25.16665$$

$$CM_{dg} = \frac{SC_{dg}}{gl_{dg}} = \frac{16.00}{18} = 0.88889$$

Paso 13. Construya la tabla del análisis de varianza.

Fv	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Factor *A* (tratamientos)	1	2.6667	2.6667	3.00 NS[a]
Factor *B* (bloques)	2	9.0000	4.500	5.0625[b]
A × *B* (interacción)	2	50.333	25.16665	28.3125[c] $P < 0.01$
Dentro de grupos (residual)	18	16.000	0.88889	
Total	23	78		

[a] No significativo.
[b] Significativa al 5% únicamente.
[c] Significativa al 1%.
$P < 0.01$ significativa para una probabilidad menor al 1%.

CONCEPTO DE INTERACCIÓN

En el diseño completamente aleatorizado de dos factores, no pueden considerarse por separado los efectos principales de cada uno de los que intervienen en dicho diseño. El efecto *A* se modifica al pasar de un nivel de *B* a otro.

En otras palabras, existe interacción si el efecto de un factor (tratamientos), no es el mismo para todos los niveles del otro factor.

Caso 1

Variable de interés → sílabas recordadas (en dos situaciones factor *B*, aviso y no aviso, de un examen realizado en corto y largo plazos, factor *A*)

Al aplicar el paquete MacStat se obtiene:

		Factor *A*	
		Corto	**Largo**
Factor *B*	***Aviso***	9, 11, 8, 7, 7	5, 7, 6, 3, 9
	No aviso	5, 9, 7, 4, 8	3, 4, 5, 1, 4

Conclusión

En este caso no existe interacción entre los factores *A* y *B*.

Fuente de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	**Razón F**
Tratamientos	1	39.2000	39.2000	10.8889**
Bloques	1	24.2000	24.2000	6.7222**
Interacción	1	0.8000	0.8000	0.2222$^+$
Residuos	16	57.6000	3.6000	
Total	19	121.8000		

+ No significativo.
** Significativa al 1%.

Caso 2

En un estudio realizado por E. Varas y L. González en una clínica de odontopediatría de la UNAM (1998), participaron 32 niños de entre tres y cuatro años de edad. La variable de interés era el número de “caries de biberón”, considerando el factor *A* (**consistencia** líquido o sólido) y el factor *B* (característica **nutricional** sin azúcar o con azúcar). Los 32 niños fueron clasificados en las cuatro categorías, ocho en cada una de ellas, tomando en cuenta los hábitos de su ingesta principal, y se obtuvieron los siguientes resultados:

Mediante el paquete MacStat se obtiene:

		Factor *A*	
		Líquido	**Sólido**
Factor *B*	**Sin azúcar**	8, 2, 13, 4 1, 10, 4, 7	8, 0, 6, 2 1, 8, 0, 0
	Con azúcar	11, 3, 2, 8 12, 1, 1, 6	0, 0, 3, 1 0, 1, 2, 11

Conclusión

El principal efecto significativo es la consistencia del alimento.

Fuente de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	**Razón F**
Tratamientos	1	78.1250	78.1250	4.9351**
Bloques	1	4.5000	4.5000	0.2843+
Interacción	1	0.1250	0.1250	0.0079+
Residuos	28	443.2500	15.8304	
Total	31	526.0000		

+ No significativa.
** Significativa al 5%.

Caso 3

Si el resultado de un análisis de varianza de dos factores fuera el siguiente:

Fuente de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	**Razón F**
Tratamientos	2	28.1667	14.0833	8.8947**
Bloques	1	30.0833	30.0833	19.0000**
Interacción	2	3.1667	1.5833	1.0000+
Residuos	6	9.5000	1.5833	
Total	11	70.9167		

+ No significativa.
** Significativa al 1%.

Conclusión

No existe interacción entre los factores *A* y *B*. Únicamente entre los niveles de tratamientos, existe diferencia estadísticamente significativa.

Caso 4

Cuando los resultados del análisis de varianza de dos factores fueran de la siguiente manera:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Razón F
Tratamientos	2	473.6444	236.8222	0.8570[+]
Bloques	2	128.8444	64.4222	0.2331[+]
Interacción	4	187.0222	46.7556	0.1692[+]
Residuos	36	9948.000	276.3444	
Total	44	10 737.9111		

+ No significativa.

Conclusión

No existe diferencia estadísticamente significativa entre los niveles de tratamientos, así como tampoco existe interacción entre los factores *A* y *B*.

Caso 5

Dados los siguientes resultados:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Razón F
Tratamientos	2	66.8683	33.4342	124.5656[a]
Bloques	2	3.3033	1.6516	6.1535[a]
Interacción	4	24.5114	6.1278	22.8305[a]
Residuos	99	26.5722	0.2648	
Total	107	121.2552		

[a] Significativa al 1%.

Implica la diferencia estadísticamente significativa entre los niveles de los tratamientos y la existencia de interacción entre ambos.

Caso particular

Cuando no existe diferencia estadísticamente significativa entre los tratamientos (factor A), ni entre los bloques (factor B), pero sí una interacción estadísticamente significativa ($A \times B$).

■ Ejemplo

	A_1	A_2	A_3
B_1	7, 10, 10, 11, 12	4, 6, 7, 9, 9	2, 2, 3, 7, 6
B_2	6, 5, 8, 9, 12	10, 10, 11, 11, 13	5, 4, 7, 8, 11
B_3	3, 3, 4, 8, 7	4, 6, 7, 8, 10	7, 9, 9, 10, 10

Cuyo resultado es la siguiente tabla:

Fuente de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	**Razón F**
Tratamientos	2	21.1111	10.5556	2.2619^{+}
Bloques	2	27.7778	13.8889	2.9762^{+}
Interacción	4	152.2222	38.0556	8.1548*
Residuos	36	168.0000	4.6667	
Total	44	369.1111		

+ No significativa.
* Significativa al 1%.

Resumen

Un diseño de bloques aleatorizados tambien llamado diseño de bloques al azar se puede ver (aunque no es totalmente correcto) como un factorial $t \times b$, pero con $n = 1$. Entonces no se puede estudiar la interacción. El error experimental se obtiene, sus gl., SC y CM como si fuera la interacción. Este diseño se emplea con el propósito de reducir una variación extraña, incrementando la precisión con la cual los efectos de los tratamientos se estiman.

Este capítulo es una introducción a los *experimentos factoriales*, que se definen como un experimento en el cual los tratamientos consisten en todas las combinaciones de los niveles de los factores. Tales experimentos pueden realizarse utilizando varios diseños:

- Bloques aleatorizados.
- Completamente aleatorizado (con su respectiva interacción).
- Cuadrados latinos.
- Cuadrados grecolatinos.
- Factorial de parcelas divididas, etcétera.

Ejercicios

12.1 En una institución educativa se emplearon 4 técnicas diferentes (A_1, A_2, A_3, A_4) de enseñanza de las matemáticas a nivel de bachillerato. Participan tres grupos (tres bloques) de aptitudes desiguales: B_1 = bajo rendimiento, B_2 = promedio y B_3 = alto rendimiento. Posteriormente al curso, se les aplicó un examen de conocimientos en matemáticas sobre una base de evaluación de 10 puntos, de donde se obtuvieron los siguientes resultados:

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	3	5	6
B_2	6	7	6	8
B_3	7	8	9	9

Aplicar un análisis de varianza de bloques aleatorizados para:

a) Técnicas de enseñanza (A_1, A_2, A_3, A_4)

b) Grupos (B_1, B_2, B_3)

12.2 Se realiza una investigación de dos fármacos A_1 y A_2, ya que actualmente existe un fármaco A_3 contra la hepatitis. Esta investigación se lleva a cabo en 4 hospitales;[†] por cada mil pacientes que se encuentran en tratamiento, se obtiene el número de enfermos:

	A_1	A_2	A_3
B_1	0	7	7
B_2	1	3	8
B_3	2	4	10
B_4	0	2	7

12.3 Se lleva a cabo un experimento en 7 bloques y 3 parcelas (3 tratamientos) que contienen 4, 8 y 16 unidades de un ingrediente activo, diseñado para exterminar

---

[†] Se emplea el diseño de bloques aleatorizados para eliminar el efecto en los diferentes hospitales.

moscas adultas en una granja de pollos. Los siguientes resultados muestran el número de moscas muertas en los 7 bloques y 3 tratamientos:

		Tratamiento		
		4	8	16
Bloques	1	445	414	247
	2	113	127	147
	3	122	206	138
	4	227	78	148
	5	132	172	356
	6	31	45	29
	7	177	103	63

12.4 Realice un análisis de varianza para el siguiente diseño de bloques aleatorizados; establezca la hipótesis nula para bloques y para tratamientos, y concluya utilizando un $\alpha = 1\%$.

		Tratamiento		
		T_1	T_2	T_3
Bloques	b_1	43.1	42.3	45.6
	b_2	27.6	29.3	35.1
	b_3	27.0	26.5	29.3
	b_4	31.0	32.3	34.5
	b_5	21.3	20.2	25.6

12.5 Realice un análisis de varianza del diseño de bloques aleatorizados con los siguientes datos:

		Tratamiento			
		T_1	T_2	T_3	T_4
Bloques	b_1	2	3	1	0
	b_2	4	–1	1	–1
	b_3	1	–2	–3	–2
	b_4	1	–5	–4	–3

12.6 Se estudian las funciones del cerebro en *macacus rhesus*, infligiendo una lesión bilateral en la parte inferior del temporal relacionada con la visión.

Las variables en estudio son tanto el efecto de la operación como la edad en que ésta se realiza.

Los siguientes datos (H. Harlow) reflejan la ejecución en una prueba de agudeza visual que exige la discriminación entre una barra vertical y una horizontal, separadas a la mitad por 8 mm. Las mediciones se basan en el número de respuestas correctas a preguntas.

	Edad del mono (días)		
	100	**300**	**730**
Grupo control	93.90	79.94	89.91
	91.88	50.70	96.84
Grupo experimental (operadores)	86.71	76.91	60.72
	68.70	51.96	93.68

Presente la tabla ANOVA e interprete los resultados de estos datos.

12.7 Se mide el tiempo de manufactura en segundos, tomando en consideración 9 máquinas y 3 procesos diferentes, de donde surgen los siguientes datos:

		Máquinas								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Procesos	***A***	18.76	20.69	19.77	19.85	22.28	20.39	24.31	22.90	19.28
		21.18	23.20	23.94	18.92	20.45	21.80	26.29	25.42	22.04
	B	21.28	16.85	20.75	18.72	18.97	19.52	20.08	21.27	15.67
		19.10	20.16	21.49	16.14	20.31	21.27	19.36	17.82	18.84
	C	21.74	22.68	21.90	20.28	19.89	21.12	23.02	27.48	18.70
		18.99	23.59	18.61	18.71	18.36	18.59	18.85	22.95	23.39

Realice un análisis de varianza para este diseño de 3 × 9 y dos respuestas por cada combinación.

12.8 Se estudian los efectos de la temperatura y la corriente en los filamentos de un tipo de foco.

		Corriente en el filamento (Amps)			
		100	**120**	**140**	**160**
Temperatura	**55º C**	3774	4710	4176	4540
		4364	4180	4140	4530
		4374	4514	4398	3964
	65º C	4216	3828	4122	4484
		4524	4170	4280	4332
		4136	4180	4226	4390

Realice un análisis de varianza para este diseño 2 × 4 y tres réplicas en cada combinación.

12.9 Se lleva a cabo un experimento para conocer los efectos de choque eléctrico (*sh*) y el ruido blanco (*rb*) en la respuesta galvánica en la piel. Participan 40 sujetos en 4 niveles de (*sh*) (0.25, 0.50, 0.75 y 1.00 mA) y 2 niveles de (*rb*) (40 y 80 *dB*), con los siguientes datos:

		sh			
		0.25	**0.50**	**0.75**	**1.00**
rb	**40 *dB***	3, 7.9	5, 11, 13	9, 12, 14	6, 11, 12
		4, 1	8, 3	11, 5	7, 4
	80 *dB*	5, 10, 10	6, 12, 15	11, 18, 15	7, 9, 15
		6, 3	9, 5	13, 9	14, 7

Realice un análisis de varianza para este diseño de 2 × 4 y 5 respuestas por cada combinación.

12.10 Efectúe el análisis de varianza apropiado, establezca las hipótesis correspondientes y haga las conclusiones pertinentes.

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	10	5
		8	4
		10	6
		10	5
	a_2	6	8
		8	6
		7	6
		5	6
	a_3	4	8
		5	7
		5	7
		4	6

12.11 Se lleva a cabo un estudio sobre la repercusión de 4 tipos diferentes de estrategias (descuento, rifa, muestras gratuitas y promoción) para la venta de 3 productos (champú, enjuague bucal y vitaminas). Se escogen al azar 48 tiendas de autoservicio de una cadena nacional y se obtienen los siguientes datos, que miden el porcentaje de cambio en el volumen de ventas (por ejemplo, "–1" significa que las ventas disminuyeron en 10%, o no hubo variación, "2" un aumento del 20%, etcétera).

Realice el análisis de varianza apropiado, para este diseño completamente aleatorizado.

		B		
		Champú	**Enjuague bucal**	**Vitaminas**
A	**Descuento**	–1	2	1
		–1	1	1
		–1	1	3
		0	1	2
	Rifa	0	3	5
		0	5	5
		–1	4	6
		–1	4	4
	Muestras gratis	–1	–1	0
		–2	1	0
		–1	–1	–1
		0	–1	0
	Promoción	–1	2	3
		0	2	2
		0	2	2
		1	1	1

12.12 Hacer el análisis de varianza en dos direcciones con los siguientes datos:

	Factor *A*: Ansiedad inducida		
Factor *B*: Trabajo en forma	Alta	Media	Baja
Masiva	9, 7, 5, 8	5, 7, 6, 6	3, 5, 5, 3
Distribuida	12, 10, 11, 1	8, 8, 7, 6	7, 5, 7, 5

12.13 Se hizo un estudio sobre la forma en que la imagen se relaciona con el procesamiento de información. Se dividieron los sujetos en 3 grupos: imagen visual, imagen al hablar y control. Para todos éstos, la tarea consistía en decir el alfabeto tan rápido como fuera posible, sin omisiones. Antes del experimento, al grupo visual se le pidió que se imaginara las letras antes de decirlas, en tanto que al grupo oral se le pidió que dijera las letras en silencio antes de pronunciarlas en voz alta; el grupo control no tuvo consigna, sólo decir el abecedario.

Suponga que se desea hacer este experimento utilizando un diseño semejante con 4 sujetos en cada grupo y que cada sujeto repita la tarea 5 veces.

	Imagen visual Sujeto				**Imagen oral Sujeto**				**Control Sujeto**			
Ensayo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	25	28	18	20	8	9	6	8	10	9	13	8
2	22	32	18	22	7	11	7	10	9	8	9	10
3	20	26	13	17	10	7	6	8	8	12	9	7
4	22	20	20	14	6	8	6	6	7	11	8	11
5	18	23	14	16	7	9	8	9	8	8	9	7

12.14 Se realizó un experimento para determinar el efecto de 2 variables independientes: A) la consistencia del alimento (líquido o sólido), y B) la influencia de un fármaco (naloxeno o un placebo). La variable dependiente es el número de úlceras estomacales que se les encontró a las ratas, cuando fueron sacrificadas. Se utilizaron 32 animales de laboratorio, ratas de la misma edad y peso, seleccionadas en forma aleatoria para cada una de las 4 condiciones. A continuación, se muestra el número de úlceras para cada una de las 8 ratas en cada condición del experimento.

		A (Alimento)	
		Líquido	**Sólido**
***B* (Fármaco)**	**Placebo**	13, 1, 10	0, 0, 0, 2
		4, 8, 7, 4, 2	6, 8, 8, 1
	Naloxeno	3, 2, 8, 11	0, 0, 0, 1
		12, 1, 1, 6	1, 2, 3, 11

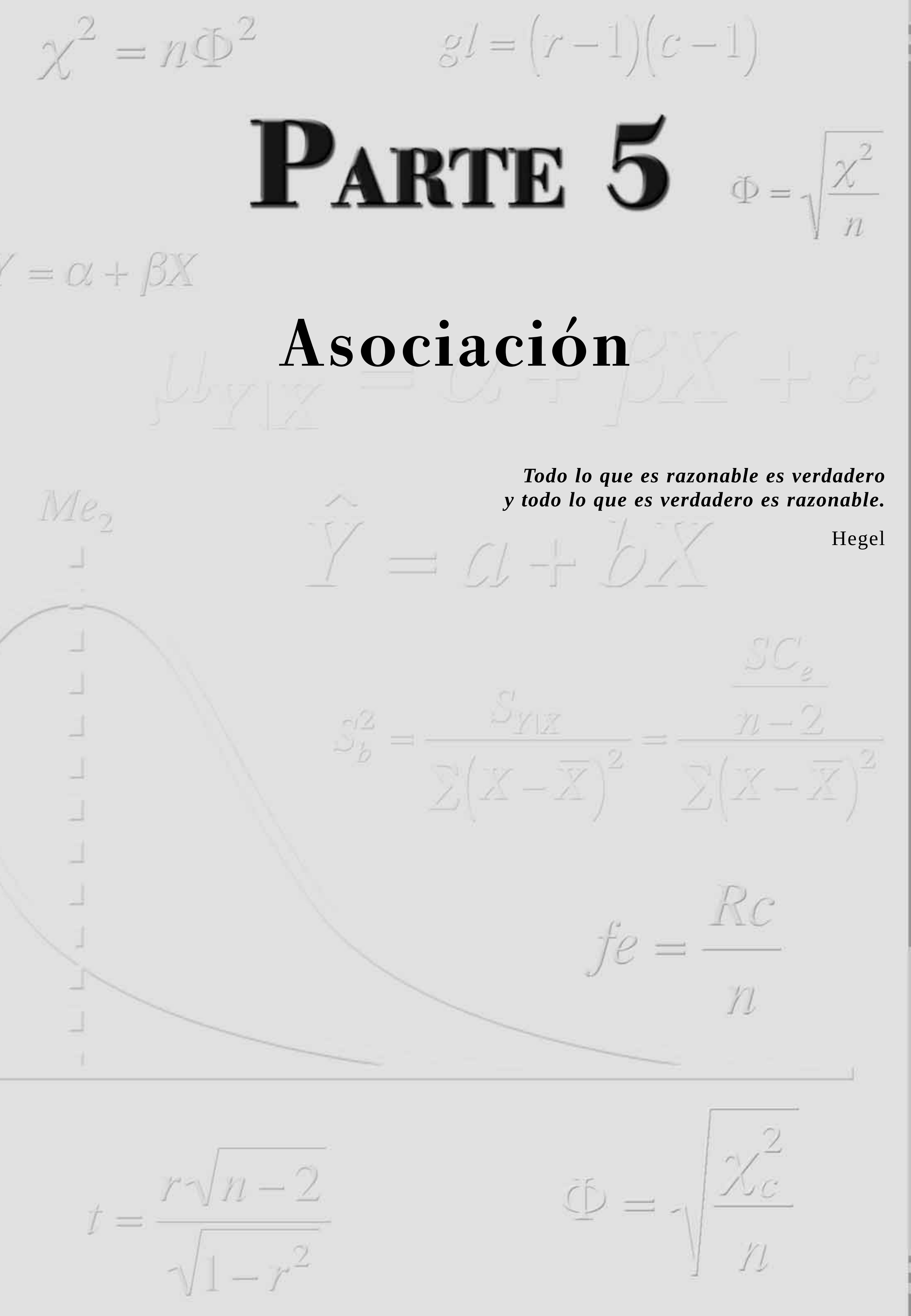
12.15 Suponga que hay dos tipos de maíz A_1 y A_2, tres clases de fertilizante B_1, B_2 y B_3, se desea comprobar si existe diferencia estadísticamente significativa entre dichos tipos de maíz y fertilizantes; también se quiere conocer si existe interacción entre ellos.

		Maíz	
		A_1	**A_2**
Fertilizante	**B_1**	1, 3	2, 1
	B_2	4, 3	5, 6
	B_3	8, 10	9, 8

PARTE 5

Asociación

> ***Todo lo que es razonable es verdadero***
> ***y todo lo que es verdadero es razonable.***
>
> Hegel



Capítulo 13

Análisis de regresión lineal

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector comprenda y aplique adecuadamente el modelo de regresión lineal simple.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Comprender la lógica del modelo de regresión lineal.
- Identificar las características del modelo de regresión lineal, así como su diagrama de dispersión.
- Desarrollar el cálculo de la ecuación de la recta de regresión.
- Evaluar la recta de regresión, planteando las hipótesis correspondientes.
- Construir los intervalos de confianza de los coeficientes dados.
- Obtener el coeficiente de correlación lineal de Pearson.
- Validar dicho coeficiente de correlación, establecer sus hipótesis.
- Construir el intervalo de confianza para el coeficiente de correlación.
- Comparar dos rectas de regresión y sus respectivos coeficientes de correlación, considerando las hipótesis correspondientes.
- Desarrollar la regresión múltiple, con sus respectivos coeficientes de correlación.
- Evaluar la regresión múltiple y sus correlaciones, estableciendo las hipótesis concernientes.
- Utilizar MacStat para obtener la regresión bivariada y la regresión múltiple, con sus respectivos coeficientes de correlación y su validación con el análisis de varianza.

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha considerado sólo la medición referida a la unidad observacional o experimental (el sujeto), es decir, el análisis estadístico de una sola variable. Sin embargo, en ocasiones se requiere una tarea distinta de analizar un solo conjunto de datos (estudio descriptivo de una sola población) o de comparar dos o más conjuntos de datos (estudio comparativo entre dos o más poblaciones). Para estas situaciones existe otro tipo de estudio, el *correlativo,* cuya utilidad radica en encontrar la posible relación entre dos o más variables, así como en medir el grado de asociación o variación mutua entre las mismas. El estudio correlativo es útil, por ejemplo, para conocer si los estudiantes notables en actividades artísticas sobresalen en forma relevante, regular, baja, o no sobresalen, en su formación académica; asimismo, para determinar si la edad y el aprendizaje en animales de laboratorio están relacionadas y siguen algún modelo de regresión.

En este tipo de análisis debe considerarse la posible dependencia y grado de asociación de una variable respecto de otra u otras; en el ejemplo anterior se dice que el aprendizaje (Y) depende de la edad (X) (Y depende de X). *Debe tenerse muy claro que ni la regresión ni la correlación implican causalidad.*

EL MODELO DE REGRESIÓN

Existen dos tipos de modelos, cuyo desarrollo es el mismo, pero que varían en algunos fundamentos teóricos.

Modelo I. Cuando los valores de X están fijos y determinados por el diseño experimental, se consideran medidos sin error. Los valores de Y (variable dependiente) se determinarán por su respectiva X (variable independiente). La distribución probabilística de la población de Y se supone *normal*, y de ahí se seleccionan de manera aleatoria los valores de Y. A este modelo se le conoce como *modelo estándar de regresión*.

Modelo II. Tanto los valores de X como los de Y son aleatorios, por lo que debe trabajarse con muestras aleatorias de una distribución poblacional bivariada. En este modelo debe cumplirse el supuesto de homoscedasticidad (la varianza de Y es la misma para toda X).[†]

Cuando el investigador supone una posible relación entre la variable independiente y la dependiente, establece un modelo específico para obtener la mejor estimación $(\hat{Y})$ de Y. Con este fin, se obtiene la ecuación de regresión, que es el modelo poblacional por estimar a partir de los datos de la muestra. Posteriormente, lo más importante es evaluar dicho modelo y calcular la confianza de que esta estimación describa adecuadamente a Y.

En este apartado se desarrolla el modelo de regresión lineal (es el más sencillo, y uno de los más importantes). Como el problema consiste en el ajuste de los datos a una línea recta, se parte precisamente de la ecuación de la línea recta:

$$Y = \alpha + \beta X$$

donde

α = ordenada al origen.

β = pendiente.

En este modelo matemático es necesario incluir un componente de error ε;[††] lo anterior se debe a que, en su forma actual, el modelo no incorpora un supuesto básico del análisis de regresión: considerar Y como variable aleatoria. Así, el modelo matemático $Y = \alpha + \beta X$ se convierte en el modelo estadístico

---

[†] En este texto se considera el modelo II, por ser el caso más general.

[††] Este componente de error se distribuye normalmente, con media cero y varianza α^2, o sea: ε_i—$N(0, \alpha_2)$; $i = 1, 2, ..., N$.

$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$, donde $\varepsilon = Y - (\alpha + \beta X)$ constituye una variable aleatoria que describe lo distante que está una respuesta individual de la línea de regresión poblacional. El modelo estadístico también se establece de la siguiente manera:

$$\mu_{Y|X} = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

donde:

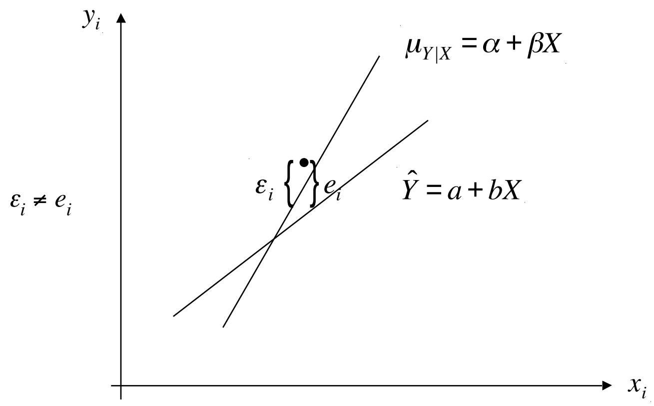
$\varepsilon = Y - (\alpha + \beta X)$, o bien, $\varepsilon = Y - \mu_{Y|X}$

$\mu_{Y|X}$ es la media de la variable aleatoria Y dado un valor fijo de X correspondiente y, por supuesto,

$\sigma^2_{Y|X}$ varianza de la variable aleatoria Y dado X.

El término *regresión lineal* implica que $\mu_{Y|X}$ está linealmente relacionado con X; por medio de la ecuación de regresión lineal poblacional $\mu_{Y|X} = \alpha + \beta X$ se puede estimar $\mu_{Y|X}$ mediante $\hat{Y}$ que es la línea de regresión ajustada $\mu_{Y|X} = \alpha + \beta X$ (a y b son los valores muestrales para estimar $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$).

Cada par de observaciones satisface la relación $\hat{Y} = a + bX + e$, en donde $e = Y - \hat{Y}$; se le denomina *residuo* (o *residual*) y se obtienen para cada Y. Debe destacarse que $e \neq \varepsilon$, lo cual se representa en una gráfica:



X_i, Y_i es cualquier par de observaciones muestrales
ε_i = error de muestreo, y $\bar{\varepsilon} = 0$
e_i = residual = $Y_i - \bar{Y}_i$
(Error de predicción o de medición).

CÁLCULO DE LA RECTA DE REGRESIÓN

Para obtener la recta de regresión se utiliza el modelo:

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

con la estimación muestral,

$$\hat{Y} = a + bX$$

Para calcular *a* y *b* se aplica el siguiente desarrollo en el que se utilizan determinantes:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum XY & \sum X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y \\ \sum X & \sum XY \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{vmatrix}}$$

■ Ejemplo 1

Dados los siguientes datos:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	37	24	28	19	18	15	18	9	10	0

Paso 1. Se ordenan los datos en columnas y se obtienen X^2, Y^2, XY con sus sumas correspondientes: ΣX, ΣY, ΣX^2, ΣXY, ΣY^2, Y, n.

X	Y	X^2	Y^2	XY
1	37	1	1 369	37
2	24	4	576	48
3	28	9	784	84
4	19	16	361	76
5	18	25	324	90
6	15	36	225	90
7	18	49	324	126
8	9	64	81	72
9	10	81	100	90
10	0	100	0	0
$\sum$ 55	178	385	4 144	713
$\sum X$	$\sum Y$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$	$\sum XY$

$n = 10$

Paso 2. Se calculan *a* y *b*.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum XY & \sum X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 178 & 55 \\ 713 & 385 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{vmatrix}} = \frac{68\,530 - 39\,215}{825} = 35.5333$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y \\ \sum X & \sum XY \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 178 \\ 55 & 713 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{vmatrix}}=\frac{7130-9\,790}{825}=-3.22424$$

Paso 3. Se sustituye en el modelo.

$$\hat{Y}=a+bX$$

$$\hat{Y}=35.5333-3.22424\ X \qquad \text{(I)}$$

Paso 4. Se obtiene la gráfica de la ecuación anterior; con este fin, se consideran dos puntos, y uno lo constituye la media de los datos:

$$P_1\left(X_{mín},\ \hat{Y}_{mín}\right)$$

donde

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{178}{10} = 17.8$$

$$P_1 = \left(5.5, 17.8\right)$$

Al sustituir en la ecuación (I) el valor de $X_{mín} = 1$, se tiene:

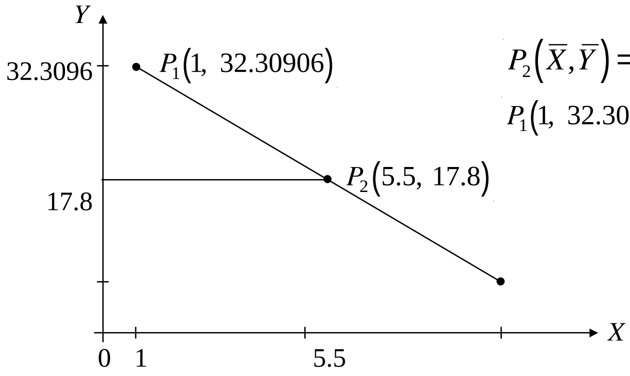
$$Y_{m\square n}=35.5333-3.22424\left(1\right)$$

$$\hat{Y}_{mín}=32.30906$$

$$P = (1,\ 32.30906)$$

$$\text{y}\ \ P_2 = (5.5,\ 17.8)$$

Otro punto puede ser el que forma el valor más pequeño de X, el cual se sustituye en la ecuación de la recta para obtener Y.



$$P_2\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\left(5.5,\ 17.8\right)\quad y$$

$$P_1\left(1,\ 32.30906\right)$$

EVALUACIÓN DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN

Dos métodos son los más adecuados para obtener un nivel de confianza satisfactorio (90, 95, 99%) en la ecuación de regresión poblacional estimada por la recta muestral que se calculó anteriormente. El primero consiste en construir los intervalos de confianza; el segundo, en realizar las pruebas de hipótesis para la regresión. A continuación se analizarán estos procedimientos.

Intervalos de confianza para $\alpha, \beta, \sigma^2_{Y|X}$ y $\mu_{Y|X}$

Para el coeficiente de regresión α es

$$\left(a - t_{gl,\,\frac{\alpha}{2}} S\hat{a} < \alpha < a + t_{gl,\,\frac{\alpha}{2}} Sa\right)$$

Para los niveles de confianza se asocia la t^{d2} tablas correspondiente

Para el coeficiente de regresión β es

$$\left(b - t_{gl,\,\frac{\alpha}{2}} S\hat{b} < \beta < b + t_{gl_1\,\frac{\alpha}{2}} Sb\right)$$

Para la media se tiene lo siguiente.

$$\left(\bar{Y} - t_{gl,\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{Y}|X} < \mu_{\bar{Y}|X} < \bar{Y} + t_{gl,\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{Y}|X}\right)$$

donde $gl = n - 2$

Para la varianza

$$\frac{(n-2)\,S^2_{\bar{Y}|X}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2_{\bar{Y}|X} < \frac{(n-2)\,S^2_{\bar{Y}|X}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

En los intervalos anteriores se considera la varianza de los errores muestrales de la estimación $S^2_{\hat{Y}|X}$ o el error estándar de la estimada $S_{\hat{Y}|X}$

En algunos casos, para calcular la varianza de la media, que es $S^2_{\bar{Y}|X}$ o la desviación estándar de la media $S_{\bar{Y}|X}$, es necesario obtener $S^2_{\hat{Y}/X}$ *o* $SC_{\hat{e}}$ sustituyéndolo en la fórmula de $S^2_{\bar{Y}|X}$

$$S^2_{\hat{Y}/X} = \frac{S^2_{\hat{Y}/X}}{n} = \frac{\frac{SC_{\hat{e}}}{n-2}}{n}$$

$SC_{\hat{e}}$ = suma de cuadrados del error que se considerará en la tabla del análisis de varianza.

Donde $SC_{\hat{e}} = \sum e_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$, también conocida como *suma de cuadrados de las desviaciones,* o sea, $e_i = Y_i - (a + b\,X_i)$, e_i = error en la predicción.

Para calcular $S^2_{\hat{Y}|X}$, son necesarias las varianzas muestrales de X y Y. Una forma de obtenerlas es la siguiente:

$$S_X^2 = \frac{\sum X^2 - \dfrac{\left(\sum X\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum Y^2 - \dfrac{\left(\sum Y\right)^2}{n}}{n-1}$$

Se sustituyen en la siguiente expresión para obtener $S_{\hat{Y}|X}$:

$$S^2_{\hat{Y}|X} = \frac{n-1}{n-2}\left(S_Y^2 - b^2\,S_X^2\right)$$

La anterior constituye la varianza de $\hat{Y}$, que es la suma de los cuadrados de las desviaciones divididas entre los grados de libertad (*gl*).

S_b se llama *error estándar* de *b*, donde *b* es una estimación de β, por lo que:

$$S_b^2 = \frac{S^2_{\hat{Y}/X}}{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2} = \frac{\dfrac{SC_{\hat{e}}}{n-2}}{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2}$$

$$S_b = \frac{S^2_{\hat{Y}|X}}{S_X\sqrt{n-1}}$$

Al retomar el ejemplo anterior se calcularán los intervalos de confianza de $\alpha, \beta, \sigma^2_{Y|X}$ y $\mu_{Y|X}$

$$S_X^2 = \frac{\sum X^2 - \dfrac{\left(\sum X\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{385 - \dfrac{3025}{10}}{9} = \frac{82.5}{9} = 9.16667$$

$$\boxed{S_x = 3.02765}$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum Y^2 - \dfrac{\left(\sum Y\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{4144 - \dfrac{31684}{10}}{9} = \frac{975.60}{9} = 108.40$$

$$\boxed{S_Y = 10.41153}$$

Se sustituye en la siguiente expresión:

$$S^2_{\hat{Y}|X} = \frac{n-1}{n-2} = \left(S^2_Y - b^2\ S^2_X\right) = \frac{9}{8}\left(108.40 - 10.3957 \times 9.16667\right)$$

$$= \frac{9}{8}\left(108.40 - 95.29417\right) = 14.74406$$

$$\boxed{S_{\hat{Y}|X} = 3.83980}$$

Con estos resultados se calcula la varianza y el error estándar de la media.

$$S^2_{\overline{Y}|X} = \frac{S^2_{\hat{Y}|X}}{n} = \frac{14.74406}{10} = 1.474406$$

$$\boxed{S_{\overline{Y}|X} = 1.21425}$$

Se sustituyen los valores anteriores y se obtiene

$$S_a = \frac{S_{\hat{Y}/X}\sqrt{\sum X^2}}{S_X\ \sqrt{n\left(n-1\right)}} = \frac{3.83980\ \sqrt{385}}{3.02765\ \sqrt{90}} = \frac{75.3423}{28.7281}$$

$$\boxed{S_a = 2.62308}$$

Para un intervalo de confianza de 95%

$\alpha = 5\%,\ t_{8,0.025} = 2.306$

como $a = 35.5333$, al sustituir en el intervalo resulta

$(35.5333 - 2.306 \times 2.62308 < \alpha < 35.5333 + 2.306 \times 2.62308)$

$$\boxed{29.5 < \alpha < 41.6}$$

Para el intervalo de confianza de β se necesita calcular:

$$S_b = \frac{S_{\hat{Y}|X}}{S_X\ \sqrt{n-1}}$$

De la sustitución de valores se obtiene

$$\boxed{S_b = 0.42275}$$

Se realizan las sustituciones procedentes:
$(-3.22424 - 2.306 \times 0.42275 < \beta < -3.22424 + 2.306 \times 0.42275)$

$$\boxed{-4.2 < \beta < -2.25}$$

Para construir el intervalo de $\mu_{Y/X}$ también al 95%, se sustituyen los valores en la siguiente expresión:

$$\overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},gl}\ S_{\overline{Y}|X} < \mu_{Y|X} < \overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2},gl}\ S_{\overline{Y}|X}$$

$$(17.8 - 2.306 \times 1.21425 < \mu_{Y|X} < 17.8 + 2.306 \times 1.21425)$$

$$\boxed{(15.0 < \mu_{Y|X} < 20.6)}$$

Finalmente, para calcular la varianza estimada de la media, se necesita la varianza de la media, que es:

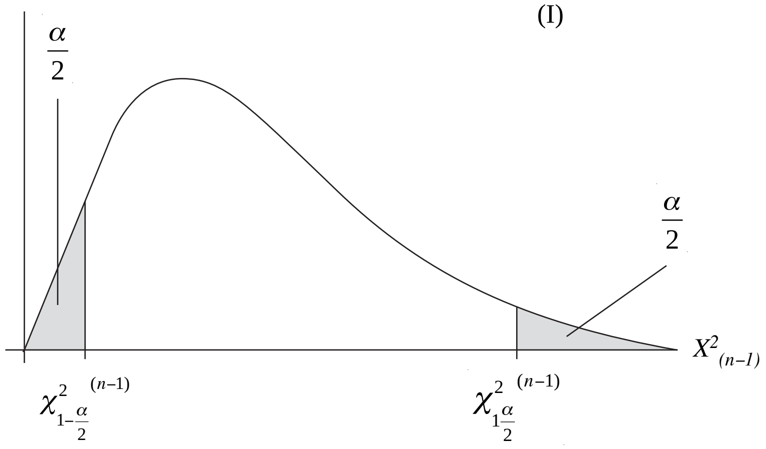
$$\boxed{S^2_{\overline{Y}|X} = 1.474406}$$

y el valor de $\chi^2_{gl,\frac{\alpha}{2}}$

donde $gl = n - 2$; se consulta la tabla en el apéndice

$$\chi^2_{8,0.025} = 17.53,\ \chi^2_{8,0.975} = 2.18$$

Recuerde que la distribución χ^2 no es simétrica; por tanto, los valores de χ^2 son diferentes.



Posteriormente, se sustituyen los valores, de lo cual resulta:

$$\frac{(n-2)\,S^2_{\overline{Y}|X}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},gl}} < \sigma^2_{\overline{Y}|X} < \frac{(n-2)\,S^2_{\overline{Y}|X}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},gl}}$$

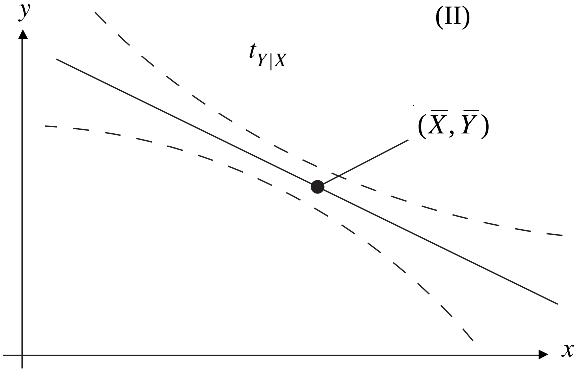
$$\frac{8(1.474406)}{17.53} < \sigma^2_{\overline{Y}|X} < \frac{8(1.474406)}{2.18}$$

$$\frac{11.79525}{17.53} < \sigma^2_{\overline{Y}|X} < \frac{11.79525}{2.18}$$

$$0.67286 < \sigma^2_{\overline{Y}|X} < 5.41066$$

$$\left(0.67 < \sigma^2_{\overline{Y}|X} < 5.41\right)$$

Una representación gráfica de los intervalos de confianza anteriores es como el de la media $\mu_{Y|X}$.



Pruebas de hipótesis para la regresión

El otro método para evaluar la ecuación de regresión es el que se realiza mediante el contraste de las hipótesis de los coeficientes de regresión α, β. En este libro se realizará la prueba correspondiente al coeficiente β, para lo cual se establece:

$H_0 : \beta = 0$
$H_1 : \beta \neq 0$ (H_0 falsa)

con un nivel de significancia α determinado.

Con este propósito se emplea el modelo de t de Student:

$$t = \frac{b}{S_b}$$

Se utilizan b y S_b del ejemplo anterior.

$$t_c = \frac{-3.22424}{0.42275}$$

$$\boxed{t_c = -7.62682}$$

$$|t_c| = 7.62682$$

Como la prueba de hipótesis es de dos colas, se utiliza el valor absoluto de la t calculada.

La regla de decisión es: si $t_c \geq t_{gl,\frac{\alpha}{2}}$, entonces H_0 se rechaza para un $\alpha = 5\%$ $t_{8,\,0.025} = 2.306$, debido a que $gl = n - 2 = 10 - 2 = 8$ y que $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

Como 7.62682 > 2.306, entonces H_0 se rechaza.[†]
Para un = 1%, $t_{8,0.005} = 3.555$.
Como 7.62682 > 3.555, entonces H_0 se rechaza al 1%.
Otra manera de contrastar estas hipótesis es mediante el análisis de varianza; para ello se necesitan:

$$SC\hat{e} = (n-2)\; S^2_{\hat{Y}X},\; SC_{reg} = (n-1)\; b^2\; S^2_X$$

$$SC_{tot} = \; (n-1)\; S^2_Y$$

donde

$$SC_{tot} \;=\; SCe + SC_{reg}$$

$$CM_{error} = CMe = \frac{SC_e}{gl_{error}}$$

donde

$gl_{error} = n - 2$

$gl_{reg} = 1$

$gl_{total} = n - 1$

$$CM_{reg} \;=\; \frac{SC_{reg}}{gl_{reg}}$$

Finalmente, $F \;=\; \dfrac{CM_{reg}}{CM_e}$

Para el ejemplo anterior resulta:

$SC_{reg} = 9\,(-3.2243)^2 \times (9.16667)$

$$\boxed{SC_{reg} = 857.67943}$$

$SC_e = 8 \times 14.74406$

$SC_e = 117.95248$

$SC_{tot} = 9 \times 108.40$

$$\boxed{SC_{tot} = 975.6000}$$

[†] Lo que significa que *X*, la variable independiente, contribuye a predecir a la variable dependiente *Y*.

Como $SC_{tot} = SC_e + SC_{reg}$

975.6000 = 117.95248 + 857.67943

El proceso para calcular los cuadrados medios es el siguiente:

$$CM_{error} = \frac{SC_e}{gl_{error}} = \frac{117.95248}{8}; \text{ donde } CM_e = CM_{error}$$

$$\boxed{CM_{error} = 14.74406}$$

$$CM_{reg} = \frac{SC_{reg}}{gl_{reg}} = 857.67943$$

$$\boxed{CM_{reg} = 857.67943}$$

$$F = \frac{CM_{reg}}{CM_e} = \frac{857.67943}{14.74406}$$

$$\boxed{F = 58.17118}$$

$F = t^2 \Rightarrow t = 7.627,\ \ t^2 = 58.17113$

Análisis de varianza

FV	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Regresión	1	$(n-1)\, b^2\, S_X^2$	$\frac{(n-1)\, b^2\, S_X^2}{1}$	CM_{reg}
Error	n – 2	$(n-2)\, S_{\hat{Y}\|X}$	$\frac{(n-2)\, S_{\hat{Y}\|X}}{n-2}$	CM_{error}
Total	n – 1	$(n-1)\, S_Y^2$		

Se sustituyen los valores calculados:

FV	***gl***	***SC***	***CM***	***F***
Regresión	1	857.67943	857.67943	
Error	8	117.95248	14.74406	58.17118†
Total	9	975.6000		

† Significativa al 1%. (*X* contribuye a predecir *Y*.)

ANÁLISIS DE CORRELACIÓN

El coeficiente de correlación es un parámetro que indica el grado de relación simultáneo entre dos variables, aunque no existe distinción entre la variable independiente y la dependiente. La correlación mide la asociación, que no significa causalidad; en esto consiste la diferencia del análisis de correlación respecto de la regresión, donde si una variable depende de otra en una muestra de sujetos promedio, puede generalizarse este resultado. Para profundizar en el tema, debe distinguirse entre dos tipos de estudios: los *observacionales* y los *experimentales controlados*; en estos últimos, el investigador manipula la variable independiente y observa el efecto en la dependiente. Si se producen cambios, el investigador gradúa el rango, etapas y valores de la variable independiente. La asociación que resulta con la variable dependiente señala una relación.

En cambio, en un estudio observacional el investigador se limita a registrar los valores de las variables, debido a que considera a ambas independientes. Así, con respecto a un conjunto de sujetos (sin manipular los valores de alguna variable), la asociación entre ambas variables no implica causalidad; por lo general, en los estudios observacionales la asociación está en función de terceros factores. En suma, resulta muy importante clasificar los estudios de modo apropiado y tener precaución al inferir las conclusiones.

Un auxiliar para determinar la relevancia del coeficiente de regresión lo constituye el coeficiente de determinación; es decir, el cuadrado del coeficiente de correlación (r^2), que mide la proporción de la variación total en Y, considerada por la regresión de Y en X.

Hay dos métodos para calcular el coeficiente de correlación de Pearson. En el primero, se utilizan los resultados del análisis de varianza y se emplea la siguiente fórmula:

$$r_{XY} = \sqrt{\frac{SC_{reg}}{SC_{tot}}}$$

El segundo método conduce a la fórmula producto-momento por medio de determinantes.

Si se continúa con el ejemplo anterior, donde $SC_{reg} = 857.67943$ y $SC_{tot} = 975.600$

$$r_{XY} = \sqrt{\frac{857.67943}{975.600}} = \sqrt{0.87913} = 0.93762$$

$$\boxed{r_{XY} = 0.93762} \quad \text{y} \quad \boxed{r^2 = 0.87913}$$

Este método resulta muy sencillo de aplicar, pero no es sensible al signo de la correlación. Dicho signo puede deducirse con base en la gráfica de la recta de regresión, al considerar el signo de la pendiente de la recta.

Como el coeficiente $b = -3.2242$, entonces $\boxed{r_{xy} = -0.93762}$

El otro método por determinantes:

$$r_{XY} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y \\ \sum X & \sum XY \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & \sum Y \\ \sum Y & \sum Y^2 \end{vmatrix}}} = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left[n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right]\left[n\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right]}}$$

$$r_{XY} = \frac{10\,(713) - (55)\,(178)}{\sqrt{\left[10 \times 385 - (55)^2\right]\left[10 \times 4144 - (178)^2\right]}} = -0.93762$$

$$\boxed{r_{XY} = -0.93762}$$

Intervalo de confianza para el coeficiente de correlación

Para establecer la *confianza* del coeficiente de correlación muestral, se tiene que señalar primero el intervalo de confianza para Z correspondiente a r. A fin de determinar lo anterior, es necesario calcular el error estándar de Z:

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

A continuación se especifica el nivel de confianza de Z: 5, 1%, etc. El coeficiente de correlación r se transforma en Z por medio de la tabla 5 del apéndice. Una vez obtenido el intervalo de confianza para Z, se transforma nuevamente a r, por medio de la misma tabla; esto es debido a que r_{XY} no se distribuye en forma normal.

■ Ejemplo 2

En una muestra de 103 sujetos se aplica un examen de conocimientos generales (X) y uno sobre coeficiente de inteligencia (Y). Al correlacionar las puntuaciones obtenidas, se encuentra que $r = 0.82$. Establecer el intervalo de confianza al 1%.

Paso 1. Se calcula el error S_Z con $n = 103$.

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{103-3}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1$$

$$\therefore S_z = 0.1$$

Paso 2. Mediante la tabla del apéndice se transforma $r = 0.82$ en Z.

$$Z = 1.157$$

Paso 3. Por medio de la tabla de “área bajo la curva normal” se obtiene el nivel de significancia para $\alpha = 1\%$ de error y 99% de confianza.

$$Z_{0.01} = 2.58$$

Paso 4. Se sustituyen estos valores en la siguiente fórmula de intervalos de Z:

$$Z = Z \pm Z_{0.01}\,(S_Z)$$

de manera que

$$Z_{0.99} = 1.157 \pm 2.58\,(0.1)$$

$$Z_{0.99} = 1.157 + 0.258\ (0.1) = 1.415$$

$$Z_{0.99} = 1.157 - 0.258\ (0.1) = 0.899$$

Paso 5. Este intervalo calculado para Z se transforma por medio de la tabla del apéndice en valores r, y resulta $r_{0.99} = (0.715, 0.890)$.

Valor promedio del coeficiente de correlación

Algunas veces es necesario obtener la media aritmética de diversos coeficientes de correlación adjudicados a las mismas variables, medidas varias veces en la misma muestra, o en muestras diferentes, pero procedentes de la misma población. Cuando la r es pequeña (0.30), no es conveniente considerar el promedio aritmético; cuando la r calculada es grande, se aplica un procedimiento para todas las muestras.

En relación con muestras del mismo tamaño, se transforma cada r a su valor Z. Posteriormente, se utiliza la tabla del apéndice para calcular la media aritmética de las Z y, por último, la Z promedio se restituye a r.

■ Ejemplo 3

Los siguientes datos corresponden a cuatro coeficientes de correlación de cuatro muestras del mismo tamaño:

$$\begin{array}{ll} r_1 = 0.90 & \\ r_2 = 0.87 & \\ r_3 = 0.77 & \qquad n = 4 \\ r_4 = 0.55 & \end{array}$$

Paso 1. Se cambian estos valores a su correspondiente $Z^{\dagger}$ y luego se suman:

$$\begin{array}{l} Z_1 = 1.472 \\ Z_2 = 1.333 \\ Z_3 = 1.020 \\ Z_4 = \underline{0.618} \\ \qquad 4.443 \end{array}$$

$$\boxed{\Sigma Z = 4.443}$$

Paso 2. Se calcula la media de Z:

$$\bar{Z} = \frac{\sum Z}{n} = \frac{4.443}{4} = 1.110$$

Paso 3. El valor de la Z promedio $(\bar{Z})$ se localiza en la tabla del apéndice y se cambia a su correspondiente r.

$$\boxed{r = 0.80}$$

[†] Consultando la tabla del apéndice o utilizando la transformación $Z = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$

Por otra parte, cuando las *r* se extraen de muestras de diferente tamaño, el procedimiento es el mismo, excepto para calcular la *Z*. Ésta se obtiene al multiplicar cada *Z* por (n – 3), donde *n* es el tamaño de la muestra respectiva. Como segundo paso, los productos se suman y el total se divide entre (n_1 – 3) + (n_2 – 3) + (n_3 – 3) + ... + (número total de muestras que intervienen). A continuación, se prosigue como en el caso anteriormente presentado.

Como el coeficiente de correlación lineal obtiene valores entre –1 y +1, éstos pueden ubicarse en intervalos.

De ±0.96 a ±1.0 (correlación perfecta).

De ±0.85 a ±0.95 (correlación fuerte).

De ±0.70 a ±0.84 (correlación significativa).

De ±0.50 a ±0.69 (correlación moderada).

De ±0.20 a ±0.49 (correlación débil).

De ±0.10 a ±0.19 (correlación muy débil).

De ±0.09 a ±0.00 (correlación nula o inexistente).

Prueba de hipótesis para el coeficiente de correlación

Después de obtener *r* y de encontrar significativa la asociación entre las dos variables de interés, surgen preguntas muy importantes: ¿la correlación entre ambas variables también se presentará en la población?; o sea, ¿el grado de asociación será el mismo en la muestra que en la población? A fin de responder estas preguntas con una orientación estadística apropiada, deben formularse las *hipótesis nula* y *alternativa*:

- Hipótesis nula (H_0): No existe correlación alguna en la población.
- Hipótesis alternativa (H_1): Sí hay correlación en la población.

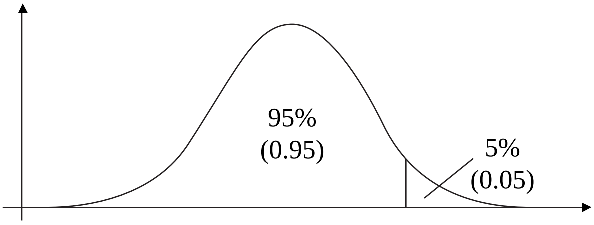
De acuerdo con la notación de estadística se tiene:

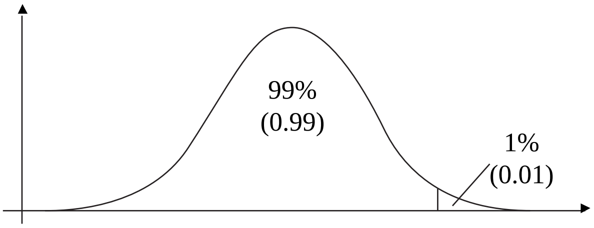
$$\text{Para } H_0 : \rho = 0$$

$$\text{Para } H_1 : \rho \neq 0$$

Al tratar de comprobar (para su aceptación o rechazo) la hipótesis nula, el investigador tiene la opción de escoger un error (a veces se establece de antemano la magnitud del error según las condiciones del problema). Esto significa que, si la hipótesis nula o alternativa se acepta o rechaza, existe un porcentaje de error que asegura lo contrario.

Los errores más comunes, que también suelen llamarse *niveles de significancia*, se denotan por α. Son de 5 y 1%, o bien, de 0.05 y 0.01, respectivamente. Es posible presentar gráficamente estos valores de la siguiente manera:





Para aceptar o rechazar la hipótesis nula se emplea la razón *t* (*de Student*) definida como sigue:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

donde:

n = número de pares de valores de las variables X y Y.
r = coeficiente de correlación lineal obtenido.

Una vez evaluada t, se compara con la $t_{\frac{\alpha}{2}, gl}$ que se obtiene en la tabla de valores de t, con grados de libertad $n - 2$, y $\frac{\alpha}{2}$ nivel de significancia establecido de antemano. La t calculada debe ser mayor, o, al menos, igual que la t crítica, para poder rechazar la hipótesis nula (H_0). Esto se expresa de manera matemática con la siguiente regla de decisión: Si $t \geq t_{crít}$, entonces H_0 se rechaza.

■ Ejemplo 4

Para el problema de la sección 13.2, se realizará la prueba de hipótesis que corresponde al coeficiente de correlación

$$r = -0.9376$$

$$n = 10$$

Se aplicará el modelo siguiente:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

donde $r^2 = 0.8791$ (coeficiente de determinación).

Se realizan las sustituciones respectivas.

$$t_c = \frac{-0.9376\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0.8791}}$$

$$t_c = \frac{-0.9376\sqrt{8}}{\sqrt{0.12090}}$$

$$t_c = \frac{-2.65193}{0.34771}$$

$$\boxed{t_c = -7.62685}$$

$$\boxed{/\, t_c \,/ = -7.62685}$$

$t_{0.025,\,8} = 2.306$ como $7.62685 > 2.306$, y

$7.62685 > 3.355$

$t_{0.005,\,8} = 3.355$

Puede concluirse que H_0 se rechaza al 5 y 1%, respectivamente.

Este resultado es congruente con la prueba de hipótesis al coeficiente de regresión $\beta\left(t = \sqrt{F}\right)$.

La prueba H_0: $\sigma = 0$ es equivalente a H_0: $\beta = 0$ $(-7.62685)^2 = 58.1688$ casi la F para H_0: $\beta = 0$.

COVARIANZA

La covarianza es una medida que se utiliza para describir la forma en que dos variables aleatorias, X y Y, varían juntas; medida de asociación entre dichas variables que se da cuando existe una relación lineal entre ellas.

La covarianza se define con la misma expresión, tanto para variables aleatorias discretas como continuas.

$$E\,(X\,Y) - \mu_x\,\mu_y$$

donde μ_x y μ_y son los valores esperados de X y Y respectivamente, cumpliendo los siguientes supuestos:

1) Si las variables aleatorias X y Y son independientes (cuando la relación entre ellas es no lineal), la covarianza es cero.
2) Si X y Y tienden a ser grandes o pequeñas, pero en forma conjunta ("joint"), la covarianza es positiva.
3) Si X tiende a ser grande cuando Y es pequeña, o en forma viceversa, la covarianza es negativa.

Como la covarianza es un "momento producto" o "momento mezclado" que describe la variación de un par de variables aleatorias X, Y, la ecuación 1 puede tomar la forma:

$$\text{Cov}\,(X,\ Y)\ =\ E\left[(X-\mu_x)\,(Y-\mu_y)\right]$$

La medida que refleja la fuerza y dirección de la relación lineal entre ambas variables, es el coeficiente de correlación, que en términos de la covarianza, y para la población es:

$$\rho\ =\ \frac{\text{Cov}\,(X,\ Y)}{\sigma_x\ \sigma_y}$$

donde: δ_x y δ_y son las desviaciones estándar de μ_x y μ_y respectivamente y provienen de las varianzas

$$\sigma_x^2 = E\,(X) \text{ y } \sigma_y^2 = E\,(Y)\text{, para el caso muestral }\ r_{xy}\ =\ \frac{s_{xy}}{s_x\ s_y}$$

donde s_{xy} (la covarianza) está definida como:

$$s_{xy}\ =\ \frac{1}{n}\sum\,(x_i-\bar{x})\,(y_i-\bar{y})\ \text{ o también}$$

$$s_{xy} = s_x\,s_y\,r_{xy}$$

En la función de mínimos cuadrados de una regresión lineal $\hat{\alpha}+\hat{\beta}_x$, despejando $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se tiene:

$$\beta = p\frac{\sigma_y}{\sigma_x}^{\dagger} \qquad\qquad \hat{\beta}\ =\ \frac{s_{xy}}{s_x^2}\ =\ r_{xy}\ \frac{s_y}{s_x}$$

$$\hat{\alpha}\ =\ \bar{y}\ -\ \hat{\beta}_{\bar{x}}$$

El cuadrado medio del error:

$$\hat{\sigma}^2\ =\ s_y^2\ (1-r_{xy}^2)$$

---

† Entonces $H_0 : \beta = 0$ es equivalente a $\sigma = 0$.

■ Ejemplo 5

Un especialista en vías respiratorias está interesado en la relación entre X (número de cigarrillos que un paciente fuma diariamente) y Y (la ocurrencia de cáncer pulmonar). X, Y son variables aleatorias que toman valores de x y y respectivamente, con probabilidad $P(X = x)$, $P(Y = y)$. Se considera que $X = 1$ si el paciente es fumador y $X = 0$ si no lo es; $Y = 1$ si presenta cáncer pulmonar y $Y = 0$ cuando no lo tiene.

Suponga que la probabilidad de que sea fumador y presente cáncer es 0.50, esto es: $P(X = 1, Y = 1) = 0.50$; la probabilidad de no ser fumador y no tener cáncer es 0.35 $P(X = 0, Y = 0) = 0.35$; que sea fumador y no presentar cáncer es 0.10 $P(X = 1, Y = 0) = 0.10$ y no fumador pero tenga cáncer $P(X = 0, Y = 1) = 0.05$. Esto se puede mostrar en la siguiente tabla de contingencias:

		Y		
		0	1	
X	0	0.35	0.05	0.40
	1	0.10	0.50	0.60
		0.45	0.55	

Donde 0.35, 0.05, 0.10 y 0.50 son conocidas como probabilidades conjuntas y 0.40, 0.60, 0.45 y 0.55 son probabilidades marginales.

Las probabilidades condicionales se obtienen de la siguiente manera:

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(X=1,\ Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.50}{0.55} = 0.91$$

$$P(X=0 \mid Y=0) = \frac{P(X=0,\ Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.35}{0.45} = 0.78$$

$$P(X=0 \mid Y=1) = \frac{P(X=0,\ Y=1)}{P(Y=0)} = \frac{0.05}{0.55} = 0.09$$

$$P(X=1 \mid Y=0) = \frac{P(X=1,\ Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.10}{0.45} = 0.22$$

Y como la covarianza refleja la dirección de la relación, se tiene:

$$E\,(XY) = 0\ (0)\ (0.35) + 0\ (1)\ (0.05) + 1\ (0)\ (0.10) + 1\ (1)\ (0.50) = 0.50$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0.50$$

$$\boxed{E\,(X\ Y) = 0.50}$$

Utilizando las probabilidades marginales obtenidas en la tabla anterior, se tiene:

$$E\,(X) = 0.60$$

$$E\,(Y) = 0.55$$

Sustituyendo estos valores en la definición de la covarianza (2).

$$\text{Cov}\,(X\ Y) = E\,(X\ Y) - E\,(X)\ E\,(Y)$$

$$\text{Cov}\,(X\ Y) = 0.50 - (0.60)\ (0.55) = 0.50 - 0.33 = 0.17$$

Entonces, el valor de la covarianza es

$$\boxed{\text{Cov}\,(X\ Y) = 0.17}$$

y como las varianzas σ_x^2 y σ_y^2 se definen como el producto de las probabilidades marginales de X y Y, entonces $\sigma_x^2 = E\,(X) = E\,[\ (X = 0,\ X = 1)\ ] = 0.40 \times 0.60 = 0.24$

$$\sigma_y^2 = E\,(Y) = E\,[\ (Y = 0,\ Y = 1)\ ] = 0.45 \times 0.55 = 0.2475$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0.24} = 0.49$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{0.2475} = 0.50$$

Sustituyendo ambos resultados en (3)

$$\rho = \frac{0.17}{(0.49)\ (0.50)} = \frac{0.17}{0.24} = 0.71$$

El coeficiente de correlación es

$$\boxed{\rho = 0.71}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS ENTRE DOS RECTAS DE REGRESIÓN

Algunas veces se requiere conocer si existe una diferencia estadísticamente significativa entre dos rectas de regresión (lo que implica efectuar un contraste entre las dos pendientes o los coeficientes de estas rectas).

■ Ejemplo 6

A dos grupos de ratas de laboratorio se les proporcionan dietas diferentes durante 10 semanas. Se desea saber si el peso inicial causa una respuesta lineal diferente en el peso ganado. El primer grupo lo constituyen ocho animales; el segundo 10.

Se calculan los coeficientes de regresión b_1 y b_2, a partir de los siguientes datos y se obtiene b_1 = 1.64826 y b_2 = 1.11272

Grupo 1		**Grupo 2**	
X_1	Y_1	X_2	Y_2
63	153	72	143
74	156	51	105
62	114	81	140
69	123	70	115
55	128	55	102
58	108	74	124
48	108	61	117
54	107	67	104
		54	111
		62	121

Paso 1. Establecer las hipótesis.

$H_0 : \beta_1 = \beta_2$

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$

con un $\alpha = 5\%$

Paso 2. Se aplica el siguiente modelo.

$$t = \frac{b_1 - b_2}{S_{b_1 - b_2}}$$

donde

$$S_{b_1 - b_2} = \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{8} (X_i - \overline{X}_1)^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X}_2)^2} \right)}$$

y S_p^2 se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (Y_i - \overline{Y}_1)^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{8} (X_i - \overline{X}_1)(Y_i - \overline{Y}_1) \right]^2}{\sum_{i=1}^{8} (X_i - \overline{X}_1)^2} + \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \overline{Y}_2)^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y}_2) \right]^2}{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X}_2)^2}}{(n_1 - 2) + (n_2 - 2)}$$

Paso 3. Se efectúan las sustituciones de valores.

$$S_p^2 = \frac{3\,020.875 - \frac{(820.625)^2}{497.875} + 1833.600 - \frac{(952.600)^2}{856.100}}{(8-2) + (10-2)}$$

$$S_p^2 = \frac{1\,668.2757 + 773.6225}{6+8}$$

$$\boxed{S_p^2 = 174.4213}$$

$$S_{b_1 - b_2} = \sqrt{174.4213 \left(\frac{1}{497.875} + \frac{1}{856.100} \right)}$$

$$S_{b_1 - b_2} = \sqrt{174.4213 \times 0.00317662}$$

$$S_{b_1-b_2} = \sqrt{0.554070}$$

$$\boxed{S_{b_1-b_2} = 0.7444}$$

Paso 4. Al sustituir en t se obtiene:

$$t = \frac{b_1 - b_2}{S_{b_1-b_2}} = \frac{1.64826 - 1.11272}{0.7444}$$

$$t = \frac{0.5356}{0.7444}$$

$$\boxed{t_c = 0.72}$$

Paso 5. Regla de decisión, para $\alpha = 5\%$.

Si la t calculada es mayor o igual a t tablas, H_0 se rechaza.

$$t_{\frac{\alpha}{2}, gl} \text{ es } t_{14,\, 0.025} = 2.145$$

Paso 6.

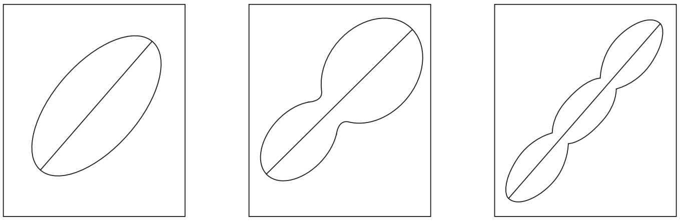
Conclusión

Como 0.72 < 2.145, H_0 no se rechaza. Las pendientes de las rectas de regresión de los dos grupos son iguales; por consiguiente, el *peso inicial causa las mismas respuestas lineales*.

Comparación entre dos coeficientes de correlación

Para emplear correctamente el coeficiente de correlación lineal en una muestra, como medida de asociación entre las variables X y Y, deben tomarse en cuenta los siguientes aspectos:

1. Es absolutamente necesario que exista una relación lineal entre las variables X y Y. Dicha relación se confirma si, al trazar un diagrama de dispersión, todos los puntos se agrupan en torno a la recta obtenida, y une los puntos 0, 0 y $\overline{X}$, $\overline{Y}$.
2. Todos los datos deben ser *homoscedásticos*. Esto significa que la varianza de una variable estadística es la misma para todos los valores fijos de la otra variable estadística; o sea, que debe existir la misma dispersión de los puntos respecto de la línea de regresión.
   Lo anterior se representa en los siguientes diagramas, donde sólo en el caso a) existe homoscedasticidad.



a) b) c)

3. Puntuaciones intervalares. Las variables *X* y *Y* deben ser intervalares (es decir, deben medir exactamente la distancia entre las puntuaciones que las representan, así como el orden en el cual se encuentran). Estas puntuaciones pueden representarse con números reales.
4. La muestra debe obtenerse en forma aleatoria. Todos los elementos de la población tendrán la misma probabilidad de ser escogidos para constituirla.
5. La prueba de validez del coeficiente de correlación de Pearson requiere que tanto la variable *X* como la *Y* estén distribuidas normalmente en la población. En muestras pequeñas que no cumplan este requisito, carecerá de validez el coeficiente *r* obtenido. Sin embargo, este aspecto no tendrá importancia cuando la muestra sea lo suficientemente grande.

En caso de utilizar el coeficiente de correlación como una medida de asociación, hay que suprimir la posibilidad de que una variable "emboscada" afecte a las variables en estudio, ya que esta tercera variable causal desconocida originaría una correlación ficticia. Algunas veces corresponde más al sentido común que a la explicación estadística determinar si una correlación significante tiene interpretación práctica, o si es una correlación espuria.

Es necesario realizar el análisis de regresión correspondiente a los dos grupos del problema anterior. Las ecuaciones de sus rectas de regresión son las siguientes:

$$Y_1 = 26.71452 + 1.6483\,X$$

$$Y_2 = 47.053 + 1.1127\,X$$

Los coeficientes de correlación para dichos grupos son:

$$r_1 = 0.6691 \quad r_2 = 0.7603$$

Una vez obtenidos, se efectuará la prueba de significancia de la diferencia entre tales coeficientes de correlación. Así, se comprobará la hipótesis nula que plantea la no existencia de diferencias estadísticamente significativas entre estos dos coeficientes; en otras palabras, ambos valores de *r* se basan en muestras provenientes de la misma población. Para aceptar o rechazar tal afirmación, cada coeficiente *r* se transformará en una puntuación *Z*, y se aplicará la prueba de significancia a dichas puntuaciones (es decir, la prueba Fisher de las *Z*). La fórmula respectiva es la siguiente:

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1 - 3} + \dfrac{1}{n_2 - 3}}}$$

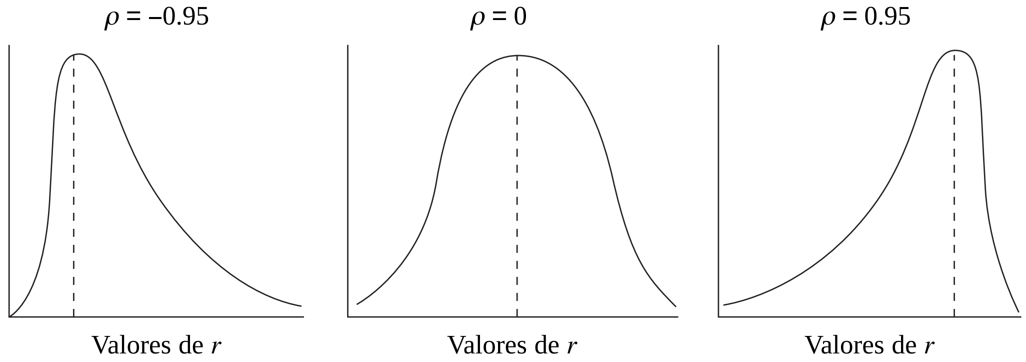
donde:

n_1 y n_2 = tamaño de las muestras, respectivamente.

Z_1 y Z_2 = puntuaciones *Z* provenientes de los coeficientes de correlación r_1 y r_2, respectivamente.

El valor 3 constituye una constante.

Después de aplicada la prueba y obtenidas las conclusiones correspondientes, los resultados se referirán a los coeficientes de correlación *r*.



Es necesario efectuar la transformación de *r* a *Z,* puesto que no es normal la distribución muestral de los coeficientes de correlación. Al respecto cabe hacer notar que cuando los valores se aproximan a cero, la distribución tiende al modelo normal, y que al alejarse de cero se incrementa la asimetría en la distribución muestral de dichos coeficientes.

■ Ejemplo 7

Transforme los siguientes datos en puntuaciones *Z* y aplique la prueba correspondiente. A continuación, refiera los resultados a los coeficientes *r* y compruebe la hipótesis propuesta.

Muestra I: $r_1 = 0.6691$; $n_1 = 8$
Muestra II: $r_2 = 0.7603$; $n_2 = 10$

Los valores de la *Z* de Fisher correspondientes a *r* pueden leerse directamente en la tabla del apéndice. Los resultados correspondientes son:

$$r_1 \Rightarrow Z_1 = 0.811$$
$$r_2 \Rightarrow Z_2 = 0.996$$

Se utilizará la siguiente fórmula para comprobar la diferencia entre las dos muestras:

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1 - 3} + \dfrac{1}{n_2 - 3}}}$$

Esta fórmula se basa en que el error estándar de *Z* es:

$$S_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}; \text{ o sea, } S_D = \sqrt{S_{Z_1}^2 + S_{Z_2}^2}$$

Se realizan sustituciones en la fórmula:

$$Z = \frac{0.811 - 0.996}{\sqrt{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}}} = \frac{-0.185}{\sqrt{0.2 + 0.14286}}$$

$$Z = \frac{-0.185}{0.58554}$$

$$\boxed{Z = -0.31595} \Rightarrow \boxed{|Z| = 0.31595}$$

Como $Z_{0.025} = 1.96$ y como $0.31595 < 1.96$, H_0 no se rechaza.

Este resultado es congruente con el obtenido al contrastar los coeficientes de regresión de dichas rectas.

ANÁLISIS DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

En ciertas investigaciones, estudios o experimentos no es posible utilizar el modelo de regresión lineal simple debido a que existe la posibilidad de dos o más variables independientes; cuando éstas varían de acuerdo con algún patrón o norma, la regresión múltiple es útil para establecer el efecto de una variable independiente, en tanto que sus similares se mantienen constantes.

Por ejemplo, una compañía de seguros lleva a cabo un estudio con el objeto de conocer la satisfacción de sus asegurados en el ramo de automóviles. Las variables que pueden intervenir son:

- Satisfacción del asegurado (*variable dependiente*).
- Prontitud de la emisión de la póliza (*variable independiente*).
- Rapidez en caso de siniestro (*variable independiente*).
- Atención del representante de la compañía (*variable independiente*).
- Lugar y hora donde ocurre el siniestro (*variable independiente*).

Caso particular para dos variables independientes

En este apartado se desarrollará el modelo de regresión múltiple para dos variables independientes. Cuando en un estudio intervengan más de dos variables independientes, se sugiere utilizar un paquete estadístico de cómputo (SYSTAT, spss, etcétera).

■ Ejemplo 8a

En el caso de la compañía aseguradora antes indicado, las variables por considerar son las siguientes:

X_1 = prontitud en la emisión de la póliza.

X_2 = rapidez en caso de siniestro (el tiempo que tarda el ajustador en llegar al lugar de los hechos).

Y = satisfacción del asegurado.

Así, X_1, X_2 serán las variables independientes (pueden adoptar cualquier valor) y Y es la variable dependiente (está en función de los valores que tomen X_1, X_2).

El modelo lineal que da respuesta a Y de un conjunto de k variables independientes es de la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Si el conjunto de los datos observados considera toda la población, los coeficientes del modelo lineal múltiple serán β_0, β_1, β_2 y ε es el error o residuo.

En la mayoría de los estudios o investigaciones se realizan muestreos; para este caso, el modelo se expresa como sigue:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + e$$

La compañía aseguradora realiza distintas encuestas, en las cuales considera las variables X_1 y X_2, cuyo rango está entre 0 y 4.

El asegurado calificó cada variable en el intervalo anterior, en el que cero es la calificación mínima y cuatro la máxima. Con respecto a la variable dependiente, el intervalo abarcó de 0 a 7, donde 0 es la mínima y 7 la máxima calificación; este número también fue asignado por el asegurado.

Es primordial señalar que se observará de manera independiente cada variable, incluida Y. Las encuestas aportaron los datos siguientes:

Y	X_1	X_2
2	1	0
3	1	1
4	1	1
5	2	2
7	2	3
7	1	2
4	3	1
5	2	2
7	3	4
6	4	4

■ Ejemplo 8b[†]

Una consultoría en estudios de mercado desea estimar los gastos en alimentación con respecto al ingreso de la familia y al tamaño de la misma.

Y = gasto de la alimentación por mes.
X_1 = ingreso mensual.
X_2 = tamaño de la familia (número de hijos).

Los resultados de la muestra fueron los siguientes:

n	Y	$X_1{}^a$	X_2
1	1	4	20
2	4	10	6
3	5	15	2
4	4	12	8
5	3	8	9
6	4	16	8
7	2	5	12
8	1	7	15
9	4	9	10
10	2	10	10

${}^aX_1$ = Se expresa en miles de pesos.

[†] Este ejemplo (b) debe desarrollarlo el lector, paralelamente al (a).

$$\begin{array}{lccc} \text{como} & \underset{3 \times n}{X'} & \underset{n \times 3}{X} = & \underset{3 \times 3}{A} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X_2 Y \end{bmatrix}, \text{ es decir, } A^{-1}\, b = Y$$

A continuación se realizan los cálculos para llegar a la expresión anterior.

	Y	X_1	X_2	X_1^2	$X_1\,X_2$	X_2^2	$X_1\,Y$	$X_2\,Y$	
	2	1	0	1	0	0	2	0	
	3	1	1	1	1	1	3	3	
	4	1	1	1	1	1	4	4	
	5	2	2	4	4	4	10	10	
	7	2	3	4	6	9	14	21	
	7	1	2	1	2	4	7	14	
	4	3	1	9	3	1	12	4	
	5	2	2	4	4	4	10	10	
	7	3	4	9	12	16	21	28	
	6	4	4	16	16	16	24	24	
Σ	50	20	20	50	49	56	107	118	Sumas
	ΣY	ΣX_1	ΣX_2	ΣX_2^2	$\Sigma X_1 X_2$	ΣX_2^2	$\Sigma X_1 Y$	$\Sigma X_2 Y$	

Una vez calculadas las sumas, se efectúan las sustituciones en el sistema.

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 20 & 50 & 49 \\ 20 & 49 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 107 \\ 118 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones se resuelve por medio de determinantes.[†]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 20 & 50 & 49 \\ 20 & 49 & 56 \end{vmatrix} \text{ obteniendo sus menores:}$$

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 50 & 49 \\ 49 & 56 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 20 & 49 \\ 20 & 56 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 20 & 49 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 790$$

[†] Véase el capítulo 3.

$$\Delta b_0 = \begin{vmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 107 & 50 & 49 \\ 118 & 49 & 56 \end{vmatrix} \text{ por lo que}$$

$$\Delta b_0 = 50 \begin{vmatrix} 50 & 49 \\ 49 & 56 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 107 & 49 \\ 118 & 56 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 107 & 50 \\ 118 & 49 \end{vmatrix}$$

$$\Delta b_0 = 50\ (399) - 20\ (210) + 20\ (-657) = 19\,950 - 4200 - 13\,140$$

$$\Delta b_0 = 2610$$

$$\Delta b_1 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 20 \\ 20 & 107 & 49 \\ 20 & 118 & 56 \end{vmatrix}$$

Entonces $\Delta b_1 = 10 \begin{vmatrix} 107 & 49 \\ 118 & 56 \end{vmatrix} - 50 \begin{vmatrix} 20 & 49 \\ 20 & 56 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 20 & 117 \\ 20 & 118 \end{vmatrix}$

$$\Delta b_1 = 10\ (210) - 50\ (140) + 20\ (220) = 2100 - 7000 + 4400$$

$$\Delta b_1 = -500$$

$$\Delta b_2 = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 20 & 50 & 107 \\ 20 & 49 & 118 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta b_2 = 10 \begin{vmatrix} 50 & 107 \\ 49 & 118 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 20 & 107 \\ 20 & 118 \end{vmatrix} + 50 \begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 20 & 49 \end{vmatrix}$$

$$\Delta b_2 = 10\ (657) - 20\ (220) + 50\ (-20) = 6570 - 4400 - 1000$$

$$\Delta b_2 = 1170$$

Los coeficientes del modelo de regresión múltiple son los siguientes:

$$b_0 = \frac{261}{790} = 3.304 \qquad b_1 = \frac{-500}{790} = -0.633 \qquad b_2 = \frac{1170}{790} = 1.481$$

Se sustituyen coeficientes en $\hat{Y}$:

$$\boxed{\hat{Y} = 3.304 - 0.633\ X_1 + 1.481\ X_2}$$

Para el ejemplo (b) desarrollado paralelamente por el estudiante, la respuesta es:

$$\hat{Y} = 4.191 + 0.086\ X_1 - 0.202\ X_2$$

Relación entre el análisis de varianza y el de regresión múltiple

En esta sección se analizará la recta de regresión y se comprobará si ésta resulta significativa; con este fin, se realizará un análisis de varianza a partir de los datos del modelo de regresión obtenido.

El primer cuadro contendrá las siguientes fórmulas:

$$SC_e = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_1)^2 = \text{ suma de cuadrados del error.}$$

$$SC_{reg} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \text{ suma de cuadrados debida a la regresión.}$$

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = \text{ suma de cuadrados total.}$$

Las tres columnas del cuadro serán los Y, X_1, X_2 observados, la cuarta se formará con $\hat{Y}$, resultado de sustituir el valor de X_1 y X_2 en la ecuación estimada. $X_i^T = (X_{0i}\ X_{1i}\ X_{2i})$

Observación	X_0[†]	X_1	X_2	Y	$\hat{Y}$	SC_e	SC_{reg}	SC_{tot}	$X^T A^{-1} X$
1	1	1	0	2	2.671	0.450	5.424	9.000	0.354
2	1	1	1	3	4.152	1.327	0.719	4.000	0.202
3	1	1	1	4	4.152	0.023	0.719	1.000	0.202
4	1	2	2	5	5.000	0.000	0.000	0.000	0.098
5	1	2	3	7	6.481	0.269	2.193	4.000	0.222
6	1	1	2	7	5.633	1.869	0.401	4.000	0.302
7	1	3	1	4	2.886	1.241	4.469	1.000	0.654
8	1	2	2	5	5.000	0.000	0.000	0.000	0.098
9	1	3	4	7	7.329	0.108	5.424	4.000	0.342
10	1	4	4	6	6.696	0.484	2.876	1.000	0.490
				$\overline{Y} = 5$	Suma	5.772	22.226	28.000	

[†] Esta variable se utiliza para efectuar las operaciones.

Una vez que se calcularon $\hat{Y}$, SC_e, SC_{reg} y SC_{total}, se realiza el análisis de varianza.

Fuente	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	Razón F
Regresión	SC_{reg}	k	SC_{reg} / k	$\dfrac{\frac{SC_{reg}}{k}}{\frac{SC_e}{n-k-1}}$
Residual	SC_e	$n - k - 1$	$SC_{e/(n-k-1)}$	

La razón de F es el estadístico de prueba para las siguientes hipótesis.

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1 : Por lo menos una β es diferente de cero.

Se sustituyen los valores de ejemplo en la tabla anterior.

Fuente	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	Razón F
Regresión	22.226	2	11.113	13.478
Residual	5.772	7	0.825†	
† $CM_e = S^2$				

Como se mencionó al principio de la sección, esta prueba es un instrumento para determinar si el modelo de regresión es significativo o no.

Si H_0 se rechaza, puede concluirse que el modelo lineal de regresión es significativo.

Si no existe suficiente evidencia para rechazar H_0, hay que concluir que el modelo de regresión estimado no es significativo.

Evaluación de la ecuación de regresión múltiple

En esta sección se considerará primero el intervalo de confianza para la respuesta media. A continuación, se estudiará el intervalo para cada coeficiente del modelo. Respecto al primer tema, la fórmula es la siguiente:

dado $\mu_{Y|X_1, X_2 \ldots X_k}$, el IC es:

$$\bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}, gl}\; S\sqrt{X^T A^{-1} X} < \mu_{Y|X_1, X_2, \cdots X_k} < \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}, gl}\; S\sqrt{X^T A^{-1} X}$$

donde $t_{\frac{\alpha}{2}}$ es un valor de la distribución t con $n - k - 1$ grados de libertad.

X^T es la transpuesta de la matriz X.†

---

† X es el vector que da los valores de las $x_i \ldots x_k$ en el punto donde se estima $\mu\, Y|X_1 - X_k = \mu\, Y|X$ vector.

■ Ejemplo 9

Construya un intervalo de confianza de 95% en $X^T = [1, 1, 0]$.

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El punto se sustituye en la ecuación estimada, y se obtiene:

$$\hat{Y} = 3.304\ (1)^{\dagger} - 0.633\ (1) + 1.481\ (0) = 2.67$$

Los grados de libertad son $gl = n - k - 1 = 7 = 10 - 2 - 1$ y $\frac{\alpha}{2} = 0.025$; por consiguiente,

$$t_{\frac{\alpha}{2}, gl} = 2.365$$

$$S^2 = 0.825$$

$$S = 0.9083$$

Del sistema de ecuaciones que se obtuvo en la sección anterior, resulta:

$$AX = b \Leftrightarrow A^{-1}b = Y$$

Para construir el intervalo de confianza es necesario calcular la matriz inversa† de A; es decir, A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.506 & -0.177 & -0.025 \\ -0.177 & 0.202 & -0.114 \\ -0.025 & -0.114 & 0.126 \end{pmatrix}$$

Posteriormente se realiza la operación:

$$X^T A^{-1} X = (1,\ 1,\ 0) \begin{pmatrix} 0.506 & -0.177 & -0.025 \\ -0.177 & 0.202 & -0.114 \\ -0.025 & -0.114 & 0.126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.354$$

A continuación, se sustituyen los valores en el intervalo de confianza:

$$5 - 2.365\ (0.9083)\ \sqrt{0.354} < \mu_{Y|X} < 5 + 2.365\ (0.9083)\ \sqrt{0.354}$$

$$3.722 < \mu_{Y|X} < 6.278$$

---

† Se puede utilizar MacStat (capítulo 3).

Es primordial señalar que el intervalo anterior se obtuvo a partir de un punto X, a continuación, se muestran los intervalos de $\mu_{Y|X}$ para cada una de las observaciones.

Observación	Intervalo de confianza
1	$3.722 < \mu_{Y\|X} < 6.278$
2	$4.035 < \mu_{Y\|X} < 5.965$
3	$4.035 < \mu_{Y\|X} < 5.965$
4	$4.328 < \mu_{Y\|X} < 5.672$
5	$3.988 < \mu_{Y\|X} < 6.012$
6	$3.820 < \mu_{Y\|X} < 6.180$
7	$3.263 < \mu_{Y\|X} < 6.737$
8	$4.328 < \mu_{Y\|X} < 5.672$
9	$3.744 < \mu_{Y\|X} < 6.256$
10	$3.496 < \mu_{Y\|X} < 6.504$

En segundo término, se estudiarán los intervalos de confianza para cada uno de los coeficientes del modelo de regresión (al 95%).

Para b_0 se tiene:

$$\left(b_0 - t_{\frac{\alpha}{2},gl}\; S\sqrt{c_{11}}\sqrt{\frac{n}{n-k}} < \beta_0 < b_0 + t_{\frac{\alpha}{2},gl}\; S\sqrt{c_{11}}\sqrt{\frac{n}{n-k}}\right)$$

donde:

c_{11} = el primer elemento de la diagonal de la matriz inversa A^{-1}.

$gl = n - k - 1 = 7$

$$3.304 - 2.365\ (0.9083)\ \sqrt{0.506}\ \sqrt{\frac{10}{10-2}} < \beta_0 < 3.304 + 2.365\ (0.9083)$$

$$\sqrt{0.506}\ \sqrt{\frac{10}{10-2}}$$

$(3.304 - 1.7086 < \beta_0 < 3.304 + 1.7086)$.

$$\boxed{(1.5954 < \beta_0 < 5.0126)}$$

Para b_1 se tiene:

$$\left(b_1 - t_{\frac{\alpha}{2},gl}\; S\sqrt{c_{22}}\ \sqrt{\frac{n}{n-k}} < \beta_1 < b_1 + t_{\frac{\alpha}{2},gl}\; S\sqrt{c_{22}}\ \sqrt{\frac{n}{n-k}}\right)$$

donde:

c_{22} es el segundo elemento de la diagonal de la matriz inversa A^{-1}.

$gl = n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$

Se realizan las correspondientes sustituciones de valores:

$$-0.633 - 2.365\ (0.9083)\ \sqrt{0.202}\ \sqrt{\frac{10}{10-2}} < \beta_1 < -0.633 + 2.365\ (0.9083)$$

$$\sqrt{0.202}\ \sqrt{\frac{10}{10-2}}$$

$$\boxed{(-1.714 < \beta_1 < 0.448)}$$

Para b_2 se tiene:

$$\left(b_2 - t_{\frac{\alpha}{2}, gl}\ S\sqrt{c_{33}}\ \sqrt{\frac{n}{n-k}} < \beta_2 < b_2 + t_{\frac{\alpha}{2}, gl}\ S\sqrt{c_{33}}\ \sqrt{\frac{n}{n-k}}\right)$$

donde c_{33} = el tercer elemento de la diagonal de la matriz inversa A^{-1}.

$$1.481 - 2.365\ (0.9083)\ \sqrt{0.126}\ \sqrt{\frac{10}{10-2}} < b_2 < 1.481 + 2.365\ (0.9083)$$

$$\sqrt{0.126}\ \sqrt{\frac{10}{10-2}}$$

$$(1.481 - 0.853 < \beta_2 < 1.481 + 0.853)$$

$$\boxed{(0.628 < \beta_2 < 2.334)}$$

Prueba de hipótesis para los coeficientes de regresión

Para el coeficiente β_0, las hipótesis son las siguientes:

$H_0 : \beta_0 = 0$

$H_1 : \beta_0 \neq 0$

Se sustituyen los valores en el estadístico de prueba: $t = \dfrac{b_0}{\text{(b) Error estándar}}$

$$t = \frac{b_0}{S\sqrt{c_{11}}},\quad t = \frac{3.304}{0.9083 \times \sqrt{0.506}}$$

$$t = \frac{3.304}{0.64611} = 5.11370$$

$$\boxed{t_c = 5.11370}$$

Se desea efectuar la prueba de hipótesis con una confiabilidad de 95%; es decir:

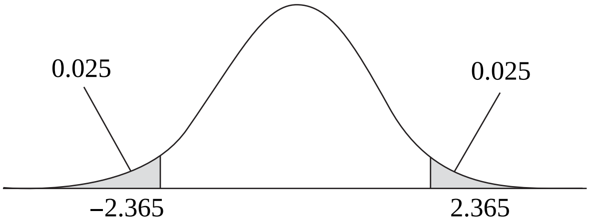
$$\alpha = 5\%$$

Se busca el valor de t en tablas con $gl = n - k - 1 = 7$, y se obtiene:

$$t_{0.025,\,7} = |\,2.365\,|$$

La región de rechazo es:

(I)



Se concluye que b_0 es significativa, ya que 5.11370 > 2.365 con un $\alpha = 5\%$, H_0 se rechaza.

Para β_1, se plantea la siguiente hipótesis:

$H_0 \ : \beta_1 = 0$

$H_1 \ : \beta_1 \neq 0$

Se sustituyen los valores en el estadístico de prueba: $t = \dfrac{b_1}{EE\,(b_1)}$

$$t = \frac{b_1}{S\sqrt{c_{22}}}, \ \ t = -\frac{0.633}{0.9083\,\sqrt{0.202}} = -1.5506$$

$$t = -1.5506$$

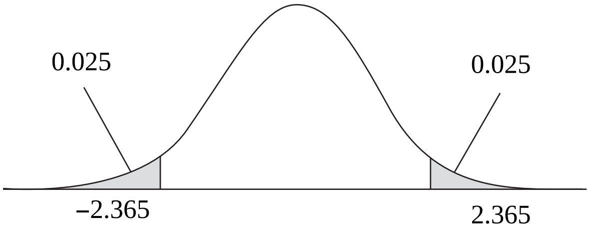
$$|\,t\,| = 1.5506$$

Debido a que se desea un nivel de significancia de 5%; es decir, una confiabilidad de 95%, nuevamente se busca el valor de t en tablas con un $\alpha = 5\%$ y $gl = n - k - 1 = 7$. El valor es el siguiente:

$$t_{7,\,0.025} = |\,2.365\,|$$

Se identifica la región de rechazo mediante una gráfica.

(II)



Como 1.5506 < | 2.365 |, H_0 no se rechaza, es decir, b_1 no es significativo.

Por último, para β_2 se tienen las siguientes hipótesis:

$H_0 : \beta_2 = 0$

$H_1 : \beta_2 \neq 0$

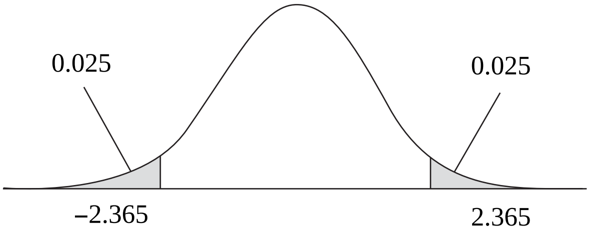
Igual que en los casos anteriores, se sustituyen los valores en el estadístico de prueba: $t = \dfrac{b_2}{EE\,(b_2)}$

$$t = \frac{b_2}{S\sqrt{c_{33}}}$$

$$t = \frac{1.481}{0.9083\,\sqrt{0.126}}$$

$$t = 4.5935$$

Se presenta el mismo nivel de significancia que en los casos anteriores; por ello el valor de t es $t_{0.025,\,7}$ = | 2.365 |. Posteriormente, se identifica en la gráfica la región de rechazo para H_0.



Como 4.5935 > 2.365, H_0 se rechaza y resulta posible afirmar que b_2 es significativa.

Coeficiente de correlación múltiple

A continuación se explicará solamente el cálculo de r y R^2, ya que se consideró su interpretación en la sección sobre regresión simple. Con este fin, se utilizarán los resultados obtenidos en el ejemplo de la aseguradora. La fórmula es la siguiente:

$$R^2 = \frac{SC_{reg}}{SC_{tot}}$$

Al sustituir los valores del ejemplo, se obtiene:

$$R^2 = \frac{22.226}{28}$$

$$\boxed{R^2 = 0.794}$$

$$\boxed{r = 0.891}$$

Resumen

En este capítulo se ha analizado con gran detalle tanto el análisis de regresión lineal simple bivariado como el múltiple, debido a que son herramientas muy poderosas para cualquier tipo de investigación.

Una vez establecidos los conceptos fundamentales, el lector podrá utilizar el paquete estadístico MacStat para la solución de problemas. Así como para obtener otros dos tipos de regresión: la *exponencial* y la *logarítmica*; con sus respectivas correlaciones.

Ejercicios

Realice un análisis de regresión lineal en los siguientes ejercicios (13.1 al 13.5).

13.1 Un investigador en psicología experimental lleva a cabo un experimento con 10 animales de laboratorio (de la misma edad y peso). Les administra un fármaco, midiendo el tiempo en horas (X) y la concentración del fármaco en mg (Y). Se obtienen los siguientes datos:

X	***Y***
0.5	0.42
0.5	0.45
1.0	0.35
1.0	0.33
2.0	0.25
2.0	0.22
3.0	0.20
3.0	0.20
4.0	0.15
4.0	0.17

13.2 En un proceso de control de calidad, se obtiene una muestra aleatoria de 8 frascos de un reactivo (en mg) y su correspondiente grado de pureza.

X	***Y***
85	2.3
65	1.2
73	1.5
90	1.9
82	1.8
80	2.0
68	1.3
88	2.1

13.3 A 10 candidatos a ingresar en un programa de doctorado, se les aplica en la Facultad de Psicología una prueba de personalidad (X) y un examen general de conocimientos (Y), con las siguientes puntuaciones:

Candidato	X	Y
A	2.96	529
B	2.46	506
C	3.36	591
D	3.40	610
E	2.43	474
F	2.12	509
G	2.85	550
H	3.12	600
I	3.20	575
J	2.75	540

13.4 Se realiza un experimento para determinar la concentración de una droga determinada (X) en una solución, y se lee la fluorescencia producida (Y) al agregar ácido bórico. Se obtienen los siguientes resultados:

X	Y
0.0	1
0.25	3
0.50	6
1.0	10
2.0	15
4.0	28
6.0	43
8.0	52
10.0	70

13.5 Un investigador mide a 16 sujetos el grado de afectividad de un color (Y) relacionado con un estímulo visual (X) y su tiempo de reacción. Se registran los siguientes datos:

X	***Y***
2.31	83
1.75	91
1.69	91
1.36	87
1.29	93
1.13	93
1.02	96
0.29	107
0.74	100
0.73	104
0.62	97
0.56	118
0.40	113
0.39	122
0.34	107
0.00	116

13.6 A 21 estudiantes se les aplican tres pruebas psicológicas (X_1, X_2, X_3), de las que surgieron los siguientes datos:

Puntuación de actitud ante la agresión

Y	X_1	X_2	X_3
48	22	38	15
48	19	38	15
47	20	37	20
46	20	37	17
46	17	35	19
43	21	34	15
42	21	34	14
42	19	33	20
41	17	33	13
40	15	32	15
39	18	32	12
32	11	25	15
31	17	25	9
30	16	23	9
29	15	22	13
29	15	21	9
28	16	20	11
27	16	18	11
27	13	17	10
27	12	15	8
26	12	15	8

a) Realice un análisis de regresión lineal de:

Y con X_1

Y con X_2

Y con X_3

b) Realice un análisis de regresión múltiple.

c) Concluya.

13.7 Se aplicó a un grupo de 18 adolescentes sordomudos la prueba de inteligencia de Wechsler (Wais) y 4 pruebas del DAT; las puntuaciones de ambas aplicaciones son las siguientes:

	Wais	**Razonamiento mecánico**	**Razonamiento abstracto**	**Relaciones espaciales**	**Velocidad y exactitud**
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	99	15	33	16	25
2	103	24	20	20	40
3	111	17	37	13	21
4	116	5	42	8	20
5	127	9	40	6	18
6	117	5	48	3	17
7	114	14	34	7	31
8	113	13	33	13	35
9	122	24	20	16	35
10	113	15	32	12	27
11	120	14	43	10	17
12	108	12	36	11	28
13	116	20	31	12	29
14	106	20	19	19	37
15	100	32	22	18	29
16	96	25	21	16	39
17	90	20	31	19	28
18	97	23	16	21	38

a) Realice un análisis de regresión lineal de Y con cada una de las 4 pruebas del DAT.

b) Realice un análisis de regresión múltiple utilizando MacStat.

c) Concluya.

13.8 Se realiza un estudio con 16 atletas de alto rendimiento, 8 de potencia y 8 de resistencia; se les mide la extensión isométrica de la rodilla (X_1) (en kilogramos fuerza) y el porcentaje de la contracción muscular (X_2). Se obtienen los siguientes datos; donde X_2 es la variable dependiente.

Atletas de potencia		**Atletas de resistencia**	
X_1	X_2	X_1	X_2
196.0	56.0	161.0	98.4
183.0	28.8	142.0	70.8
295.0	57.2	122.5	35.4
203.0	46.0	123.0	74.5
195.0	35.5	176.0	79.5
289.0	58.6	156.0	62.1
198.0	41.4	126.0	74.3
206.9	21.6	95.0	67.7

Realice un análisis de regresión lineal para cada grupo de atletas y contraste las dos rectas de regresión y sus coeficientes de correlación.

13.9 En una empresa se analizan las ventas (Y), (X_1) los gastos en publicidad por TV y (X_2) los gastos en publicidad por el periódico durante 4 semanas (todo en miles de dólares).

Realice una regresión múltiple con los siguientes datos:

X_1	X_2	Y
4	1	7
7	2	12
9	5	17
12	8	20

13.10 Se realiza un estudio con 10 estudiantes de posgrado en una materia determinada, donde X_1 es el número de problemas resueltos correctamente en una clase, X_2 son las puntuaciones obtenidas al aplicarles una prueba psicológica que mide autoestima y Y es el número de problemas que cada estudiante espera resolver correctamente en el examen final. Con los datos que se presentan a continuación, realice un análisis de regresión múltiple.

Estudiante	X_1 Problemas resueltos en clase	X_2 Puntuación de autoestima	Y Problemas que espera resolver en el examen
1	14	6	14
2	8	15	5
3	9	19	8
4	13	33	11
5	10	39	15
6	11	38	14
7	14	74	18
8	15	74	19
9	11	11	7
10	16	78	17

Capítulo 14

Estadística no paramétrica

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector sea capaz de identificar y aplicar adecuadamente las pruebas estadísticas no paramétricas.

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Obtener la bondad de ajuste de un conjunto de datos, aplicando la prueba:
  Ji-cuadrada
  Kolmogorov-Smirnov.
- Explicar las diferencias entre las pruebas paramétricas y no paramétricas.
- Considerar los requisitos de uso de cada una de las pruebas no paramétricas.
- Utilizar la prueba no paramétrica en lugar de su correspondiente paramétrica.

  Asociación
  Spearman
  Tau de Kendall
  Concordancia de Kendall
  Biserial de punto

  Comparación
  U de Mann-Whitney
  Rangos con signos en pares de Wilcoxon

  Análisis de varianza
  Kruskal-Wallis
  Friedman

  Confiabilidad
  Kappa

INTRODUCCIÓN

El término *estadística no paramétrica* se refiere a un conjunto de métodos inferenciales válidos para formas muy diversas de distribución de la población. La aplicación de estos métodos no requiere modelo de población, en el sentido de un parámetro específico relacionado con la forma de la curva que representa a la población en estudio, como sí es necesario, por ejemplo, en el caso de la distribución normal. En el contraste de hipótesis, las pruebas estadísticas no paramétricas emplean usualmente algunos datos más simples de la muestra, como los signos de las mediciones, las relaciones de orden o las categorías de las frecuencias. Estos rasgos generales no requieren escalas numéricas de medición. Por otra parte, es más importante indicar que a estos métodos no les afecta el alargamiento o estrechamiento de la escala. Una aclaración final indispensable es que los términos *distribución libre* y *estadística no paramétrica* no son sinónimos, aunque en este texto se usarán indistintamente.

A estos procedimientos se les llama de distribución libre, por no considerar la forma como se distribuye la población. Tienen ventajas sobre las pruebas paramétricas, algunas de ellas son: *i*) implican menos requisitos de uso, *ii*) son más sencillas de entender y aplicar, y *iii*) los procedimientos de cálculo resultan menos laboriosos. Por otra parte, los métodos no paramétricos tienen ciertas desventajas: *i*) se pierde información, *ii*) la potencia es menor que la de las pruebas paramétricas y *iii)* tienden a ser "conservadoras", es decir, se orientan hacia la aceptación de la hipótesis nula con más frecuencia de lo que deberían.

En estas circunstancias, las pruebas estadísticas paramétricas son preferibles a las no paramétricas, pero si la población no está normalmente distribuida o las varianzas poblacionales no son homogéneas o iguales, entonces puede utilizarse una prueba de distribución no paramétrica como un buen sustituto de su análoga paramétrica, sobre todo cuando la muestra en estudio es pequeña.

Se discutirán métodos que únicamente requieren mediciones nominales, comparando distribuciones enteras. También se considerarán las técnicas que requieren datos ordinales. Cuando los datos son categóricos o continuos se hará un análisis estadístico, utilizando el modelo de la χ^2 (*ji*-cuadrada), que si bien algunos autores la consideran no paramétrica, se ha creído oportuno que forme parte de este capítulo en sus aplicaciones más relevantes, como:

a) Independencia.
b) Homogeneidad o proporción.
c) Mediana.

Para la prueba de bondad de ajuste se emplearán dos técnicas:

i) La χ^2 (*ji*-cuadrada); y
ii) La Kolmogorov-Smirnov.

PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

En esta sección se considerarán dos tipos de bondad de ajuste. El primer tipo se aplica cuando la hipótesis nula concierne a una distribución discreta; el segundo se aplica si la hipótesis nula es básicamente una distribución continua. Los modelos que se describirán son:

1. χ^2 (*ji*-cuadrada). Este modelo es clásico y se emplea cuando la H_0 concierne a una distribución discreta.
2. K-S (Kolnogorov-Smirnov) para una muestra, cuando la hipótesis nula concierne una distribución continua.

Estas pruebas son de importancia vital, ya que para una aplicación adecuada de los modelos estadísticos es necesario obtener información acerca de la forma de la distribución poblacional de donde se extrae la muestra. Esta forma puede ser el tema de investigación, ya que las variables aleatorias que representan constructos tales como ansiedad, inteligencia, estrés, por mencionar algunos, pueden distribuirse en forma normal, binomial, Poisson, etc. y aplicar la prueba estadística adecuada *t* de Student, ANOVA, Kruskal-Wallis, entre otras. Dicho de manera distinta, utilizar modelos paramétricos o no paramétricos adecuadamente.

Para el análisis de varianza se utilizarán dos modelos:

a) La prueba de Kruskal-Wallis, para muestras independientes.
b) La prueba de Friedman para diseñar bloques, o tambien, para una sola muestra medida más de dos ocasiones.

Por último se encuentran los coeficientes de asociación, también llamados *de correlación*: γ_s, τ, ω, γ_{bp}.

Ji-cuadrada (χ^2)

Este modelo, obtenido por K. Pearson en 1900, mide la discrepancia entre la frecuencia observada y la esperada teóricamente, con base en una distribución hipotética.

La prueba de bondad de ajuste ayuda a decidir si los resultados de un experimento coinciden con los esperados de acuerdo con alguna ley, modelo o teoría científica.

Esto se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Se obtienen las frecuencias observadas y se ubican en un cuadro de contingencia (también llamada *tabla de doble entrada* o *diagrama de Carroll*) (véase capítulo 3).
2. Se construye un cuadro de frecuencias esperadas que concuerden con la distribución teórica o el modelo científico.
3. Según el número de variables de criterio que se consideren, será el cuadro de contingencia ($l \times c$) o ($r \times l$); la prueba de bondad de ajuste se empleará para una muestra y una o más variables de criterio.

Existe una familia de curvas χ^2, derivadas de una variable normalmente distribuida, cuya forma depende del tamaño de la muestra. Para muestras pequeñas (que tienen pocos grados de libertad), esta distribución se halla fuertemente sesgada en dirección positiva (todos sus valores son positivos y varían de cero a infinito). Cuando la muestra es grande ($n \to \infty$), la χ^2 se aproxima a la distribución normal (véase el capítulo 7).

El modelo que se utilizará en esta sección es el siguiente:

$$\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

donde:

fo = frecuencia observada
fe = frecuencia esperada

Para cada clase o categoría se obtiene el cuadrado de la diferencia entre la frecuencia observada y la esperada, resultado que se divide por la misma frecuencia esperada de dicha categoría. La suma total de cada categoría proporciona el valor de χ^2.

A continuación se enumeran los requisitos de uso de la prueba de χ^2 para bondad de ajuste.

1. Se requiere un mínimo de 50 observaciones (mediciones) para que la distribución χ^2 sea una aproximación razonable de la distribución muestral esperada.
2. La frecuencia esperada para cada categoría debe ser por lo menos de 5; a fin de cumplir este requisito, se pueden combinar las categorías.
3. En el caso de la bondad de ajuste para la distribución normal, deben conocerse μ_X y σ_X o sus estimadas $\bar{x}$ y s, a fin de poder calcular las frecuencias esperadas.

Procedimiento

Paso 1. Identifique la variable de interés.

Paso 2. Establezca las hipótesis estadísticas.

H_0: las observaciones muestrales han sido extraídas de una distribución con ciertas propiedades teóricas, independencia y forma de la distibución poblacional,

o bien

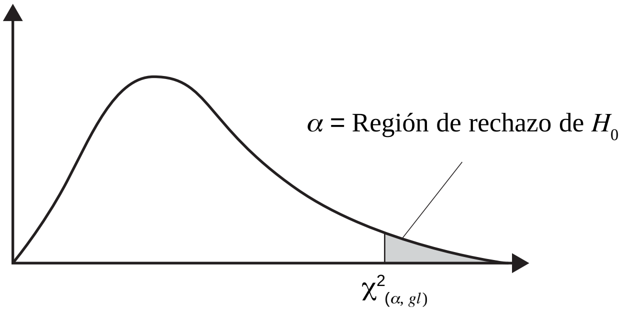
H_0 : el modelo que genera *fe* es válido.

H_1 : no es válida.

Paso 3. Proponga el valor de α.

Paso 4. Determine el modelo estadístico que se utilizará. En este caso

$$\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$



Paso 5. Obtenga mediante la tabla de χ^2 (*ji*-cuadrada) del apéndice el valor crítico de χ^2 (α, gl) y ubique la región de rechazo en una gráfica.

Paso 6. Especifique la regla de decisión (RD) para rechazar H_0.

Si $\chi_c^2 \geq \chi^2_{(\alpha,\, gl)}$, entonces H_0 se rechaza.

Paso 7. Calcule χ^2, por medio de $\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$, habiendo calculado previamente *fe*,

donde
n = tamaño de la muestra
p = probabilidad de ocurrencia en cada categoría

Paso 8. Obtenga las conclusiones considerando el rechazo de H_0 o de H_1 (la distribución muestral se ajusta a la especificación de la distribución o no se ajusta a ella).

Una variable de criterio. Cuando las categorías de la distribución de frecuencias se basan en una sola variable, constituyen un análisis de frecuencias de una variable de criterio, no obstante que existan varios resultados: lanzar una moneda (cara, cruz), tirar un dado (1, 2, 3, 4, 5 o 6).

■ Ejemplo 1

Si se lanza una moneda al aire, únicamente caerá cara o cruz; pero si se lanzan 1 000 monedas, la única variable a tomar en cuenta es la cara de la moneda que aparecerá, pero se contarán cuántas caras y cruces caerán.

Después de determinar el muestreo, las 1000 monedas se lanzan al aire y se registra la frecuencia de caras y cruces en un cuadro de frecuencias observadas. A continuación, se construye el cuadro de frecuencias esperadas, previstas por los resultados más simples de probabilidad elemental. Para una muestra de 1000 monedas, la hipótesis nula (H_0) implica que deben obtenerse 500 caras y 500 cruces. En este caso, la prueba de *ji*-cuadrada ayudará a decidir si la discrepancia entre los resultados observados y los esperados corresponde simplemente a la fluctuación del muestreo o indica el sesgo de la población.

Frecuencias observadas		
Cara	Cruz	Total
530	470	1 000
(a)	(b)	

Frecuencias esperadas		
Cara	Cruz	Total
500	500	1 000
(a)	(b)	

o sea:

530 500	470 500	1 000

Paso 1. Como la variable de criterio es la posición de la cara de la moneda al caer, entonces se establecen las hipótesis nula y alternativa de la siguiente manera:

H_0: cara y cruz ocurren con igual frecuencia.
H_1: cara y cruz *no* ocurren con igual frecuencia.

Paso 2. Como $gl = 1$ y $\alpha = 0.01 = 1\%$, entonces:

$$\chi^2 \text{ crítica} = \chi^2\,(1, 0.01) = 6.64$$

fo_1 fe_1	fo_2 fe_2	. . .	fo_n fe_n

donde fo_i es la frecuencia observada i, $i = 1, 2, ..., n$

y fe_i es la frecuencia esperada i, $i = 1, 2, ..., n$

Paso 3. Se define la *población* de estudio como: todos los lanzamientos de las monedas de cierto valor y con características determinadas.

Paso 4. La muestra n son 1000 monedas seleccionadas al azar de la población anterior, o el lanzamiento 1000 veces de una moneda.

Paso 5. El modelo estadístico por aplicar es:

$$\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

Paso 6. Al sustituir los datos concentrados en los cuadros anteriores y efectuar las operaciones, resulta:

$$\chi_2 = \frac{(530 - 500)^2}{500} + \frac{(470 - 500)^2}{500} = 3.60$$

$$\boxed{\therefore \chi_2^c = 3.60}$$

Paso 7. Regla de decisión (RD):

si $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\, gl^2}$ H_0 se rechaza. Como 3.60 < 6.64, entonces *no* se rechaza H_0.

Paso 8.

Conclusión

Los resultados no son significativos. En este estudio de las monedas no se encontró indicación alguna de sesgo, debido a que no se predice respuesta (salida) específica alguna; por ejemplo, las caras ocurrirán con mayor frecuencia. Por ello, el nivel de significancia se establece relativamente bajo (0.01) por dos razones: *i*) el tamaño de la muestra es grande y se minimiza (error tipo II) y *ii*) el error más grave sería decidir que las monedas tienen un sesgo, cuando en realidad no es así.

La regla de decisión (RD) establece que H_0 se rechazará si la *ji*-cuadrada (χ^2) calculada es mayor que el valor crítico de 6.64 (los procedimientos para determinar los valores críticos se estudiarán después).

Pudo cometerse un error del tipo II; sin embargo, el interés en un posible sesgo de las monedas disminuye en gran escala, si no es que desaparece por completo.

Dos variables de criterio.[†] En algunos problemas de bondad de ajuste se obtienen medidas de dos o más variables categóricas. Las frecuencias esperadas en cada combinación de categorías se generan a partir de algunas distribuciones teóricas; para evitar confusiones en este tipo de estudios, es recomendable colocar los datos en una tabla de contingencia de doble entrada.

fo_{11} / fe_{11}	fo_{12} / fe_{12}	. . .	fo_{1n} / fe_{2n}
fo_{21} / fe_{21}	fo_{22} / fe_{22}	. . .	fo_{2n} / fe_{2n}
⋮	⋮	. . . .	⋮
fo_{m_1} / fe_{m_1}	fo_{m_2} / fe_{m_2}	. . .	fo_{mn} / fe_{mn}

donde fo_{ij} es la frecuencia observada ij, $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., n$

y fe_{ij} es la frecuencia esperada $i = 1, 2, ..., m$,

$j = 1, 2, ..., n$

■ Ejemplo 2

Aplicación de una prueba de bondad de ajuste para una sola muestra y dos variables de criterio. Un genetista efectúa la cruza de una muestra de chícharos con la siguientes variables de criterio: color (verde o amarillo) y textura (liso o rugoso). Existen cuatro combinaciones posibles como resultados de las cruzas: amarillo-liso (*AL*), amarillo-rugoso (*AR*), verde-liso (*VL*) y verde-rugoso (*VR*); de acuerdo con las leyes de Mendel, la combinación *AL* deberá ocurrir nueve veces más frecuentemente que la *VR*, mientras que las mezclas *AR* y *VL* ocurrirán tres veces con mayor frecuencia que la *VR*. Esta distribución teórica se utiliza para construir una tabla de frecuencias esperadas de (2 × 2).

Debido a que en dicho ejemplo la muestra consta de 960 elementos (chícharos), el investigador podrá esperar que las combinaciones posibles ocurrirán aproximadamente con las siguientes frecuencias esperadas (*E*):

$$\begin{aligned} VR &= 60 \\ VL &= 180 \\ AR &= 180 \\ AL &= 540 \end{aligned}$$

[†] Una sí puede ser controlada, por ejemplo, tratamientos en un experimento.

Las frecuencias observadas (O) son las siguientes:

$VR = 50$

$VL = 200$

$AR = 160$

$AL = 550$

O	E	$\frac{(O-E)^2}{E}$
50	60	1.66
200	180	2.22
160	180	2.22
550	540	0.185
		6.29

Por tanto, las frecuencias observadas y esperadas se ubicarán en las tablas de contingencia. Los grados de libertad para estas tablas de contingencia son:

$$gl = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$gl = 3$$

aplicando el modelo $\chi^2 = \sum \frac{\left(fo - fe\right)^2}{fe}$ se tiene

$$\chi^2 = \frac{\left(50-60\right)^2}{60} + \frac{\left(200-180\right)^2}{180} + \frac{\left(160-180\right)^2}{180} + \frac{\left(550-540\right)^2}{540}$$

$$= \frac{100}{60} + \frac{400}{180} + \frac{400}{180} + \frac{100}{540} = 6.30; \quad \boxed{\chi_c^2 = 6.30}$$

También puede utilizarse la fórmula siguiente:

$$\chi^2 = \sum \frac{fo^2}{fe} - n$$

$$\chi^2 = \sum \frac{fo^2}{fe} - n = \frac{\left(50\right)^2}{60} + \frac{\left(200\right)^2}{180} + \frac{\left(160\right)^2}{180} + \frac{\left(550\right)^2}{540} - 960$$

$$\chi^2 = 41.667 + 222.22 + 142.22 + 560.185 - 960 = 6.30; \quad \boxed{\chi^2 = 6.30}$$

Suponga que el genetista decide tomar un nivel de confianza de 5%, o sea, $\alpha = 0.05$, y el valor crítico de χ^2, determinado en la tabla de χ^2, es de 7.81. En ese caso, la hipótesis nula de la distribución observada, es igual que la distribución esperada por la ley de Mendel, no se rechazaría, ya que la $\chi^2 = 6.30$ no es mayor que el valor crítico de 7.81. En las pruebas de bondad de ajuste, la *fe* (frecuencia esperada) ya está definida por el investigador, o las condiciones de estudio.

■ Ejemplo 3

Se realiza una investigación con el fin de producir un nuevo tipo de insulina, la hormona utilizada para controlar enfermos de diabetes mellitus. Los siguientes criterios de inclusión se consideran en la muestra de estudio:

- $n = 400$ pacientes del mismo sexo.
- Mismo grado de evolución de la enfermedad.
- Dieta controlada.
- Supervisión médica.

En este experimento se medirá la respuesta de los pacientes a la insulina convencional, así como el porcentaje de ellos en cada una de las siguientes categorías estandarizadas:

Categoría 1. Decremento intenso en la glucosa.
Categoría 2. Decremento moderado en la glucosa.
Categoría 3. Decremento ligero en la glucosa.
Categoría 4. Decremento nulo o ligero incremento en la glucosa.

Con base en un estudio de nivel nacional, se determinó que los porcentajes por categoría son, respectivamente: 50%, 25%, 15% y 10%. Por otra parte, los resultados de las pruebas clínicas con el nuevo tipo de insulina aplicadas en 400 pacientes son: 240, 120, 30 y 10.

Paso 1. La variable de interés es la respuesta a cada categoría.

Paso 2. H_0: $P_1 = 50\%$, $P_2 = 25\%$, $P_3 = 15\%$, $P_4 = 10\%$.
H_1: al menos una probabilidad de una categoría es diferente del valor esperado.

Paso 3. $\alpha = 0.05$

Paso 4.

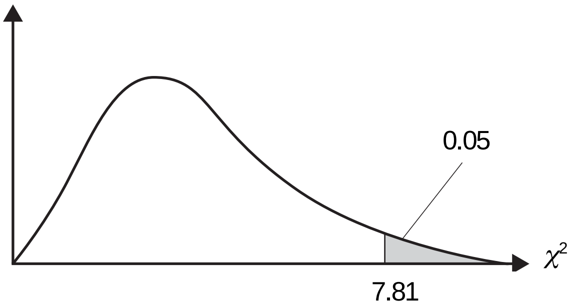
$$\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

Paso 5. Obtener *gl*.

Como $\Sigma\, fo = \Sigma\, fe$ (o su equivalente *n* es la única restricción).
Entonces $gl = k - 1 = 4 - 1 = 3$
$gl = 3$

$$\chi^2_{0.05,\ 3} = 7.81$$

Paso 6. Si $\chi^2_c \geq 7.81$, H_0 se rechaza.



Paso 7. Para emplear $\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$

Se calcula primero *fe* para cada una de las cuatro categorías. Al utilizar $fe = np$

Categoría	***n***	***p***	***fe***
		Porcentaje	
1	400	(50)	= 200
2	400	(25)	= 100
3	400	(15)	= 60
4	400	(10)	= 40
		100%	400

Categoría	***fo***	***fe***	$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$
1	240	200	8
2	120	100	4
3	30	60	15
4	10	40	22.5
	$\Sigma\, fo = 400$	$\Sigma\ fe = 400$	$\chi^2 = 49.5$

Paso 8. Si $\chi_c^2 \geq 7.81$, H_0 se rechaza.

Como $49.5 > 7.81$, H_0 se rechaza para $P < 0.05$.

Conclusiones

La proporción es la misma tanto para pacientes en la *fe* (usuarios del nuevo tipo de insulina) en las categorías 3 y 4, 50 y 75%, respectivamente, como en las *fo* (usuarios de insulina convencional). Por consiguiente, la nueva insulina no es más efectiva que la convencional.

■ Ejemplo 4

Se implanta un nuevo chip para operar un programa de computación y se instala en 200 máquinas seleccionadas al azar. Los datos son los siguientes:

Tiempo de acceso en mseg.

i	*LIR – LSR*	fo_i
1	Menos de 2.497	1
2	2.497 – 2.498	7
3	2.498 – 2.499	33
4	2.499 – 2.500	64
5	2.500 – 2.501	59
6	2.501 – 2.502	29
7	2.502 – 2.503	5
8	2.503 o más	2
		200

Calcular X^2, prueba de bondad de ajuste de que la muestra fue extraída de una población que se distribuye normalmente con $\mu = 2.500$ ms y $\sigma = 0.001$ ms.

Paso 1. La variable de interés es el tiempo de acceso.

Paso 2. H_0: $i = 1, 2, ..., 8$ (para todas las frecuencias).
H_1: $i = 1, 2, ..., 8$ (al menos una frecuencia es diferente).

Paso 3. $\alpha = 5\%$

Paso 4

$$\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

Paso 5. Obtenga los grados de libertad.

Como $\mu = 2.500$ y $\sigma = 0.001$, se especifican $gl = k - 3$ y $k = 6$[†].

Entonces, $\boxed{gl = 3}$

$k = 6$ debido a que en las categorías anteriores 1 y 8, $fo < 5$ se tiene que combinar, y se obtiene:

i	*LIR – LSR*	fo_i
1	Menos de 2.498	8
2	2.498 – 2.499	33
3	2.499 – 2.500	64
4	2.500 – 2.501	59
5	2.501 – 2.502	29
6	2.502 o más	7
		$\Sigma\, fo = 200$

Paso 6. Regla de decisión (RD).

$$\text{Si } \chi^2 \geq \chi^2_{(0.05,\ 3)}$$

$$\chi^2 \geq 7.81,\ H_0 \text{ se rechaza}$$

Paso 7. Calcule $\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$

Previamente se determina $fe = np$ y se obtiene la probabilidad P', mediante las tablas del área bajo la curva normal. Después de que se han calculado las puntuaciones z, por medio de $z = \frac{LSR - \mu}{\sigma}$ para cada una de las categorías se obtienen:

LIR – LSR	*fo*	*z*	*P'*
Menos de 2.498	8	–2.00	0.0228
2.498 – 2.499	33	–1.00	0.1359
2.499 – 2.500	64	0.00	0.3413
2.500 – 2.501	59	+1.00	0.3413
2.501 – 2.502	29	+2.00	0.1359
2.502 o más	7	+2.16	0.0228
	200		1.00

[†] Se restan 3 porque: 1) la suma de $p = 1$, 2) se estima μ y 3) se estima σ.

Se considera el área de la región más pequeña para los valores negativos de z y el área de la región más grande para los valores positivos.

Una vez obtenida P', se calcula $fe = np$ y la χ^2, y se comprueba $\Sigma\, fo = \Sigma\, fe = 200$

fe	$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$
5	1.80
27	1.33
68	0.24
68	1.19
27	0.15
5	0.80
200	5.51

$$\boxed{\chi_c^2 = 5.51}$$

Paso 8. *Regla de decisión.*
Si χ_c^2 (con un valor de 5.51) es mayor que 7.81, H_0 se rechaza. Como 5.51 no es mayor que 7.81, H_0 no se rechaza (H_1 se rechaza) con $\alpha = 5\%$.

Conclusión

La distribución probabilística de la muestra se distribuye de manera normal.

Kolmogorov-Smirnov (*K-S*)

Se trata de una prueba alternativa a la clásica de *ji*-cuadrada (χ^2) para la bondad de ajuste. Puede aplicarse a muestras pequeñas que requieran menos cálculos que la χ^2, pero mientras ésta se aplica tanto a variables continuas como discretas, la de Kolmogorov-Smirnov (*K-S*) únicamente procede para variables continuas.

En principio se supone que una población tiene una distribución determinada dividida en K intervalos de igual área o probabilidad. Posteriormente, se selecciona al azar una muestra de tamaño n de dicha población, tomando en cuenta el número de puntuaciones o mediciones correspondientes a cada intervalo K. Esto significa que la prueba *K-S* se utiliza para comparar frecuencias relativas acumuladas, observadas y esperadas, así como para contrastar la hipótesis nula de que los datos observados se han recopilado de una distribución de probabilidad determinada.

Esta prueba estadística muestra cuál es la máxima diferencia absoluta ($D_{máx}$) entre cualquier par correspondiente de frecuencias relativas acumuladas, observadas y esperadas.

■ Ejemplo 5

Un profesor de español aplica a su grupo de 25 alumnos una prueba estandarizada de gramática, en la que obtiene los siguientes resultados:

56	58	40	77	87
75	61	70	73	71
66	69	67	68	60
72	73	61	64	66
84	72	52	65	67

El objetivo de la prueba consiste en comparar los resultados del grupo con los estándares nacionales. El manual del examen señala que los deciles de las puntuaciones para alumnos de bachillerato son los siguientes:

Decil	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntuación	45.0	56.8	62.5	66.1	68.7	71.3	74.0	78.5	84.2

De esa manera, el profesor sabe que 10% de la población tiene puntuaciones menores que 45.0, que 20% de la misma los registra inferiores a 56.8, y así sucesivamente. Para determinar la bondad de ajuste, el profesor calcula la frecuencia relativa acumulada observada (*FRAo*) inferior a cada uno de los deciles. Por ejemplo, en la muestra se observa una puntuación de 40, que se encuentra en el primer decil (45.0); así, la *FRAo* es $\frac{1}{25} = 0.04$

En el rango inferior al segundo decil (56.8), se encuentran tres calificaciones (incluida la del primer decil). Entonces, la frecuencia relativa acumulada esperada (*FRAe*) en el intervalo inferior del segundo decil es 0.12, y así sucesivamente (todos los resultados se muestran en el cuadro 14.1). Esto se debe a que los deciles dividen la distribución de la población en 10 áreas iguales, cada una de 0.10.

El valor absoluto de la diferencia entre cada par de *FRA* (la observada y la esperada) se denota por *D* y se calcula como aparece en el cuadro antes indicado. De acuerdo con la estadística, si los datos de la muestra provienen de una población con la misma distribución, representada por la *FRA* (representada), entonces la *D* más grande ($D_{máx}$) tiene una distribución de muestreo conocida (véase el cuadro 14.1). En consecuencia, si los datos de la muestra se ajustan bien, la $D_{máx}$ será significativamente pequeña, mientras que si el ajuste es pobre, será significativamente grande. El cuadro 14.1 contiene valores de $D_{máx}$ para distintos tamaños de muestra (n) y diferentes grados de probabilidad de que $D_{máx}$ n sea menor que el valor de la tabla (P). En el ejercicio, $D_{máx} = 0.14$ y $n = 25$; si se utiliza un nivel de confianza de 0.05, la tabla muestra que la $D_{máx}$ debe ser mayor o igual a 0.264 para rechazar la hipótesis nula; o sea RD: si $D_{máx}$ (o) $\geq D_{máx}$ (e), entonces se rechaza H_0. Como $0.14 < 0.264$, no se rechaza la hipótesis nula.

Conclusión

La distribución muestral no difiere significativamente de la poblacional. La comparación de *FRA* para el ejemplo de la prueba de gramática es $D_{máx} = 0.14$

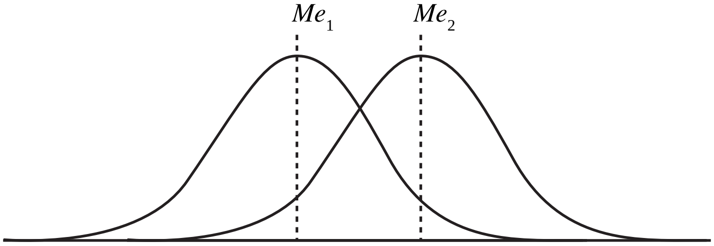
Cuadro 14.1

Deciles	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Total*
FRAo **(observada)**	0.04	0.12	0.28	0.44	0.56	0.68	0.84	0.92	0.96	1.0
FRAe **(esperada)**	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.0
D	0.06	0.08	0.02	0.04	0.06	0.08	0.14	0.12	0.06	0.00

PRUEBA DE LA *U* DE MANN-WHITNEY

Es posible emplear esta prueba como una alternativa de la paramétrica t de Student, para comprobar la diferencia entre dos medias en dos muestras independientes. Las puntuaciones que representan mediciones, observaciones o datos en general, deben ser mutuamente independientes dentro de la misma muestra a la que pertenecen respecto de otra; no es necesario que sean del mismo tamaño, pero sí se requiere que las variables que representan a dichas puntuaciones sean continuas. El uso de esta prueba se considera cuando las muestras son pequeñas y los requisitos de uso para la t resultan dudosos. La hipótesis nula establece la analogía (homogeneidad) de distribuciones poblacionales y, en cierta manera, la igualdad de las dos medias o medianas. No obstante, si el par de distribuciones poblacionales son más o menos similares, tanto en forma como en variabilidad, la U es una prueba excelente de la tendencia central. Pero debido a que la prueba se basa en categorías o clases, la medida de tendencia central más adecuada es la *mediana* (Me). Entonces, cuando se consideran los resultados de dicha prueba, lo primero en que se piensa es la comparación de ambas medianas.

Suponga que hay dos grupos cuyas distribuciones se sobreponen, como se muestra en la siguiente figura:



Una vez jerarquizadas las puntuaciones combinadas de las distribuciones anteriores, asignando el rango 1 (uno) a la puntuación más baja y el rango más alto a la puntuación $n_x + n_y$, se obtienen a continuación la suma de las puntuaciones tanto de la distribución x como de la y. En este caso particular, la diferencia entre ambas sumas es pequeña. Por consiguiente, la prueba de la U de Mann-Whitney se basa en esta diferencia. Se deduce de la probabilidad de obtener una suma de categorías de una distribución que difiere de la suma de rangos esperada conforme la hipótesis de igualdad de las dos distribuciones.

■ Ejemplo 6

En dos grupos de estudiantes, cada profesor aplica una prueba de comprensión de lectura, después de haber entrenado a los alumnos en dos técnicas diferentes. El tamaño de los grupos es distinto, $n_1 = 14$ y $n_2 = 13$, y los resultados obtenidos son los siguientes:

Grupo I	Grupo II
54	
50	45
48	40
47	32
46	30
45	30
43	30
42	29
38	28
26	28
25	38
22	31
21	28
26	27
$n_1 = 14$	$n_2 = 13$

Paso 1. Se etiquetan los dos grupos *x* y *y*; si uno contiene menos casos que el otro, debe llamarse *x*.

Paso 2. Se ordenan en forma creciente o decreciente las puntuaciones en una sola distribución de $n_x + n_y$ casos, jerarquizándolos a continuación. Se asigna el intervalo 1 a la puntuación menor, 2 al que sigue en forma creciente, y así sucesivamente hasta el caso $n_x + n_y$. Si hay empate se obtiene el promedio de los rangos que tocan a los valores empatados y a todos se les asigna dicho promedio.

y Grupo I	x Grupo II	R_y	R_x
54		27	
50	45	26	21.5
48	40	25	18
47	38	24	16.5
46	32	23	15
45	31	21.5	14
43	30	20	12

(*continúa*)

(*continuación*)

42	30	19	12
38	30	16.5	12
26	29	4.5	10
26	28	4.5	8
25	28	3	8
22	28	2	8
21	27	1	6
$n_y = 14$	$n_x = 13$	$\Sigma R_y = 217$	$\Sigma R_x = 161$

Paso 3. Se comprueba si no se cometió algún error. Aplicando:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum R_x + \sum R_y$$

donde $n = n_x + n_y = 13 + 14 = 27$; al sustituir los valores, se tiene:

$$\frac{27(28)}{2} = 161 + 217$$

$$\boxed{\therefore 378 = 378}$$

Paso 4. Se calcula la suma de los rangos de la distribución x, o sea ΣR_x.

Paso 5. Localice en la tabla el apéndice de la U de Mann-Whitney el renglón y la columna que corresponden tanto a $n_x = 13$, como a $n_y = 14$. Ése es el valor crítico de R_x para probabilidades de 0.005, 0.01, 0.025 y 0.05 unidireccionales (una cola), para valores tanto de n_x como n_y, que van desde tres a 15.

Paso 6. Aplique uno de los tres siguientes criterios, según la hipótesis alternativa que haya establecido:

a) H_1: $x \neq y$. Encuentre un par de números correspondientes a la columna de $\frac{\alpha}{2}$ (si $\alpha = 0.05$, utilice la columna de 0.025). Rechace H_0 si ΣR_x es igual o menor que el número más pequeño o también si es igual o mayor que el número más grande.

b) H_1: $x < y$. Encuentre un par de números correspondiente a la columna de α (si $\alpha = 0.05$, entonces use esa misma columna). Rechace H_0 si ΣR_{x} igual o menor que el número más pequeño.

c) H_1: $x \geq y$. Encuentre el par de números correspondiente a la columna de α (si $\alpha = 0.05$), utilice esa misma columna). Rechace H_0 si ΣR_x es igual o superior al número más grande.

Paso 7. En este problema, para ejemplificar los tres criterios anteriores, se establecerán tanto la hipótesis nula como la alterna para a), b) y c), con $\alpha = 0.05$.

a) 141 y 213
H_0: $x = y$
H_1: $x \neq y$

Como $\Sigma R_x = 161$ no es menor o igual que 141, ni mayor o igual que 213; entonces no se rechaza H_0.

b) H_0: $x \geq y$
H_1: $x < y$
$\alpha = 0.05$, (147, 217)
$\Sigma R_x = 161$

Como R_x no es igual ni menor que 147, entonces no rechazar H_0.

c) H_0: $x \leq y$
H_1: $x > y$
$\alpha = 0.05$, (147, 217)

ΣR_x no es igual ni menor que 217, entonces no se rechaza H_0.

Conclusión

Las dos distribuciones poblacionales son análogas.

Requisitos de uso de la U *de Mann-Whitney*

Los requisitos básicos para esta prueba son que la obtención de las muestras que representan a cada una de las poblaciones haya sido aleatoria y que no existan empates en los intervalos jerarquizados, aunque un número moderado de ellos no altera el resultado.

Prueba U *de Mann-Whitney para muestras grandes*

Dado el teorema central del límite, una muestra grande tiende a distribuirse en forma normal, por lo que podrá utilizar el estadístico Z, definido por ΣR_x y n_x, n_y, y un factor de corrección (0.5):

$$Z = \frac{\Sigma R_x - 0.5\left[n_x\left(n_x + n_y + 1\right)\right]}{\sqrt{\dfrac{n_x n_y\left(n_x + n_y + 1\right)}{12}}}$$

- Valores positivos de Z implican que $x > y$.
- Valores negativos de Z implican que $x < y$.

Para propósitos de demostración, se aplicará esta fórmula con los datos del ejemplo anterior:

Datos:
$nx = 13$.
$ny = 14$.
$\Sigma Rx = 161$.

Al sustituir, resulta:

$$Z_c = \frac{161 - 0.5\left[13\left(13 + 14 + 1\right)\right]}{\sqrt{\dfrac{13 \times 14\left(13 + 14 + 1\right)}{12}}}$$

$$Z_c = \frac{161 - 0.5\left[364\right]}{\sqrt{\dfrac{182\left(28\right)}{12}}} = \frac{161 - 182}{\sqrt{424.6}} = \frac{-21}{20.61}$$

$$\boxed{\therefore\ Z_c = -1.02}$$

RD: Puesto que $Z_{0.05} = \pm 1.96$, si $Z_c \geq Z_{0.05}$, entonces se rechaza H_0; o también si $-Z_c \leq Z_{0.05}$. Como –1.02 no es menor que –1.96, no se rechaza H_0.

Conclusión

Las dos distribuciones poblacionales son análogas.

■ Ejemplo 7

A dos grupos de sujetos, $n_x = 23$ (fumadores de mariguana) y $n_y = 24$ (no fumadores de mariguana), se les aplica una prueba que mide las habilidades en la conducción de automóviles (hábitos de conducir, velocidad, estado de alerta, entre otras), y que arroja los siguientes resultados. Compruebe si existen diferencias significativas entre ambos grupos.

x **Grupo I**	*y* **Grupo II**
	42
37	41
35	41
35	40
34	39
34	38
30	37
29	37
28	36
27	35
27	35

(*continúa*)

(*continuación*)

26	33
25	32
25	32
24	31
23	30
22	29
21	28
20	27
19	26
19	25
18	24
14	22
14	20
$n_x = 23$	$n_y = 24$

Paso 1. Se jerarquizan las puntuaciones en una sola distribución, después se separan en las dos originales y se obtiene la suma de los rangos de cada una de ellas, o sea, $\Sigma R_{\hat{x}}$ y $\Sigma R_{\hat{y}}$

R_x	R_y
	47.0
40.0	45.5
37.5	45.5
35.0	44.0
33.0	43.0
28.5	42.0
26.5	40.0
24.5	40.0
22.5	37.5
20.0	35.0
20.0	35.0
17.5	32.0
15.0	30.5

(*continúa*)

(continuación)

15.0	30.5
12.5	28.5
11.0	26.5
9.5	24.5
8.0	22.5
7.0	20.0
5.5	17.5
5.5	15.0
3.5	12.5
1.5	9.5
1.5	3.5
$\Sigma R_x = 400.5$	$\Sigma R_y = 727.5$

Paso 2. Como es una muestra grande:

$n_x = 23$
$n_y = 24$
$\Sigma R_x = 400.5$

Paso 3. Se aplica

$$Z_c = \frac{\sum R_x - 0.5\left[n_x\left(n_x + n_y + 1\right)\right]}{\sqrt{\frac{n_x n_y\left(n_x + n_y + 1\right)}{12}}}$$

$$Z_c = \frac{400.5 - 0.5\left[23\left(23 + 24 + 1\right)\right]}{\sqrt{\frac{23 \times 24\left(23 + 24 + 1\right)}{12}}}$$

$$Z_c = \frac{400.5 - 552}{\sqrt{2208}} = \frac{-151.5}{47} = -3.22$$

$$\boxed{\therefore\ Z_c = -3.22}$$

Paso 4. Regla de decisión
Si $Z_c \le Z_{0.01}$, entonces H_0 se rechaza o también si $|Z_c| \ge Z_{0.01}$

como $-3.22 < -2.58$ H_0 se rechaza
o $|3.22| > 2.58$ H_0 se rechaza

Ji-cuadrada de dos proporciones binomiales

Este enfoque requiere una tabla de contingencia de 2 × 2 (dos renglones por dos columnas) de una sola población, donde se ubiquen dos grupos: casos y controles; con una característica establecida de antemano (por ejemplo, diagnóstico de cáncer, enfisema, esquizofrenia, etc.) y, en la otra variable alguna característica posiblemente asociada con el diagnóstico previo (alcoholismo, vacuna, escolaridad, género, etc.). Esta tabla de contingencia es la de frecuencias observadas (*fo*) y para probar la significancia estadística, se comparan dichas frecuencias, con las esperadas (*fe*)[†], buscando una posible relación (asociación) entre las dos variables ubicadas en los renglones y columnas, respectivamente.

Las hipótesis a contrastar son las siguientes:

H_0: $\pi_1 = \pi_2$
H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$

Las frecuencias esperadas se obtienen multiplicando el total marginal de casos de un renglón por el total marginal de casos de una columna donde está ubicada dicha casilla o celda; esta operación debe realizarse para cada una de éstas. Una vez obtenidas la frecuencia observada (*fo*) y la esperada (*fe*), se aplica el estadístico (prueba) de *ji*-cuadrada, utilizando la corrección de Yates, que consiste en restarle 0.5 a la diferencia de *fo* y *fe* en valor absoluto a cada casilla

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(|fo_{ij} - fe_{ij}| - 0.5\right)^2}{fe_{ij}}$$

En un lenguaje coloquial es:

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(|fo - fe| - 0.5\right)^2}{fe}$$

Existe una relación entre la χ^2 y la prueba de dos proporciones muestrales binomiales es equivalente a la prueba.

$$Z = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

donde:

$$\hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1}$$

[†] Bajo la hipótesis nula de que no hay asociación o hay independencia entre los criterios de renglones y columnas.

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{P}$$

Se tiene que $Z^2 = \chi^2$ sin factor de corrección.

■ Ejemplo 8

Se hace una encuesta a 1000 personas en un centro hospitalario, donde 550 padecen enfisema pulmonar (casos) y 450 no la padecen, en este ejemplo, las proporciones indican prevalencia, debido a que a los sujetos se les pregunta acerca del tiempo de fumar y de padecer el enfisema. De los 550 pacientes con enfisema, 400 han sido fumadores por más de 5 años y de los que no la padecen (control), 275 también han sido fumadores, lo que da un total de 675 fumadores y 325 no fumadores. Ubicando esta información en una tabla de contingencia, se tiene:

	Fumadores		
	Sí	*No*	Total
Casos	400 371	150 179	550
Controles	275 304	175 146	450
	675	325	1000

Como ésta es la frecuencia observada, se calcula la esperada para cada casilla:

$$fe_{11} = \frac{550 \times 675}{1000} = 371 \qquad fe_{22} = \frac{450 \times 325}{1000} = 146$$

$$fe_{12} = \frac{550 \times 325}{100} = 179$$

$$fe_{21} = \frac{475 \times 675}{1000} = 304$$

Se comprueba que

$$\sum fo = \sum fe = 1000$$

Se calcula χ^2

$$\chi_2 = \frac{(|400 - 371|)^2}{371} + \frac{(|150 - 179|)^2}{179} +$$

$$\frac{(|275 - 304|)^2}{304} + \frac{(|175 - 146|)^2}{146} =$$

$$2.27 + 4.70 + 2.77 + 5.77$$

$$\boxed{\chi^2 = 15.51}^{\dagger}$$

Como las hipótesis son:

H_0: $\pi_1 = \pi_2$
H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$
y el nivel de significancia es $\alpha = 5\%$, entonces $\chi^2_{gl,\,\alpha} = \chi^2_{1,\,0.05} = 3.84$

La regla de decisión es: si la χ^2 calculada, en este caso $\chi^2 = 15.51$, es mayor que 3.84, H_0 se rechaza. Como 15.51 >> 3.84, H_0 se rechaza para $\alpha = 5\%$.

Conclusión

Existe diferencia estadísticamente significativa entre la proporción de fumadores y no fumadores con enfisema pulmonar. Este mismo ejemplo sirve para aplicar Z:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}{n_1} + \dfrac{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}{n_2}}}$$

donde:
x_1 = 400 fumadores de 550 casos
x_2 = 275 fumadores de 450 controles
y_1 = 550
y_2 = 450

	Fumadores		
	Sí	***No***	***Total***
Casos	400	150	550
Controles	275	175	450
	675	325	1000

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{400}{550} = 0.73$$

---

† Utilizando la corrección de Yates $\chi^2 = 14.7$.

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{275}{450} = 0.6$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_2 + n_2} = \frac{400 + 275}{550 + 450} = \frac{400 + 275}{1000} + \frac{675}{1000} = 0.675$$

Sustituyendo

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_2}}} = \frac{0.73 - 0.61}{\sqrt{\frac{0.675 \times 0.325}{550} + \frac{0.675 \times 0.325}{450}}} =$$

$$Z = \frac{0.12}{\sqrt{0.0004 + 0.0005}} = \frac{0.12}{0.03} = 4.0$$

$$\boxed{Z = 4.0}$$

Regla de decisión

Si $Z_c > Z$ tablas, H_0 se rechaza

$$H_0\colon \pi_1 = \pi_2$$
$$H_1\colon \pi_1 \neq \pi_2$$
$$\alpha = 5\%$$

$$Z_{0.025} = 1.96$$

Como $Z_c = 4$ es mayor que 1.96, H_0 se rechaza para un $\alpha = 5\%$ Esta igualdad se cumple.

$$Z^2 = \chi^2 \qquad (4)^2 = 15.51$$

Sin corrección de Yates es exacta la igualdad.

Conclusión

La proporción de casos de fumadores con enfisema y (0.73) es mayor que la de los fumadores sin enfisema (0.61).

Esta diferencia es estadísticamente significativa.

PRUEBA DE RANGOS CON SIGNOS EN PARES DE WILCOXON

Esta prueba se utiliza para contrastar dos muestras dependientes o relacionadas.

Se obtienen las diferencias absolutas, restando la puntuación del grupo 1 con la correspondiente al grupo 2 para cada uno de los sujetos. Cuando se realiza en una sola muestra, la diferencia es de la puntuación antes menos la de después (antes-después). Se ordenan dichas diferencias; a la mínima se le asigna el primer lugar y a la máxima el último. Cuando se obtienen dos o más diferencias iguales, se promedian sus rangos (denominados *empates*). En el momento en que ya están jerarquizadas las diferencias, se les adjudica su signo algebraico (+ o –), y se obtienen sus sumas ΣR_+ y ΣR_-. Si se cumple $\Sigma R_+ = \Sigma R_-$ y, además, es igual a $\frac{n\,(n\,+\,1)}{2}$, la jerarquización se ha realizado correctamente.

El valor menor de ΣR_+ o ΣR_- se compara con el valor crítico de la tabla correspondiente, con la siguiente regla de decisión:

Si $\Sigma R_{i\ mín} \leq$ valor tablas, H_0 se rechaza.

Otro método es el siguiente: cuando $n > 8$, se utiliza la aproximación normal.

$$Z = \frac{\sum R_i - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$$

donde: μ_ω y σ_ω se obtienen aplicando:

$$\sigma_\omega = \sqrt{\frac{n\,(n\,+\,1)(2\,n\,+\,1)}{24}},\quad \mu_\omega = \frac{n\,(n\,+\,1)}{4}\quad \text{y}\quad Z = \frac{\sum R_{i\ mín} - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$$

$\Sigma\ R_i$ = suma del rango + o –
μ_ω = media aritmética de los rangos
σ_ω = desviación estándar de los rangos

Los pasos que se deben seguir son los siguientes:

Paso 1. Se identifica la variable de interés (x). Si no se distribuye en forma normal (no cumple los requisitos para utilizar una prueba paramétrica tal como la de *Sandler* o *t* de Student para muestras dependientes o una sola muestra medida dos veces), se utilizará una prueba no paramétrica.

Paso 2. Se proponen las hipótesis nulas y sus correspondientes alternativas:

H_0: $x_1 = x_2$
H_1:
a) $x_1 > x_2$
b) $x_1 < x_2$
c) $x_1 \neq x_2$

Al emplear los rangos:
H_0: $\Sigma\ R_+ = \Sigma\ R_-$
H_1:
a) $\Sigma\ R_+ > \Sigma\ R_-$
b) $\Sigma\ R_+ < \Sigma\ R_-$
c) $\Sigma\ R_+ \neq \Sigma\ R_-$

Paso 3. Se establece el nivel de significancia: 5% o 1%, ...

Paso 4. Si se cumplen los requisitos, se utiliza la prueba no paramétrica con rangos de signos en pares de Wilcoxon.

a) Si $n > 8$, se empleará: $Z = \frac{\sum R_i - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$

b) Si $n < 8$, se empleará: $\Sigma\ R_i = \frac{n\,(n\,+\,1)}{2}$

Paso 5. Consultar la tabla (Z) “Área bajo la curva normal” del apéndice según sea el caso, para establecer la región crítica de rechazo de H_0.

Paso 6. Si $n < 8$, la regla de decisión es la siguiente:
Se compara el valor absoluto de la menor suma de rangos $\Sigma R_{i\ mín}$, con el valor crítico (tabla correspondiente).
Si $\Sigma\ R_{i\ mín} \leq$ valor tabla, entonces H_0 se rechaza.

Paso 7. Sustituir los valores y calcular $\Sigma R_{i\ mín}$ o Z, según sea el tamaño de n.

Paso 8. Obtener conclusiones.

■ Ejemplo 9

En una institución educativa se seleccionan al azar los estudiantes del mismo grado escolar que obtuvieron igual promedio de calificaciones en matemáticas. De este grupo, se forman n pares de estudiantes y se ubican en forma aleatoria en dos grupos, a quienes se enseñará un tema nuevo de matemáticas con el método A y con el B, respectivamente. Al evaluar el aprendizaje del tema se obtienen las puntuaciones siguientes:

Método		
Par	***A***	***B***
1	20	25
2	26	29
3	31	28
4	42	37
5	35	40
6	19	29
7	33	41
8	38	43
9	29	21
10	27	35
11	40	47
12	37	41

Paso 1. No se tienen bases para considerar que las puntuaciones que miden el aprendizaje de un tema específico se distribuyen de manera normal. Por ese motivo, se utilizará la prueba no paramétrica de rangos con signos en pares de Wilcoxon.

Paso 2. H_0: $\Sigma\ R_+ = \Sigma\ R_-$
H_1: $\Sigma\ R_+ \neq \Sigma\ R_-$

o sea,

H_0: No existe diferencia en el aprendizaje de este tema de matemáticas con el método A y el B.

H_1: H_0 es falsa.

o sea

H_0: No existe diferencia en el aprendizaje de este tema de matemáticas con los métodos *A* y *B*.

H_1: H_0 es falsa.

Paso 3. $\alpha = 5\%$

Paso 4. Como $n > 8$ ($n = 12$ pares), se utilizará:

(1) $\sum R_i = \frac{n\,(n+1)}{2}$; para fines didácticos, también se utilizará

(2) $Z = \frac{\sum R_{i\,mín} - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$

Paso 5. Para (1) $R\,(n, \alpha) = R_{(12,\,0.05)} = 14$ y para (2) $|Z_{0.025}| = 1.96$

Paso 6. Regla de decisión (RD) para:

(1) Si $\Sigma R_i < 14$, H_0 se rechaza.

(2) Si $|Z| \geq 1.96$, H_0 se rechaza.

Paso 7. Para (1):

a) Se obtienen las diferencias de las puntuaciones de los métodos *A* y *B*.
b) Se jerarquizan dichas diferencias, para lo cual se considera su valor absoluto, pero se conserva su signo original en los rangos obtenidos.
c) Se obtienen ΣR_+ y ΣR_-
d) Se calcula $\frac{n\,(n+1)}{2}$

Para (2): se calculan μ_ω, σ_ω y Z

$$\sigma_\omega = \sqrt{\frac{n\,(n+1)(2\,n+1)}{24}}, \quad \mu_\omega = \frac{n\,(n+1)}{4} \quad \text{y} \quad Z = \frac{\sum R_{i\,\text{mín}} - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$$

donde $\Sigma R_{i\,mín}$ puede ser ΣR_+ o ΣR_-, y se obtiene para a) y b)

	Método			
Par	***A***	***B***	***Diferencia***	***Rango***
1	20	25	–5	–5.5
2	26	29	–3	–1.5[i]
3	31	28	3	1.5[i]
4	42	37	5	5.5
5	35	40	–5	–5.5
6	19	29	–10	–12.0
7	33	41	–8	–10.0
8	38	43	–5	–5.5
9	29	21	8	10.0
10	27	35	–8	–10.0
11	40	47	–7	–8.0
12	37	41	–4	–3.0

[i] La diferencia absoluta es 3 en ambos casos, y es la mínima. Por eso, les corresponde el rango 1 y 2; al promediar estos valores, se tiene $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1.5$ y se les antepone el signo correspondiente.

e) Se obtienen:

$$\Sigma R_{-} = 61 \text{ y}$$

$$\Sigma R_{+} = 17$$

Paso 8

Caso 1

Aplicar la regla de decisión para el valor más pequeño de ΣR_{+} o ΣR_{-} de la siguiente manera: como $\Sigma R_{i\ mín} = 17$ y $17 > 14$, H_0 no se rechaza.

Caso 2

Como $n = 12$ ($n > 8$), se puede aplicar la aproximación Z, por lo que:

$$\mu_{\omega} = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{12 \times 13}{4} = 39$$

$$\mu_{\omega} = 39$$

$$\sigma_{\omega} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} = \sqrt{\frac{12 \times 13 \times 25}{24}} = \sqrt{162.5}$$

$$\boxed{\sigma_{\omega} = 12.74755}$$

Sustituyendo en $Z = \dfrac{\sum R_i - \mu_\omega}{\sigma_\omega}$

Si utiliza $\Sigma R_- = 61$: $Z = \dfrac{61 - 39}{12.74755} = 1.72582$

Si utiliza $\Sigma R_+ = 17$: $Z = \dfrac{17 - 39}{12.74755} = -1.72582$

Caso 3

Si $|Z_c| \geq Z_{0.025}$, H_0 se rechaza.

Como $\alpha = 5\%$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$, así $Z = 1.72582$

$1.72582 < 1.96$, H_0 no se rechaza.

En los resultados obtenidos al aplicar tanto el caso 1 como el 2, H_1 se rechaza (H_0, no).

Conclusión

Los métodos de enseñanza *A* y *B* conducen al mismo resultado; no existe diferencia estadísticamente significativa entre ambos.

PRUEBA DE LA MEDIANA

Cuando es necesario comparar dos o más poblaciones independientes y dado que no hay normalidad no es posible utilizar las medias aritméticas, existe la opción de emplear la mediana, otra medida de tendencia central sobre todo con distribuciones asimétricas.

A fin de aplicar esta prueba, que contrastaría la hipótesis nula de que la mediana poblacional es la misma para todas las poblaciones que intervienen, resulta indispensable que dichas poblaciones tengan una distribución continua y que las muestras que las representan se hayan seleccionado de manera aleatoria.

Al aplicar los ocho pasos, resulta:

Paso 1. Se agrupan los datos de los *k* grupos en uno solo y se calcula la mediana (*Me*).

Paso 2. Se proponen las siguientes hipótesis:

H_0: $Me_1 = Me_2 = ... = Me_k = Me_0$
H_1: Al menos dos poblaciones tienen mediana diferente.

Paso 3. Se establece el valor de α.

Paso 4. Una vez obtenida la mediana, la frecuencia de los datos se expone en una tabla de contingencia de la siguiente manera:

	Muestras (k)				Total
Datos menores o iguales a la *Me*	$f_{o_{11}}$	$f_{o_{11}}$	...	$f_{o_{1k}}$	a
Datos mayores que la *Me*	$f_{o_{21}}$	f_{o22}	...	$f_{o_{2k}}$	b
Total	n_1	n_2	...	n_k	N

Se aplica el modelo estadístico χ^2

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_{oi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$$

donde $f_{ei} = \dfrac{n_i}{2}$

Paso 5. Se obtienen los grados de libertad, considerando el número de renglones y de columnas de la tabla de contingencia, y se lee el valor crítico de χ^2, según α y gl.

Paso 6. Se considera la siguiente regla de decisión: si $\chi^2_{calc} \geq \chi^2\ (\alpha, gl)$, entonces H_0 se rechaza.

Paso 7. Se calcula el valor de χ^2.

Paso 8. Si no se rechaza H_0, entonces las poblaciones anteriores tienen la misma mediana.

Cuando son dos poblaciones, en el paso 4 puede utilizarse el siguiente modelo:

$$\chi^2 = \frac{N\left[|ad - bc| - \dfrac{N}{2}\right]^2}{klmn^{\dagger}}$$

El correspondiente cuadro de contingencia sería el siguiente:

	Población		
	1	2	*Total*
Mayor o igual a la *Me*	a	b	k
Menor que la *Me*	c	d	l
Total	m	n	N

■ Ejemplo 10

A dos grupos de estudiantes de la misma escuela y grado (referidos como $n_1 = 20$ y $n_2 = 17$), se les enseña una técnica odontológica con dos métodos diferentes (I y II). Ambos grupos se evalúan y se obtienen las siguientes puntuaciones:

[†] Donde k, l, m, n son los totales marginales.

n_1 **Método I**	n_2 **Método II**
48 27	54 36
47 27	32
46 26	50 30
46 25	48 25
44 24	47 25
40 18	46 22
38 18	45 20
32 16	45 14
30 12	43 42
28 10	$n_2 = 17$
$n_1 = 20$	

Paso 1. Se combinan todas las puntuaciones en una sola distribución y se ordenan en forma creciente o decreciente.

$$n = n_1 + n_2 = 20 + 17 = 37$$

Paso 2. Se calcula la mediana a través de la fórmula de datos no agrupados (véase el capítulo 2). En el ejemplo: $Me = 32$.

Paso 3. Para cada distribución (métodos I y II), se cuentan los casos que se sitúan en el rango superior e inferior de la mediana, y se presentan los valores en un cuadro de contingencia.

	Método I	**Método II**	**Total**
Arriba de la mediana	8 (*a*)	11 (*b*)	19
Debajo de la mediana	12 (*c*)	6 (*d*)	18
	20	17	37

Paso 4. Se calcula χ_c^2 mediante la siguiente fórmula:

$$\chi_c^2 = \frac{n\left[\,|ad - bc| - 0.5\right]^2}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}$$

$$= \frac{37\left[\,|(8)(6) - (11)(12)| - 0.5\right]^2}{(19)(20)(17)(18)}$$

$$= \frac{37\left[\,|48 - 132| - 0.5\right]^2}{116\ 280} = \frac{257\,973.25}{116\ 280} = 2.22$$

$$\boxed{\therefore \chi_c^2 = 2.22}$$

Paso 5. Se compara este valor con el observado en la tabla de χ^2 con $gl = 1$, y a un nivel de significación de 5%. Como $2.22 < 3.841$, se rechaza la hipótesis alternativa en el sentido de que las dos medianas provienen de poblaciones diferentes.

Conclusión

Como la χ^2 no es significativa (ni siquiera en el nivel de 10%, donde $\chi_t^2 = 2.706$, no se rechaza la hipótesis de que las medianas proceden de la misma población. En otros términos, ambos métodos de enseñanza son iguales. Esta prueba puede aplicarse a más de dos grupos al utilizar tablas de contingencia de tipo 2 × 2.

Cuando el número de frecuencias esperadas es pequeño (menor que 2), no es conveniente utilizar la χ^2, sino la prueba exacta de Fisher. Es necesario considerar que la potencia de la prueba de la mediana es baja, por lo que se desarrolla una prueba más potente.

PRUEBA DE KRUSKAL-WALLIS (*H*)

Cuando se desea comparar más de dos grupos independientes se utiliza una extensión de la *U* de Mann-Whitney: el análisis de varianza en una dirección de Kruskal-Wallis. Este procedimiento es la contraparte no paramétrica de la prueba *F* (análisis de varianza paramétrico), la cual, aunque muy sólida, presenta muchas dificultades para llevarla a la práctica cuando las condiciones de aplicación no se cumplen en su totalidad. Por eso, si no se cumplen los requisitos de aplicación para dicha prueba, la alternativa más adecuada es la prueba *H*. Los requisitos básicos para aplicarla son:

1. La variable dependiente es numérica por naturaleza.
2. La variable dependiente está distribuida continuamente.
3. Hay legitimidad en la independencia de las mediciones (tanto los métodos no paramétricos como los paramétricos son sensibles a la violación de este último requisito).

En el supuesto de que todos los requisitos se cumplen y el investigador quiere contrastar la hipótesis nula que establece que las *n* muestras provienen de una misma población, se demuestra que, si la prueba *H* proviene de la misma población, sigue el modelo (*ji*-cuadrada) de χ^2 con $gl = k - 1$. La prueba de Kruskal-Wallis se aplica a un diseño completamente aleatorizado, debido a que las unidades experimentales son asignadas únicamente en forma completamente aleatoria a los *k* tratamientos.

■ Ejemplo 11

Cuatro grupos de estudiantes de secundaria del mismo grado académico, cursan matemáticas con diferente profesor y tienen un promedio alto de calificación en la materia (por lo que las muestras no necesariamente deben ser del mismo tamaño: $n_1 = 5$, $n_2 = 7$, $n_3 = 7$ y $n_4 = 10$). A dichos grupos se les aplica una prueba psicológica de aptitudes con respecto al aprendizaje de las matemáticas, cuyos resultados son los siguientes:

n_1	n_2	n_3	n_4
12	14	18	14
8	12	15	13
6	12	12	12
4	9	10	12
2	7	8	7
	6	8	6
	2	7	6
			5
			3
			1

Para comprobar las hipótesis:
H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$. Provienen de la misma población.[†]
H_1: al menos una μ es diferente (H_0 falsa). Provienen de poblaciones diferentes.
Así, se efectuarán los siguientes pasos:

Paso 1. Se jerarquizan todos los datos dentro de una sola distribución, y se asigna a la puntuación más baja el rango de 1; después, se ubican de nuevo los valores jerarquizados en sus respectivos grupos y se suman los rangos en cada grupo.

Rangos			
R_1	R_2	R_3	R_4
21.5	26.5	29.0	26.5
15.0	21.5	28.0	25.0
8.5	21.5	21.5	21.5
5.0	17.0	18.0	21.5
2.5	12.0	15.0	12.0
$\Sigma R_1 = 52.5$	8.1	15.0	8.5
	2.5	12.0	8.5
	$\Sigma R_2 = 109.5$	12.0	6.0
		$\Sigma R_3 = 138.5$	4.0
			1.0
			$\Sigma R_4 = 134.5$

Paso 2. Se aplica la siguiente fórmula:

$$H = \frac{12}{n\,(n+1)}\left[\frac{\sum R_j^2}{n_k}\right] - 3(n+1)$$

donde:

$\sum R_j^2$ = suma de los rangos de cada grupo, elevados al cuadrado

n_k = número de mediciones (elementos) de cada grupo

[†] Algunos autores consideran la comparación entre las medianas de las poblaciones.

n = suma total de n grupos
12 = constante
3 = constante
En el ejemplo los datos son:
$n_1 = 5$, $n_2 = 7$, $n_3 = 7$, $n_4 = 10$, $\therefore\ n = 29$

Al sustituir los resultados de los pasos 1 y 2 en la fórmula, se tiene:

$$H = \frac{12}{29(29 + 1)}\left[\frac{(52.5)^2}{5} + \frac{(109.5)^2}{7} + \frac{(138.5)^2}{7} + \frac{(134.5)^2}{10}\right] - 3(30)$$

$$H = \frac{12}{870}\left[\frac{2\ 756.25}{5} + \frac{11\ 990.25}{7} + \frac{19\ 182.25}{7} + \frac{18\ 090.2}{10}\right] - 90$$

$$H = 0.01379\ [551.25 + 1\,712.8 + 2\,740.3 + 1\,809.0] - 90$$

$$H = 0.01379\ [6813.485] - 90;$$

$$H_c = 93.9579 - 90 = 3.9579;\ H_c = 3.9579$$

Paso 3. Se interpreta H como una *ji*-cuadrada (χ^2), con grados de libertad iguales al número de muestras menos 1 ($gl = k - 1$). Como $gl = 3$, a un nivel de confianza de 5%, se observa que $\chi^2_{3,\ (0.05)} = 7815.$

RD: Si $H_c \geq \chi^2_{(gl,\ \alpha)}$, se rechaza H_0.

Como $3.9579 < 7.815$, *no* se rechaza H_0 y los grupos de estudiantes provienen de la misma población (no hay diferencia estadísticamente significativa en las medias aritméticas).

■ Ejemplo 12

Suponga que se estudiarán tres tipos de estilos (A, B y C) por medio de su elección y que la calificación de ésta es la que se registra en la siguiente tabla. Las diferencias se examinarán de acuerdo con $\alpha = 0.01$.

Tipos de estilo					
A		***B***		***C***	
Calif.	*Rango*	*Calif.*	*Rango*	*Calif.*	*Rango*
22	3	26	8	23	4
24	5	36	16	30	12
21	2	37	10	29	11
17	1	37	17	26	8
26	8	33	15	31	13
25	6	32	14		
$n_i = 6\ \ \Sigma R_i = 25$		$n_i = 6\ \ \Sigma R_i = 80$		$n_i = 5\ \ \Sigma R_i = 48$	

$$\Sigma\, R = 25 + 80 + 48 = 153$$

$$\Sigma\, R = \frac{\Sigma n_i(\Sigma n_i + 1)}{2} = \frac{17(17+1)}{2} = 153$$

$$H_c \;=\; \frac{12}{\sum n_i(\sum n_i \;+\; 1)}\left[\frac{\sum R_1^2}{n_i} \;+\; \frac{\sum R_2^2}{n_2} \;+ \frac{\sum R_3^2}{n_3}\right] - 3\left(\sum n_i + 1\right)$$

$$\frac{12}{17(17 \;+\; 1)}\left[\frac{(25)^2}{6} \;+\; \frac{(80)^2}{6} \;+\; \frac{(48)^2}{5}\right] - 3(18)$$

$$= 0.0392\ [1631.63] - 54$$

$$\boxed{H_c = 9.96}$$

$gl = k - 1 = 3 - 1 = 2$ $\chi_c^2 = 9.21$, o sea $\chi^2\,(2, 0.01) = 9.21$. Si $H_c > \chi_c^2$, rechazar H_0; como $9.96 > 9.21$, H_0 se rechaza al 1%.

PRUEBA DE FRIEDMAN

Este análisis de varianza no paramétrico es una extensión de la prueba no paramétrica con rangos de signos en pares (o pareados), de Wilcoxon, que se utiliza cuando se comparan dos muestras dependientes, correlacionadas, o una sola muestra medida dos veces. A la prueba de Friedman también se le conoce como *de dos direcciones por rangos*.

El término *dos direcciones* se refiere a los niveles del factor tratamiento (k) y a las situaciones diferentes a las que se someten los sujetos. Esta prueba es un diseño de bloques aleatorios, donde las kn unidades experimentales pueden dividirse en n grupos homogéneos (bloques), y cada bloque contiene k unidades; entonces $N = kn$.

Existen dos situaciones en las que se aplica esta prueba:

1. Para una misma muestra medida más de dos veces.
2. En una sola medición de más de dos muestras dependientes o correlacionadas.

En el caso 1, k significa el número de tratamientos o las diferentes situaciones en las que miden a los sujetos, mientras que en el 2, k es el número de muestras o grupos correlacionados que participan en el estudio.

En el caso 1, cada sujeto sirve como su propio control, incrementando la posibilidad de observación de las diferencias significativas entre los distintos tratamientos; por ello, la hipótesis nula se plantea así:

H_0: las puntuaciones obtenidas en cada medición son iguales.

■ Ejemplo 13

Se realiza un estudio con un grupo de niños con la misma escolaridad, escogidos al azar de una misma escuela (población). Se les aplica una prueba psicológica que mide hostilidad en tres situaciones diferentes (programas de televisión con niveles de violencia baja, moderada y alta). Las puntuaciones de hostilidad fluctúan desde 20 hasta 60; las más altas representan mayor hostilidad. Los resultados de la prueba son los siguientes:

Violencia en un programa de televisión			
Niños	***Baja***	***Moderada***	***Alta***
A	23	30	32
B	41	45	43
C	36	35	39
D	28	29	35
E	39	41	47
F	25	28	27
G	38	46	51
H	40	47	49
I	45	46	42
J	29	34	38

Al Aplicar los ocho pasos resulta:

Paso 1. La variable de interés es la hostilidad (h).

Paso 2

$$H_0: \mu_B = \mu_M = \mu_A$$

$$H_1: \mu \text{ (no iguales al menos una)}$$

Paso 3

$$\alpha = 5\%$$

Paso 4. Análisis de varianza no paramétrico (prueba de Friedman).

$$\chi_r^2 = \frac{12}{kn\,(k + 1)}\left[\sum_{i=1}^{k} (\sum R_i)^2\right] - 3n\,(k + 1)$$

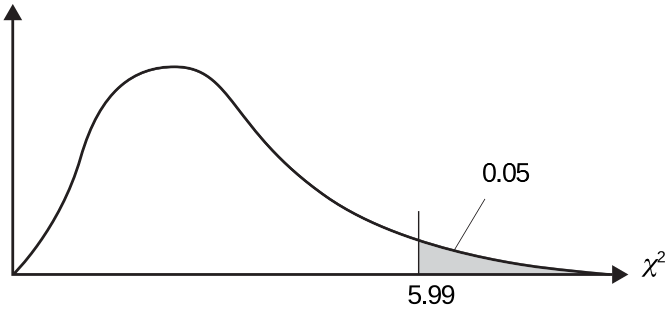
donde:

n = número de sujetos
k = número de tratamientos (mediciones en cada sujeto)
ΣR_i = suma de los rangos de cada tratamiento
12 = una constante

Paso 5. El estadístico χ_r^2 se contrasta con la $\chi^2_{(gl,\,\alpha)}$ tabla correspondiente, donde $gl = k - 1$. Para este ejemplo, se tiene:

$$k = 3 \text{ y } \alpha = 5\%$$

$$\chi^2_{(2,\ 0.05)} = 5.99$$



Paso 6. La regla de decisión (RD) es:

$$\text{si } \chi^2_r \geq 5.99, \Rightarrow H_0 \text{ se rechaza.}$$

Paso 7. Para obtener χ^2_r, se realizan las siguientes etapas.

Etapa 1 Se jerarquizan las puntuaciones (se obtienen los rangos) por sujeto; al valor más alto se le asigna 1; al moderado, 2; y al bajo, 3. Se calculan ΣR_B, ΣR_M y ΣR_A.

Niño	R_B	R_M	R_A
A	3	2	1
B	3	1	2
C	2	3	1
D	3	2	1
E	3	2	1
F	3	1	2
G	3	2	1
H	3	2	1
I	2	1	3
J	3	2	1
ΣR	28	18	14
$(\Sigma R)^2$	784	324	196

Etapa 2 Sustituya los valores anteriores, así como $n = 10$ y $k = 3$.

$$\chi_r^2 = \frac{12}{kn(k+1)}\left[\sum(\sum R_i)^2\right] - 3n(k+1)$$

$$\chi_r^2 = \frac{12}{3 \times 10 \times 4}\left[784 + 324 + 196\right] - 3 \times 10\ (4)$$

$$\chi_r^2 = \frac{1}{10}\left[1304\right] - 120 = 130.4 - 120$$

$$\boxed{\chi_r^2 = 10.40}$$

Paso 8. Como 10.40 > 5.991 y
10.40 > 9.210 ⇒
H_0 se rechaza para $\alpha = 5\%$ y $\alpha = 1\%$.

Conclusión

Existen diferencias estadísticamente significativas respecto de las medidas de centralidad de la hostilidad, de acuerdo con el nivel de violencia.

PRUEBA DE NEMENYI

Cuando la prueba de Friedman (χ_r^2) resulta significativa, es necesario efectuar comparaciones por pares de los k niveles de la variable independiente (tratamiento) para conocer cuál es el más efectivo.

Existen ${}_kC_2$ comparaciones posibles (pares) entre la medida de los rangos de los tratamientos.

$$\overline{R}_1 - \overline{R}_2,\ \overline{R}_1 - \overline{R}_3 \ldots$$

A continuación se obtiene la diferencia mínima (DM) por medio de:

$$\text{DM} = \sqrt{\frac{\chi^2_{(gl,\,\alpha)}\left[k(k+1)\right]}{6n}}$$

donde $\chi^2_{gl,\alpha}$ es el valor crítico de tablas cuando χ_r^2 es significativa, k es el número de tratamientos, n de sujetos y el 6 es una constante. Cuando la diferencia entre dos tratamientos (representada por la diferencia de sus rangos promediados) es mayor que la DM, entonces el tratamiento que hace la diferencia es el más efectivo.

En el ejemplo anterior se tiene:

Paso 1. Calcule todas las parejas posibles de los promedios de tratamiento, así como sus valores.

$${}_kC_2 = {}_3C_2 = \frac{3\,!}{2\,!\,1\,!} = 3$$

$$\overline{R}_B - \overline{R}_A,\ \overline{R}_M - \overline{R}_A \text{ y } \overline{R}_B - \overline{R}_M$$

$$\overline{R}_A = \frac{\sum R_A}{n} = \frac{14}{10} = 1.40 \qquad \overline{R}_B - \overline{R}_A = 2.80 - 1.40 = 1.40$$

$$\overline{R}_B = \frac{\sum R_B}{n} = \frac{28}{10} = 2.80 \qquad \overline{R}_M - \overline{R}_A = 1.80 - 1.40 = 0.40$$

$$\overline{R}_M = \frac{\sum R_M}{n} = \frac{18}{10} = 1.80 \qquad \overline{R}_B - \overline{R}_M = 2.80 - 1.80 = 1.0$$

Paso 2. Se obtiene la DM, para $\chi^2_{(2,\ 0.05)} = 5.991$

$$\text{DM} = \sqrt{\frac{X^2(gl,\alpha)\left[k(k + 1)\right]}{6n}}$$

$$\text{DM} = \sqrt{\frac{5.991\left[3 \times 4\right]}{6 \times 10}}$$

$$\text{DM} = \sqrt{\frac{5.991 \times 2}{10}} = \sqrt{1.1982}$$

$$\boxed{\text{DM} = 1.09462}$$

Paso 3. Como 1.4 > 1.09462, que corresponde a la pareja $\overline{R}_B - \overline{R}_A$; por consiguiente, el nivel $\overline{R}_B$ es el que hace la diferencia estadísticamente significativa. Para $\chi^2_{(2,\ 0.01)}$ = 9.210, la diferencia mínima (DM) = 1.3572 es menor que 1.4, por lo que R_B también lo cumple al 1%.

COEFICIENTE DE SPEARMAN (r_s)

Este coeficiente de correlación, también conocido como *de rangos ordenados*, es de los que más se aplican. Destaca su utilidad cuando el número de pares de puntuaciones (n) que se desea asociar es pequeño (menor que 30). Si el número de dichos pares es muy grande, se emplea un modelo paramétrico, ya que, por el teorema central del límite, la condición de normalidad no afecta los resultados.

Por otra parte, cuando las puntuaciones se jerarquizan (o se ponen en correspondencia biunívoca con el conjunto de números ordinales), es muy probable que se presenten muchos "empates": la coincidencia de puntuaciones con el mismo número ordinal. Si estos dos hechos ocurrieran, lo más adecuado sería utilizar el coeficiente de correlación de Pearson que, como se recordará, es:

$$r_{xy} = \frac{n\left[\sum xy\right] - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[n(\sum x^2) - (\sum X^2)\right]\left[n(\sum y^2) - (\sum y)^2\right]}}$$

No obstante, si el número de puntuaciones que se desea correlacionar es menor que 30, y hay pocos empates, el coeficiente de Spearman resulta el más apropiado. Esto se debe a que dichas variables representan ciertas observaciones y pueden ser ordenadas; al mismo tiempo, es deseable comprobar la hipótesis de independencia entre ambas variables aleatorias. Este coeficiente es una variedad particular del de Pearson, por lo que se define como sigue:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{t=1}^{n} \left[R(x_i) - R(y_i)\right]^2}{n(n^2 - 1)}$$

o bien,

$$r_s = 1 - \frac{6T}{n(n^2 - 1)}$$

donde:

$$T = \sum_{t=1}^{n} \left[R(x_i) - R(y_i)\right]^2$$

n = tamaño de la muestra

$R(x_i)$ = variables x jerarquizadas (ordenadas)

$R(y_i)$ = variables y jerarquizadas (ordenadas)

1 y 6 = constantes numéricas

Además de obtener el grado de asociación entre ambas variables con r_s, es posible determinar la dependencia o independencia de dos variables aleatorias.

Para la prueba de independencia en la que se utiliza r_s existen tres cosas:

1. Prueba bilateral.
   H_0: Las x_i y las y_i son mutuamente independientes.
   H_1: a) Cuando los valores altos de x tienden a ser pareados con los valores altos de y.
   b) Cuando los valores bajos (o pequeños) de x tienden a ser pareados con los valores altos (o grandes) de y.
   Si H_i no se rechaza, tanto para a) como b), x y y son dependientes.

2. Prueba unilateral, correlación positiva.
   H_0: Las x_i y las y_i son mutuamente independientes.
   H_1: Cuando los valores altos (o grandes) x y de y tienden a ser pareados al mismo tiempo. Entonces, x y y son dependientes.

3. Prueba unilateral, correlación negativa.
   H_0: Las x_i y las y_i son mutuamente independientes.

H_1: Cuando los valores pequeños o bajos de x tienden a ser pareados con los valores altos o grandes de y; también se prevé el caso inverso.
x y y se consideran dependientes.

No obstante que la hipótesis nula de no correlación entre x y y es más precisa que el concepto de independencia entre x y y mencionado anteriormente (y que implica la existencia) como señalan las hipótesis alternas de correlación entre x y y, en este texto se usará el concepto de independencia, debido a que es más fácil de interpretar y tiene un uso más amplio.

■ Ejemplo 14

A un grupo de 10 estudiantes de una escuela superior se les aplicó una prueba de conocimientos en matemáticas (x) y una de lógica (y). Se obtuvieron las siguientes puntuaciones:

Estudiante	x	y
A	84	52†
B	75	39
C	98†	48
D	70††	32††
E	75	40
F	80	36
G	83	38
H	75	37
I	84	50
J	90	46

† Calificación más alta.
†† Calificación más baja.

a) Se desea determinar el grado de semejanza entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en las pruebas x y y.

b) H_0: Las calificaciones obtenidas en matemáticas son mutuamente independientes de las obtenidas en lógica por los 10 estudiantes, contra la alternativa bilateral (dos colas), al 0.05 de nivel de significancia.
H_1: Existe una correlación positiva o negativa entre las calificaciones obtenidas en ambas pruebas (dependencia).

Solución para a)

Paso 1. Se ubican las calificaciones más altas y más bajas para cada variable. En el caso de la variable x, el estudiante C tiene la calificación más alta, entonces le corresponde el lugar 1. En cambio, el estudiante D obtuvo la calificación más baja, entonces le corresponde el lugar 10.

Para la variable y, el estudiante A tiene la calificación más alta, entonces le corresponde el lugar 1; de manera consecuente, el estudiante D tiene la calificación más baja, su lugar es el 10.

Paso 2. Se obtienen y ubican las puntuaciones jerarquizadas (ordenadas):

Estudiante	***R*(*x*)**	**Estudiante**	***R*(*y*)**
A	$3^{\dagger}$	A	1
B	$7^{\dagger\dagger}$	B	6
C	1	C	3
D	10	D	10
E	$8^{\dagger\dagger}$	E	5
F	6	F	9
G	5	G	7
H	$9^{\dagger\dagger}$	H	8
I	$4^{\dagger}$	I	2
J	2	J	4

† Promedio = 3.5.
†† Promedio = 8.

Paso 3. Se consideran las puntuaciones que obtuvieron el mismo orden al ser jerarquizadas (o sea, las puntuaciones empatadas) y se establecen sus verdaderos lugares al promediar las puntuaciones con empate. Por ejemplo, las puntuaciones de los estudiantes A e I en la variable x son ambas 84, y los estudiantes B, E y H tienen la misma puntuación de 75. Por lo anterior, al promediar las puntuaciones iguales, pero ya jerarquizadas, se determina su lugar exacto. A los estudiantes A e I les corresponden los lugares 3 y 4 (en forma indistinta de A o I).

$$\frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ (orden verdadero)}$$

Lo mismo ocurre para los estudiantes B, E y H.

$$\frac{7 + 8 + 9}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ (puntuación ordenada verdadera)}$$

Paso 4. Se calcula T de la siguiente manera: se restan las puntuaciones jerarquizadas para cada estudiante; posteriormente, se elevan al cuadrado cada una de las restas y se obtiene la suma total:

$$T = \sum_{i=1}^{10} \left[R(x_i) - R(y_i) \right]^2$$

Estudiante	$R(x)$	$R(y)$	$R(x) - R(y)$	$[R(x) - R(y)]^2$
A	3.5	1.0	2.5	6.25
B	8.0	6.0	2.0	4.0
C	1.0	3.0	–2.0	4.0
D	10.0	10.0	0.0	0.0
E	8.0	5.0	3.0	9.0
F	6.0	9.0	–3.0	9.0
G	5.0	7.0	–2.0	4.0
H	8.0	8.0	0.0	0.0
I	3.5	2.0	1.5	2.25
J	2.0	4.0	–2.0	4.0

$$T = \sum_{i=1}^{10} \left[R(x_i) - R(y_i)\right]^2 \therefore T = 42.50$$

Paso 5. Los resultados anteriores se sustituyen en la ecuación.

$$r_s = 1 - \frac{6T}{n(n^2 - 1)}$$

y así

$$r_s = 1 - \frac{6\ (42.50)}{10\ (100 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{255}{990} = 1 - 0.26$$

$$\therefore r_s = 0.74$$

Solución para b)

La hipótesis propuesta anteriormente acerca de la independencia o dependencia entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes de este ejemplo, se comprobará a 0.05 de nivel de significancia y dos colas. Al respecto, existen dos formas de proceder.

Paso 1. Con el valor calculado de $T = 42.50$ y la tabla correspondiente del apéndice se aplicará la prueba de Hotelling y Pabst, la cual destaca la naturaleza no paramétrica de r_s.

Como el nivel de significancia es de 0.05 y la prueba es de dos colas, entonces $\alpha = 0.025$ (la mitad de 0.05), al buscar el cuantil de $T = 42.50$ para $n = 10$ y $\alpha = 0.025$, en la tabla del apéndice.

$$\omega_T = \omega_{0.025} = 60$$

Puesto que 42.50 es menor que 60, la hipótesis nula se rechaza.

Paso 2. Como r_s ha sido calculado ($r_s = 0.74$), será más fácil usarlo con el fin de comprobar la hipótesis propuesta; para esto 1 – 0.025 = 0.975, que en la tabla respectiva del apéndice corresponde a 0.6364.

Debido que la regla de decisión indica que si r_s es mayor que el cuantil expuesto en la tabla, la hipótesis nula se rechaza.

Como se aprecia, ambos resultados son congruentes, lo que incrementa ligeramente la confiabilidad en las conclusiones.

Interpretación de los resultados

El coeficiente de correlación de Spearman es un caso particular del coeficiente de correlación lineal de Pearson; por eso, para fines prácticos, r_s puede interpretarse como r_{xy}, aunque si existieran muchos empates en los datos ordenados r_{xy} y r_s discreparán. En el ejemplo desarrollado, 0.74 como resultado de r_s, indica una correlación significativa.

Prueba de significancia de r_s

Cuando el tamaño de la muestra es menor que 10, se consultará la tabla de Spearman del apéndice (al final del libro), ya que si n es pequeña, el valor de r_s debe ser muy grande para que sea significativo. Si $n > 10$, si podrá utilizarse la siguiente fórmula (al igual que en el caso del coeficiente de correlación de Pearson):

$$t = \frac{r_s\sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r_s^2}}$$

Al sustituir los valores anteriores se obtiene:

$$t = \frac{0.74\sqrt{10 - 2}}{\sqrt{1 - (0.74)^2}}$$

$$= \frac{0.74\sqrt{8}}{\sqrt{1 - 0.5476}}$$

$$= \frac{2.093}{0.6726} = 3.11$$

$$\therefore t = 3.11$$

Este resultado se contrasta con la tabla del apéndice de la razón t de Student, y se concluye lo siguiente:

$$gl = n - 2 = 10 - 2 = 8;\ \alpha = 0.05$$

Para una prueba bilateral, la t crítica será:

$$t_8\ (0.05) = 2.36$$

Por consiguiente, r_s es significativo, ya que la regla de decisión es: si $t \geq t_{crít}$, H_0 se rechaza, y como 3.11 > 2.36, la hipótesis nula (H_0) se descarta.

Se concluye que

$$H_0\!: \rho = 0$$

$$H_1\!: \rho \neq 0$$

donde ρ significa la correlación no paramétrica en la población.

COEFICIENTE TAU (τ) DE KENDALL

Esta medida de correlación se basa en intervalos jerarquizados de las observaciones, más que en los números mismos; lo anterior tiene la ventaja de que la distribución de dicho coeficiente no depende de la que presentan x y y, siempre que las observaciones representadas por x y y sean independientes y continuas. Algunos investigadores prefieren este coeficiente, desarrollado por Kendall (1938), al de Spearman, aunque es ligeramente más difícil de calcular que r_s, en especial cuando existen empates. No obstante esto, el coeficiente de Kendall cuenta con una gran ventaja: su distribución tiende a la normal más rápidamente que el de Spearman. Este "ajuste" a la distribución normal es mejor para el τ de Kendall, siempre y cuando la hipótesis nula (H_0) de independencia entre x y y sea cierta.

■ Ejemplo 15

Se cataloga a un grupo de nueve niños como los más agresivos en el rango de 5 años de edad de la guardería donde acuden con regularidad. Para confirmar el grado de agresividad, se aplicó a los infantes una prueba: durante una semana se efectuaron registros observacionales, diarios y de acuerdo con ciertas condiciones. Los resultados promedio fueron los siguientes: registros observacionales en la guardería (RO_y), registros observacionales en los hogares (RO_x); rangos o intervalos en el hogar (R_x), así como rangos o intervalos en la guardería (R_y). Dichos registros se presentan en la tabla siguiente:

Niños	RO_x	RO_y	R_x	R_y
A	84	60	1	4
B	80	64	2	2
C	78	71	3	1
D	76	61	4	3
E	70	58	5	5
F	64	57	6	6
G	62	54	7	8
H	50	55	8	7
I	47	52	9	9

A continuación se calcula el coeficiente de correlación de Kendall (τ) entre lo detectado por los padres de los niños y lo que se advierte en la guardería.

Paso 1. Cada distribución de puntaciones, que representa a la variable x o a la y, se jerarquiza casi de la misma manera que cuando se calcula el coeficiente de Spearman para obtener R_x y R_y; la modificación consiste en que un conjunto de rangos (x o y) debe estar ordenado en una secuencia natural y creciente. El objetivo de este paso es tener una referencia que se utilizará posteriormente.

Paso 2. Se obtiene la columna de rangos más altos (P) y la de rangos menores (Q) que tengan como referencia la columna R_y. Con ese fin se procede así: se considera el valor numérico correspondiente al primer niño (4, en la columna R_y del ejemplo) y se cuentan hacia abajo los valores numéricos menores que él (en este caso son 2, 1 y 3); a continuación, se cuentan los valores que son mayores que él (5, 6, 8, 7 y 9).

R_x	R_y
1	4
2	2
3	1
4	3
5	5
6	6
7	8
8	7
9	9

Primer sujeto

Tres rangos
más bajos que
el primer sujeto

Cinco rangos
más altos que
el primer sujeto

Cantidad de rangos más altos	Cantidad de rangos más bajos
5	3

El procedimiento se aplica de nuevo para obtener el segundo sujeto (2 en el ejemplo); así, hay un sujeto más bajo que el 2 (1) y seis más altos (3, 5, 6, 8, 7 y 9).

R_x	R_y
1	4
2	2
3	1
4	3
5	5
6	6
7	8
8	7
9	9

Segundo sujeto
Un rango
más bajo que
el primer sujeto

Seis rangos
más altos que
el segundo sujeto

Cantidad de rangos más altos	Cantidad de rangos más bajos
5	3
6	1

Con el fin de determinar el tercer sujeto (1), se excluyen los sujetos anteriores a él y se cuenta hacia abajo cuántos son menores y cuántos mayores. En este caso, no existe valor numérico menor; los más altos son seis (3, 5, 6, 8, 7 y 9).

R_x	R_y
1	4
2	2
3	1
4	3
5	5
6	6
7	8
8	7
9	9

Tercer sujeto
(cero rangos más
bajos que él)

Seis rangos
más altos que
el tercer sujeto

Rangos más altos	Rangos más bajos
5	3
6	1
6	0

El método se aplicará sucesivamente hasta llegar al último sujeto, que siempre tendrá cero rangos más altos y cero más bajos.

Paso 3. Una vez determinadas las columnas anteriores, se obtienen la sumatoria correspondiente a la columna de rangos más altos (*P*), así como la relativa a la columna de rangos más bajos (*Q*).

					Rangos más altos	**Rangos más bajos**
Sujetos	RO_x	RO_y	R_x	R_y	P	Q
A	84	60	1	4	5	3
B	80	64	2	2	6	1
C	78	71	3	1	6	0
D	76	61	4	3	5	0
E	70	58	5	5	4	0
F	64	57	6	6	3	0
G	62	54	7	8	1	1
H	50	55	8	7	1	0
I	47	52	9	9	0	0
					31	5

Paso 4. El resultado se sustituye en la fórmula *tau* de Kendall.

$$\tau = \frac{P - Q}{\frac{n(n - 1)}{2}}$$

donde:

n = número de casos o sujetos; en el ejemplo, $n = 9$
P = suma de rangos más altos ($P = 31$)
Q = suma de rangos más bajos ($Q = 5$)

Así:

$$\tau = \frac{P - Q}{\frac{n(n - 1)}{2}}$$

$$= \frac{31 - 5}{\frac{72}{2}}$$

$$= \frac{26}{36} = 0.72$$

$$\boxed{\therefore\ \tau = 0.72}$$

COEFICIENTE DE CONCORDANCIA (ω) DE KENDALL

Es posible considerar este coeficiente como el promedio de un grupo de coeficientes de Spearman; o sea, ω es una medida del grado de acuerdo o concordancia entre m conjuntos de n rangos. En otros términos, para un grupo de n objetos que m jueces jerarquizan o evalúan, ω provee información sobre el grado de acuerdo existente entre m conjuntos de rangos o jerarquizaciones que otorgan los jueces.

Una diferencia entre r_s (Spearman) y ω (Kendall) es que éste siempre será positivo, por lo que su intervalo de valores fluctúa de 0 a 1. De esa manera, si la evaluación que otorga cada juez a los n objetos es la misma, entonces $\omega = 1.0$; en cambio, si existe un total desacuerdo entre ellos, $\omega = 0$.

Sin demérito de lo anterior, hay que destacar que lo medido por ω es el acuerdo (concordancia) entre los jueces con respecto a la materia evaluada; por tanto, aunque ω sea grande (muy cercana a 1.0), no siempre significa que los jueces valoren correctamente, ya que pueden coincidir por completo en una evaluación incorrecta en términos de un criterio externo. Tampoco implica que los jueces utilizaron los mismos criterios de evaluación o los mismos estándares, independientemente de si son los más adecuados.

Por otra parte, si los jueces no se ponen de acuerdo ($\omega = 0$), quizá se deba a que los atributos por evaluar son ambiguos o están pobremente definidos, o también a que dichos objetos no difieren significativamente en la característica o atributo medido. En consecuencia, la discriminación no es posible, ni puede ser concordante la opinión de los jueces.

■ Ejemplo 16

A cuatro catadores especializados ($m = 4$) se les presenta un grupo de cinco vinos diferentes ($n = 5$). La información obtenida se expresa de la siguiente manera:

Vino	**Opinión de los catadores**	**Sumas de los rangos (*R*)**
	1 2 3 4	
1	5 4 5 5	19
2	3 3 2 3	11
3	1 2 1 2	6
4	2 1 3 1	7
5	4 5 4 4	17
		$\Sigma R = 60$

Calcule la concordancia entre las opiniones otorgadas por los cuatro catadores, que son los jueces. La mayor puntuación (5) significa que el vino reúne varias características de calidad, y éstas descienden sucesivamente hasta llegar a 1, donde el vino es de baja calidad.

Paso 1. Las jerarquizaciones otorgadas por los cuatro jueces a cada vino se suman y se colocan en una columna, como se ve en la tabla anterior.

Paso 2. En caso de no existir relación entre la jerarquización otorgada por los jueces ($\omega = 0$), la suma de dichas jerarquizaciones para cada uno de los n objetos (vino) será la misma. Si esto hubiese ocurrido en el ejemplo, esta suma sería 12; o sea, la total entre el número de casos $\left(\frac{60}{5} = 12\right)$.

Paso 3. Se obtiene la diferencia (D) entre la suma de cada grupo de jerarquizaciones y el promedio de 12, luego se colocan estos resultados en la columna 2.

n **Vino**	***m*** **Rango de los catadores**	**(1) Suma de los rangos**	**(2) Diferencia de rangos**
	1 2 3 4	R	$D = \Sigma R - 12$
1	5 4 5 5	19	7
2	3 3 2 3	11	1
3	1 2 1 2	6	6
4	2 1 3 1	7	5
5	4 5 4 4	17	5
		$\Sigma R = 60$	

Paso 4. Se elevan al cuadrado estas diferencias (*D*), se colocan los resultados en la columna 3 y se obtiene su suma.

n **Vino**	***m*** **Rango de los catadores**	**(1)** **Suma de los rangos**	**(2)** **Diferencia de rangos**	**(3)**
	1 2 3 4	*R*	*D*	D^2
1	5 4 5 5	19	7	49
2	3 3 2 3	11	1	1
3	1 2 1 2	6	6	36
4	2 1 3 1	7	5	25
5	4 5 4 4	17	5	25
		$\Sigma\, R = 60$		$\Sigma\, D^2 = 136$

Paso 5. Se calcula ω mediante la siguiente fórmula:

$$\omega = \frac{12\sum D^2}{m^2 n(n^2 - 1)}$$

$$\omega = \frac{12(136)}{(4^2)(5)(5^2 - 1)}$$

$$\omega = \frac{1\,632}{(16)(5)(24)} = \frac{1\,632}{1\,920} \therefore \omega = 0.85$$

Con los resultados obtenidos anteriormente, se comprueba que la suma de las jerarquizaciones ($\Sigma\, R$) es igual al producto del número de jueces ($m = 4$) por el de objetos evaluados ($n = 5$) y por ($n + 1$). Todo lo anterior se divide entre 2; o sea que debe obtenerse 60 = 60.

Esto es:

$$\sum R = \frac{mn(n + 1)}{2}$$

Como $\Sigma R = 60$:

$$60 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2}$$

$$60 = \frac{120}{2}$$

$$60 = 60$$

Prueba de significancia de ω

La significancia estadística de ω se evalúa por medio de la tabla del apéndice. Los datos para consultar esta tabla son $m = 4$ (jueces) y $n = 5$ (vinos) que constituyen los objetos jerarquizados o calificados. Se observa que con un nivel de significancia de 1%, el valor de ω_0 es de 0.67 y, dado que la ω calculada asciende a 0.85 y supera el valor de 0.67 (el de la tabla), puede concluirse que este coeficiente de concordancia es significativo a partir de 1% y, por supuesto, α de 5% ($\omega_0 = 0.54$). Por consiguiente, los catadores realizaron un trabajo correcto al evaluar estos cinco vinos.

En general, la regla de decisión para el coeficiente de Kendall es la siguiente:

Si $\omega \geq \omega_0$, entonces ω es significativo.

Conclusión

$\omega = 0.85$ indica que existe un alto grado de acuerdo (concordancia) entre los cuatro jueces en la evaluación de las características de calidad de los cinco vinos.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN (r_{bp}) BISERIAL DE PUNTO

La correlación biserial, en general, es una medida de asociación entre dos variables continuas que se distribuyen de esa misma forma, en donde, para facilitar el proceso, una de ellas se ha dicotomizado (sí-no; falso-verdadero; masculino-femenino; casado-soltero; bueno-malo; entre otras). La variable dicotomizada se supone discreta o discontinua cuando trata de relacionarse con la que permanece continua; el coeficiente más apropiado para este propósito es el de correlación biserial puntual (r_{bp}), que se define en la siguiente forma:

$$r_{bp} = \frac{n(\sum fcx) - n_c(\sum fx)}{\sqrt{(n_c)\,(n_i)\left[n\sum fx^2 - (\sum fx)^2\right]}}$$

donde:

n = número de sujetos

f = frecuencia de ocurrencia de las puntuaciones obtenidas por los sujetos

x = puntuaciones obtenidas por los sujetos

fx = producto de la frecuencia por las puntuaciones

fc = número de sujetos que obtuvieron exactamente las puntuaciones x

n_c = $\Sigma\, fc$ = (...) = número de sujetos que no obtuvieron exactamente las puntuaciones x

f_i = número de sujetos que no obtuvieron exactamente las puntuaciones x

n_i = $\Sigma\, f_i$ = número total de sujetos que no obtuvieron las puntuaciones x

fcx = producto del número de sujetos que obtuvieron exactamente las puntuaciones x por la puntuación x de cada sujeto representativo

$\Sigma\, fx^2$ = suma de los productos de la frecuencia absoluta por las puntuaciones x al cuadrado

$(\Sigma\, fx)^2$ = cuadrado de la suma del producto de la frecuencia por las puntuaciones x

■ Ejemplo 17

A 100 estudiantes de una escuela preparatoria se les aplica una prueba de conocimiento x, que consta de 40 reactivos, y se determina la frecuencia con que se distribuyen las puntuaciones de los 100 estudiantes. Se obtienen los siguientes resultados:

x	f
40	2
38	4
37	6
36	12
32	12
31	10
30	12
28	10
27	10
25	4
24	4
22	3
20	3
18	3
16	2
12	2
10	1
n = 100	

Cuando se elaboró la prueba se hizo especial hincapié en el reactivo número 33; el criterio para evaluarla será incorrecto o correcto. Por consiguiente, se calculará el coeficiente r_{bp} mediante las puntuaciones obtenidas por los 100 estudiantes en la prueba x y la respuesta al reactivo 33, que se dicotomizó artificialmente como "incorrecto-correcto".

Paso 1. Se concentra en un cuadro la información sobre los resultados de la prueba y sobre la respuesta de los 100 estudiantes al reactivo 33.

En la columna 1 se presentan las puntuaciones; en la columna 2, la frecuencia con que ocurren éstos; en la 3, el número de estudiantes que respondieron de manera correcta el reactivo. Por último, en la columna 4, al restar las puntuaciones de la columna 3 a la 2, se obtiene la frecuencia de los estudiantes que respondieron incorrectamente al reactivo 33.

(1)	(2)	(3)	(4)
x	***f***	***fc***	$\boldsymbol{f_i}$
40	2	2	0
38	4	4	0
37	6	5	1
36	12	10	2
32	12	9	3
31	10	8	2
30	12	7	5
28	10	6	4
27	10	7	3
25	4	1	3
24	4	1	3
22	3	1	2
20	3	1	2
18	3	0	3
16	2	1	1
12	2	0	2
10	1	0	1

Paso 2. Se obtienen los productos de los valores de la columna (1) multiplicada por la columna (2). O sea fx, lo cual forma la columna (5). Por último, se suman estos resultados para obtener $\Sigma\, fx$.

(5)
(*fx*)
80
152
222
432
384
310
360
280
270

(*continúa*)

(*continuación*)

100
96
66
60
54
32
24
10
Σ *fx* = 2 932

Paso 3. Se elevan al cuadrado las puntuaciones *x* de la columna 1 y este resultado se multiplica por cada valor *f* de la columna 2; esta operación origina la columna (6). Por último, se suman todos los valores y se obtiene Σ fx^2.

Paso 4. Se obtiene la columna (7) al multiplicar las puntuaciones *x* de la columna 1 con los valores *fc* de la columna (3); después se suman todos estos resultados y se obtienen Σ *fcx*.

(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
x	***f***	***fc***	f_i	***fx***	fx^2	***fcx***
40	2	2	0	80	3 200	80
38	4	4	0	152	5 776	152
37	6	5	1	222	8 214	185
36	12	10	2	432	15 552	360
32	12	9	3	384	12 288	288
31	10	8	2	310	9 610	248
30	12	7	5	360	10 800	210
28	10	6	4	280	7 840	168
27	10	7	3	270	7 290	189
25	4	1	3	100	2 500	25
24	4	1	3	96	2 304	24
22	3	1	2	66	1 452	22
20	3	1	2	60	1 200	20
18	3	0	3	54	972	0
16	2	1	1	32	512	16
12	2	0	2	24	288	0
10	1	0	1	10	100	0
	100	63	37	2 932	89 898	1 987
	Σ *f*	*nc*	n_i	Σ *fx*	Σ fx^2	Σ *fcx*

Paso 5. Los resultados obtenidos en la tabla anterior se sustituyen en la definición del coeficiente de corrección biserial-puntual.

$$r_{bp} = \frac{n(\sum fcx) - nc(\sum fx)}{(nc\, n_i)\left[n\sum fx^2 - (\sum fx)^2\right]}$$

$$r_{bp} = \frac{(100)(1987) - 63(2\,932)}{\sqrt{(63)(37)\left[100(89\,898) - (2\,932)^2\right]}}$$

$$r_{bp} = \frac{13\,984}{\sqrt{(2\,331)(393\,176)}}$$

$$r_{bp} = \frac{13\,984}{30\,274} = 0.46$$

$$\boxed{r_{bp} = 0.46}$$

Prueba de significancia de r_{bp}

Debido a que el coeficiente de correlación biserial de punto o puntual, es un caso particular del coeficiente de correlación lineal de Pearson, su significancia y relación en la población se llevan a cabo de la siguiente manera: en primer término, se establecen las hipótesis acerca de la existencia y no existencia de correlación en la población. La notación estadística es:

$$H_0\colon \rho = 0$$

$$H_1\colon \rho \neq 0$$

También se establece el nivel de significancia (α) con una probabilidad de error de 0.05, 0.01, 0.001, etc. Los grados de libertad se determinan de la siguiente forma: $gl = n - 2$; con éstos se compara el coeficiente r_{bp}, calculado con el coeficiente crítico que se obtiene por medio de la tabla del apéndice, con la siguiente regla de decisión:

Si $r_{bp} \geq r_{bp(crít)}$, entonces H_0 se rechaza.

Para el ejemplo desarrollado, resulta lo siguiente:

$gl = 98$, debido a que $n = 100$

$$\alpha = 0.001$$

$r_{bp(crít)} = r_{bp(gl,\alpha)} = r_{bp(98,\ 0.001)} = 0.3211$. Este valor es para una prueba bilateral (de dos colas).

Como 0.46 > 0.3211, entonces H_0 se rechaza, lo que significa que sí existe correlación biserial puntual en la población y que el valor de $r_{bp} = 0.46$ es significativo. Debido a que las correlaciones biseriales-puntuales se usan frecuentemente como índices de asociación entre una pregunta en particular y el puntaje total de la prueba, son muy útiles para seleccionar preguntas (rubros) durante el proceso de diseño y construcción de pruebas, con el fin de incluir en las mismas ciertas características específicas que se necesita medir.

Por último, se toma en consideración que r_{bp} presenta una limitación cuando la variable continua se distribuye normalmente y la variable dicotómica tiene una probabilidad de ocurrencia de 0.5. Dicha limitación proviene de que cada vector de la variable dictómica (falso-verdadero, correcto-incorrecto) tiene la misma posibilidad de ser escogido, por lo que el máximo valor que r_{bp} adquiriría es 0.80; pero si la variable no dicotomizada es bimodal, este valor máximo asciende a 0.90.

Finalmente, al interpretar el resultado de r_{bp} en el ejemplo de los 100 estudiantes a los que se aplica la prueba con un reactivo especial, se concluye que el coeficiente no es alto (0.46), pero existe correlación significativa (dadas las limitaciones del biserial-puntual de 0.80). Además, sobresale que la correlación es positiva; esto significa que los estudiantes con las mejores puntuaciones en la prueba tienden a responder correctamente al reactivo 33 y que, por lo contrario, quienes obtuvieron puntuaciones bajas tienden a contestarlo incorrectamente. Entonces, la pregunta 33 realiza lo que se supone constituye el propósito de la prueba: separar a los estudiantes buenos de los mediocres.

PRUEBA DE KAPPA

Este estadístico es útil para determinar por un mismo experto la confiabilidad de dos mediciones (antes-después), o mediciones realizadas de dos especialistas en forma independiente cuando la variable es categórica y lo que se mide es hasta cierto punto subjetivo (dolor, inflamación, efectividad de un tratamiento, etc.) por lo que es necesario establecer una escala; por ejemplo: 0 = no hay, 1 = leve, 2 = regular y 3 = severo.

■ Ejemplo 18

La inflamación de 90 encías en pacientes con problemas periodentales, fueron evaluadas por dos odontólogos (A y B) certificados, considerando la siguiente escala:

0 = sin inflamación
1 = inflamación leve
2 = inflamación regular
3 = inflamación severa

Para conocer la confiabilidad de las mediciones de los odontólogos, sus evaluaciones se ubican en una tabla de doble entrada, llamada también de contingencia, de 2 × 2 (2 renglones por 2 columnas).

Odontólogo B

		0	1	2	3	Total
Odontólogo A	0	25	2	1	0	28
	1	4	17	3	2	26
	2	1	3	15	1	20
	3	0	1	2	13	16
	Total	30	23	21	16	90

Las proporciones obtenidas por los dos odontólogos son independientes.

El estadístico Kappa (k) se define como:

$$k = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e}$$

donde:

P_o = proporción observada de respuestas similares para ambos observadores A y B
P_e = proporción esperada de respuestas similares para ambos observadores A y B

$$P_e = \sum_{i=1}^{c} Q_i b_i$$

donde:

Q_i = proporción de respuestas en la categoría i, para el observador A
b_i = proporción de respuestas en la categoría i, para el observador B
c = número de categorías

La prueba Kappa varía entre 0 y 1, donde una perfecta confiabilidad se denota por 1, mientras que 0 indica que no existe confiabilidad de las dos mediciones, o sea $P_o = P_e$; si Kappa > 0.75 se considera excelente. Entre 0.40 y 0.75 buena y < 0.4 pobre. Para el ejemplo anterior se tiene:

$$P_e = \frac{25 + 17 + 15 + 13}{90} = 0.78$$

$$Q_1 = \frac{28}{90} = 0.31 \qquad b_1 = \frac{30}{90} = 0.33$$

$$Q_2 = \frac{26}{90} = 0.29 \qquad b_2 = \frac{23}{90} = 0.26$$

$$Q_3 = \frac{20}{90} = 0.22 \qquad b_2 = \frac{21}{90} = 0.23$$

$$Q_4 = \frac{16}{90} = 0.18 \qquad b_4 = \frac{16}{90} = 0.18$$

P_e = (0.31) (0.33) + (0.29) (0.26) + (0.22) (0.23) + (0.18) (0.18)
P_e = 0.10 + 0.08 + 0.05 + 0.03 = 0.26

$$\text{Kappa} = \frac{0.78 - 0.26}{1 - 0.26} = \frac{0.52}{0.74} = 0.70$$

$$\boxed{k = 0.70}$$

Esto indica una buena confiabilidad del sistema de evaluación.

Resumen

Los datos categóricos obtenidos a partir de una sola variable de interés ocurren en un sinnúmero de situaciones reales. Se examinó la prueba de bondad de ajuste, que se utiliza para comprobar si las frecuencias muestrales asociadas con las categorías de una variable coinciden con lo esperado en una situación hipotética.

Los problemas que consideran dos variables categóricas se resolvieron mediante la prueba de *ji*-cuadrada, que contrasta independencia para una sola muestra y dos variables de criterio.

Existen varias alternativas no paramétricas para el coeficiente de correlación lineal de Pearson, con el fin de determinar la relación entre las variables distintas de las correspondientes a los intervalos: ordinales, dicotómicas o nominales.

Cuando el tipo de variables que intervienen en el análisis estadístico son ordinales o continuas transformadas en rangos, y la muestra es pequeña, así como la distribución de éstas no sigue el modelo normal, el coeficiente de correlación por intervalos jerarquizados (r_s) de Spearman o el coeficiente de Kendall (que en ciertas situaciones es preferible a r_s), son los adecuados para encontrar la relación y el grado de asociación de este tipo de variables; o bien, puede obtenerse un valor estadístico, como el coeficiente de concordancia que, además de emplear la función de coeficiente promedio de un grupo de coeficiente de correlación de Spearman, suele medir el grado de concordancia existente entre la opinión o calificación que, según determinado criterio, tienen un grupo de personas (jueces) ante una situación de tipo subjetiva. En el caso de enfrentarse a un evento en el que una variable es continua y la otra dicotómica, el coeficiente biserial puntual (r_{bp}) es el apropiado para determinar las posibles relaciones entre estas dos variables.

El análisis de frecuencias observadas, variables nominales de características en las cuales no es posible obtener un valor numérico, y que al mismo tiempo se clasifican en situaciones excluyentes en las tablas de doble entrada (tablas de contingencias), representa uno de los procesos más antiguos y útiles empleados por los investigadores de las ciencias sociales y del comportamiento. Para este análisis, es posible obtener el coeficiente *C* de contingencia o el *V* de Kramer, cuya interpretación es la misma, pero los requisitos de uso varían según el tamaño (número de renglones por número de columnas) que dicha tabla de contingencia tenga, lo cual repercute en el número de casillas o clasificaciones del problema por resolver.

Ejercicios

14.1 Se comparan dos tipos de adhesivos para materiales dentales midiendo en megapascales la presión a la cual hay ruptura. Aplique las pruebas de:

a) *U* de Mann-Whitney
b) *t* de Student

Adhesivo 1	Adhesivo 2
3.2	4.1
2.5	3.9
4.0	3.6

(*continúa*)

(*continuación*)

3.1	4.7
3.5	4.5
2.9	3.4
3.7	4.8
3.9	4.4
3.3	3.3

14.2 Se mide a dos grupos de 24 ratas bajo dos diferentes tipos de droga experimental. El número de respuestas ante un par de condiciones diferentes, grupo 1 con ruido y grupo 2 sin ruido, es el siguiente:

Grupo 1 (con ruido)	Grupo 2 (sin ruido)
18	23
32	23
36	25
39	35
25	28
33	25
18	17
39	42
38	43
25	15
25	15
40	37
26	29
35	18
32	27
34	25
15	13
29	33
17	11
22	38

(*continúa*)

(*continuación*)

20	17
25	16
33	21
19	16

Aplique la prueba de la U de Mann-Whitney para muestras grandes.

14.3 Se realiza un experimento con 5 personas en el que se mide la relación del tamaño de la pupila cuando se les presentan en forma verbal 4 tipos de problemas de diferente grado de dificultad. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Persona	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
A	15.2	15.8	20.2	22.9
B	9.8	14.1	24.9	21.2
C	10.0	8.9	13.5	23.1
D	4.0	8.8	7.8	11.6
E	16.2	9.1	25.1	29.6

Realice un análisis de varianza no paramétrico (prueba de Friedman).

14.4 A 10 cigarrillos de la misma marca, pero de 10 diferentes paquetes, seleccionados al azar, se les mide la cantidad de alquitrán y nicotina, de donde surgen los siguientes datos:

Cigarrillo	Alquitrán	Nicotina
A	14	0.9
B	17	1.1
C	28	1.6
D	17	1.3
E	16	1.0
F	13	0.3
G	24	1.5
H	25	1.4
I	18	1.2
J	31	2.0

Obtenga una correlación de Spearman.

14.5

	-1- control	-2- grupo 1	-3- grupo 2	-4- grupo 3	-5- grupo 4	-6- grupo 5
1	69.38	63.58	79.53	90.00	60.07	59.60
2	30.66	31.18	34.27	39.64	29.06	90.00
3	37.58	39.87	41.21	50.89	40.11	54.70
4	21.89	18.44	22.97	24.58	21.05	24.95
5	16.85	14.30	31.95	44.43	21.64	27.28
6	44.25	13.05	43.62	54.15	47.18	34.02
7	35.37	39.11	38.53	50.24	26.99	37.76
8	22.71	23.26	22.06	27.90	37.82	19.37
9	22.79	24.58	23.26	28.25	17.66	34.51
10	16.85	16.54	16.54	17.85	25.33	28.29
11	23.11	21.05	21.56	25.33	21.56	30.85
12	21.13	20.79	20.79	22.79	23.50	28.59
13	21.81	21.97	23.89	23.26	24.35	26.99
14	23.42	24.80	25.55	26.28	28.04	38.06
15	20.62	20.62	20.88	24.27	22.63	30.26
16	20.96	24.58	26.64	31.63	24.12	27.56

Los datos anteriores muestran tensiones que se soportan antes de la ruptura. Realice un análisis de varianza en rangos (prueba de Kruskal-Wallis).

14.6 Los datos anteriores se transforman a porcentajes utilizando la tabla correspondiente del apéndice.

	-1- control	-2- grupo 1	-3- grupo 2	-4- grupo 3	-5- grupo 4	-6- grupo 5
1	0.88	0.80	0.97	1.23	0.75	0.74
2	0.26	0.27	0.32	0.41	0.24	1.12
3	0.37	0.41	0.43	0.60	0.41	0.67
4	0.14	0.10	0.15	0.17	0.13	0.18

(*continúa*)

(*continuación*)

5	0.08	0.06	0.28	0.49	0.14	0.21
6	0.49	0.05	0.48	0.66	0.54	0.31
7	0.34	0.40	0.39	0.59	0.21	0.37
8	0.15	0.16	0.14	0.22	0.38	0.11
9	0.15	0.17	0.16	0.22	0.09	0.32
10	0.08	0.08	0.08	0.09	0.18	0.23
11	0.15	0.13	0.13	0.18	0.14	0.26
12	0.13	0.13	0.13	0.15	0.16	0.23
13	0.14	0.14	0.16	0.16	0.17	0.21
14	0.16	0.18	0.19	0.20	0.22	0.38
15	0.12	0.12	0.13	0.17	0.15	0.25
16	0.13	0.17	0.20	0.28	0.17	0.21

Los datos anteriores muestran el porcentaje de la tensión antes de la ruptura. Aplique la prueba de Kruskal-Wallis.

14.7 A 10 pacientes diagnosticados con ansiedad severa se les aplica una terapia que consiste en tres sesiones. De ella se obtiene lo siguiente:

Paciente	**I**	**II**	**III**
A	21	23	15
B	29	30	21
C	16	19	18
D	20	19	18
E	13	10	14
F	5	12	6
G	18	18	12
H	26	32	21
I	17	20	9
J	4	10	2

Calcule la prueba de Friedman.

14.8 Se aplica a 12 personas tres tratamientos nuevos, que se comparan con el tratamiento tradicional, obteniendo los siguientes datos:

	Tratamiento			
Sujetos	**(Control)** ***A***	***B***	***C***	***D***
1	8	21	23	15
2	10	29	30	21
3	20	16	19	18
4	15	20	19	18
5	12	13	10	14
6	10	15	12	17
7	9	5	12	6
8	15	18	18	12
9	17	26	32	21
10	12	17	20	9
11	10	4	10	2
12	6	12	15	4

Calcule la prueba de Friedman.

14.9 Aplique la prueba Kappa.

Xerostomía en pacientes sometidos a radioterapia en cabeza y cuello.

x = xerostomía
0 = flujo salival normal
1 = flujo salival moderado
2 = flujo salival medio
3 = flujo salival escaso

OBSERVACIÓN *B*

		0	**1**	**2**	**3**	**Total**
OBSERVACIÓN *A*	0	5	0	3	1	9
	1	1	4	4	2	11
	2	1	4	5	4	14
	3	0	2	4	10	16
	Total	7	13	13	17	50

14.10 Calidad ósea en reborde alveolar anterior mandibular en pacientes desdentados.

x = hueso alveolar
0 = normal
1 = buena
2 = regular
3 = pobre

	B					
A		**0**	**1**	**2**	**3**	**Total**
	0	13	3	2	1	19
	1	2	5	4	2	13
	2	6	5	4	1	16
	3	1	1	0	0	2
	Total	22	14	10	4	50

14.11 Calcular la Prueba (k) Kappa
x = problema inflamación de papila gustativa
0 = normal
1 = leve
2 = moderada
3 = severa
n = 74

Inflamación
(Observación "B")

Inflamación
(Observación "A")

	0	**1**	**2**	**3**	**Total**
0	0	4	8	3	15
1	2	18	0	1	21
2	7	5	9	3	24
3	7	1	0	5	14
Total	16	28	17	12	74

14.12 Calcular la Prueba Kappa
x = problema periodontal
0 = normal
1 = leve
2 = moderada
3 = severa
n = 90

		Problema periodontal Observación "B"				
		0	1	2	3	Total
Problema periodontal "A"	0	16	8	4	2	30
	1	7	9	1	8	25
	2	4	0	5	7	16
	3	0	9	4	6	19
	Total	27	26	14	23	90

Capítulo 15

Conceptos básicos de evaluación y análisis de datos categóricos

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector logre:

- Definir en qué consisten los estudios evaluativos, diferenciándolos de los no-evaluativos.
- Realizar una revisión de los principales conceptos de evaluación.
- Interpretar la evaluación del desempeño y de programas educativos.
- Considerar la evaluación referida a:
  Una norma
  Un criterio
- Identificar la información relevante para evaluar un proyecto o programa, con miras a la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Utilizar un cuestionario confiable y validado como instrumento de medición.
- Aplicar el cuestionario en forma ética, supervisando las encuestas, sin inducir las respuestas bajo ninguna circunstancia.
- Presentar los resultados obtenidos, sin ninguna tendencia, sesgo o alteración.
- Redactar un informe señalando los alcances y limitaciones así como las recomendaciones y conclusiones de dicho estudio.
- Analizar estadísticamente la información representada con datos categóricos.
- Aplicar adecuadamente el análisis de frecuencia y ubicar la información relevante en una tabla de contingencia.
- Calcular la prueba de *ji*-cuadrada para:
  Homogeneidad
  Independencia.
- Calcular los coeficientes de asociación:
  a) *Fi* (f)
  b) Contingencia (c)
- Aplicar la prueba de McNemar.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la evaluación es considerada el medio principal para optimizar los procesos y productos de la enseñanza-aprendizaje; a diferencia de los estudios no evaluativos cuya meta es generalmente el comprobar hipótesis. El éxito de los estudios evaluativos radica en la sensibilidad de los instrumentos de medición y su poder para establecer estándares *normativos* o *de criterio* de excelencia. Por ello es conveniente anticipar las limitaciones y potencialidades de uno u otro tipo de estudio a partir del problema o necesidad que pretende solucionarse.

Los modelos estadísticos que se desarrollan en este capítulo se concentran más en los usos de la investigación cualitativa, aunque algunos de ellos también se aplican en la cuantitativa, siempre y cuando la información se pueda representar con datos categóricos.

ESTUDIOS EVALUATIVOS, UN ENFOQUE ACTUAL

El movimiento hacia una nueva cultura de la evaluación considera la investigación evaluativa como un elemento indispensable para la emisión de juicios valorativos y toma de decisiones para la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Los resultados que arrojan los estudios evaluativos permiten el acceso a la información educativa, facilitan la rendición de cuentas para acceder a los resultados y al financiamiento y generan alternativas para optimizar planes y programas curriculares que impacten positivamente en los sistemas educativos. Es por ello que hoy día los resultados evaluativos se reconocen como protagonistas dentro de dicho movimiento, centrando los esfuerzos en la diversificación de sus estrategias para asegurar la confiabilidad-validez y en el intercambio de experiencias de evaluación entre instituciones educativas afines.

Definiciones y conceptos

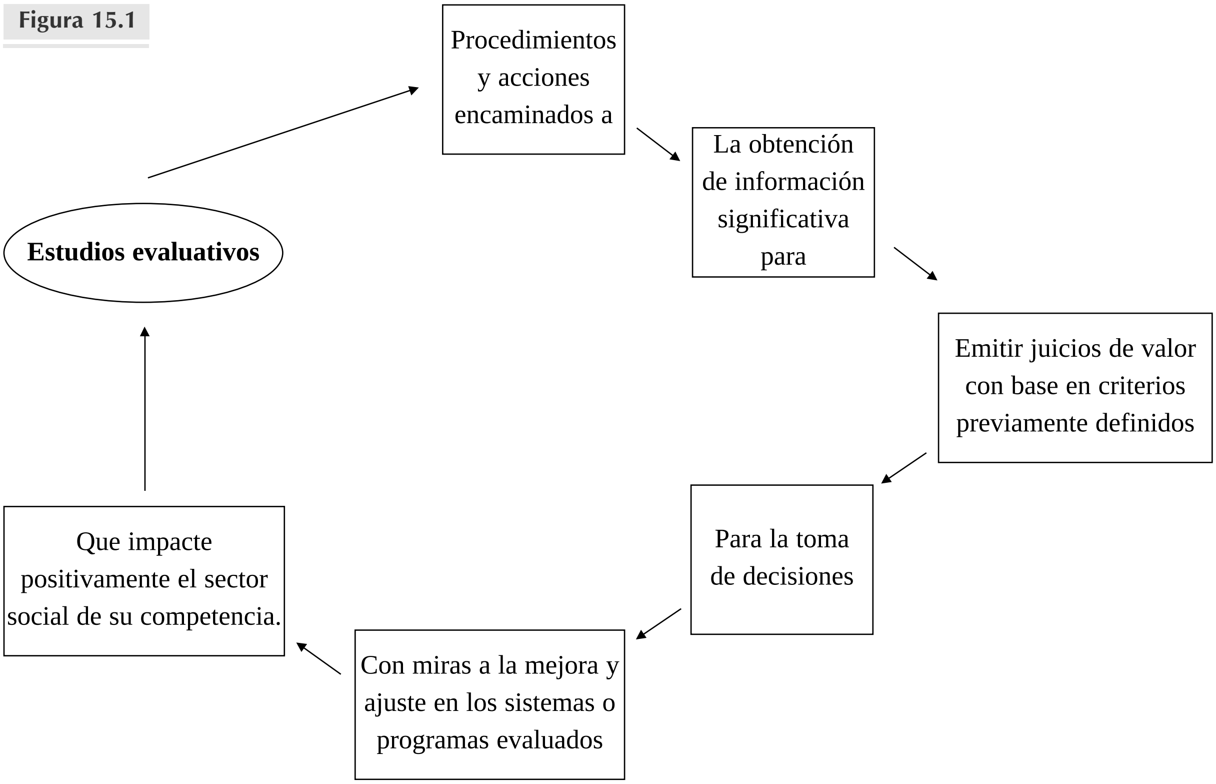
La literatura sobre evaluación es amplia y variada, la evaluación se ha desarrollado bajo múltiples enfoques que han sido determinantes para la evolución del concepto. Por tanto, en el ámbito de la educación existen distintas definiciones, tipos, dimensiones y conceptos relacionados que varían según el marco de referencia y la intención evaluativa de quien la promueve. Sin embargo, para el desarrollo del presente capítulo, el concepto de evaluación es (véase figura 15.1):

> El proceso sistemático que consiste en la recolección de información pertinente, que orienta a la emisión de juicios valorativos respecto de uno o más atributos de los elementos del contexto educativo. La información obtenida es procesada, analizada y contrastada con referentes claramente establecidos y conduce a una toma de decisiones educativas con miras al ajuste y mejora de los planes curriculares y políticas educativas.

Consideraciones para los estudios evaluativos

1. Los principios psicopedagógicos sustentados por las teorías del aprendizaje desde un enfoque constructivista.
2. Los procesos cognoscitivos y habilidades para el aprendizaje de los individuos, que son destinatarios de un estudio ya en el ámbito educativo, de la salud y/o comunitario.

Figura 15.1



3. Las finalidades educativas o intenciones del estudio definidos en las políticas sociales, educativas o de salud vigentes, con el fin de buscar congruencia y equilibrio con el modelo de evaluación que sustenta la práctica.
4. Las necesidades de formación, ajustes y/o mejora en el contexto inmediato, el universo social-profesional-laboral donde el estudio de evaluación se inserta.
5. La caracterización del individuo, considerando edad, nivel de escolaridad, necesidades, expectativas e intereses, entre otros elementos que definen una muestra poblacional.

El trabajo de investigación que se ha de realizar debe considerar los referentes anteriores, como puntos de partida, para definir las preguntas de trabajo o de investigación que van a definir la aplicación de una u otra metodología en el estudio evaluativo.

Los diferentes objetos de la evaluación

Los estudios evaluativos pueden dirigirse a una amplia gama de fenómenos sociales, educativos, comunitarios y del ámbito de la salud, entre otros.

La evaluación del desempeño académico

Es un tipo de evaluación especializada en la obtención de información confiable sobre el nivel de aprendizaje que ha alcanzado un individuo, a través de instrumentos de medición válidos, estandarizados, objetivos y relevantes que se reportan de manera cuantitativa y pueden interpretarse de manera cualitativa para la emisión de juicios valorativos y la toma de decisiones, ya sea en el contexto educativo, social, laboral o de la salud.

Los estudios evaluativos se realizan para evaluar, en el ámbito educativo: a) los requisitos de ingreso a un programa, b) el impacto de un programa en su fase intermedia y reorientar, si es el caso, las acciones curriculares o tomar medidas para favorecer los procesos de aprendizaje de los destinatarios y c) el nivel de conocimientos al egresado, como testimonio del nivel de logro de las intenciones educativas del programa y/o como coadyuvante para la acreditación-certificación de estudios.

En el contexto laboral, la evaluación puede aplicarse para: a) fines de acreditación de estudios truncos, b) cuando la experiencia laboral ha formado competencias y requieren ser evaluadas a criterio, para definir si el individuo puede ser promovido o certificado a partir de la medición de sus habilidades adquiridas en la práctica con referencia a un estándar.

Los estudios evaluativos que se desarrollan en la actualidad han tenido un fuerte impacto en las prácticas educativas y de salud, también en las políticas sociales, públicas y privadas, pues ha logrado enriquecer las alternativas de medición y evaluación, que hasta hace unas décadas se hacían preferentemente bajo modelos cuantitativos.

La evaluación de programas

Los estudios evaluativos que se dirigen a evaluar programas facilitan los siguientes procesos:

- La comparación, mejoramiento, acreditación y/o certificación de dichos programas.
- Generalización de su efectividad en diferentes ámbitos y niveles socioeconómicos, estratos sociales, contextos educativos y de salud.
- Participación ciudadana en el equipo de trabajo para un mejor desarrollo y efectividad del programa.
- Toma de decisiones para el ajuste de la mejora.
- Evolución del desempeño de los participantes.

Los estudios que evalúan programas pueden dirigirse hacia el conocimiento de la etapa de desarrollo del programa en un punto de espacio y tiempo de corte, y a partir de los propósitos de quien patrocina el programa, considerando:

- Las necesidades detectadas del grupo o comunidad a quien va dirigido el programa.
- Determinar la etapa y proceso en función de los objetivos, costos y beneficios cubiertos.
- El resultado o producto final del programa.

Estudios evaluativos: procedimientos generales

Como ya se mencionó, este tipo de estudios se aplica para evaluar programas previamente diseñados, con la posibilidad de que el evaluador participe desde las primeras etapas del diseño del programa, coordinando los procedimientos de planeación y diseño con los elementos que se van a considerar para su posterior evaluación, de tal manera que la **evaluación** y la **planeación** son procesos similares e interactivos, necesarios para alcanzar el éxito de un programa de beneficio social.

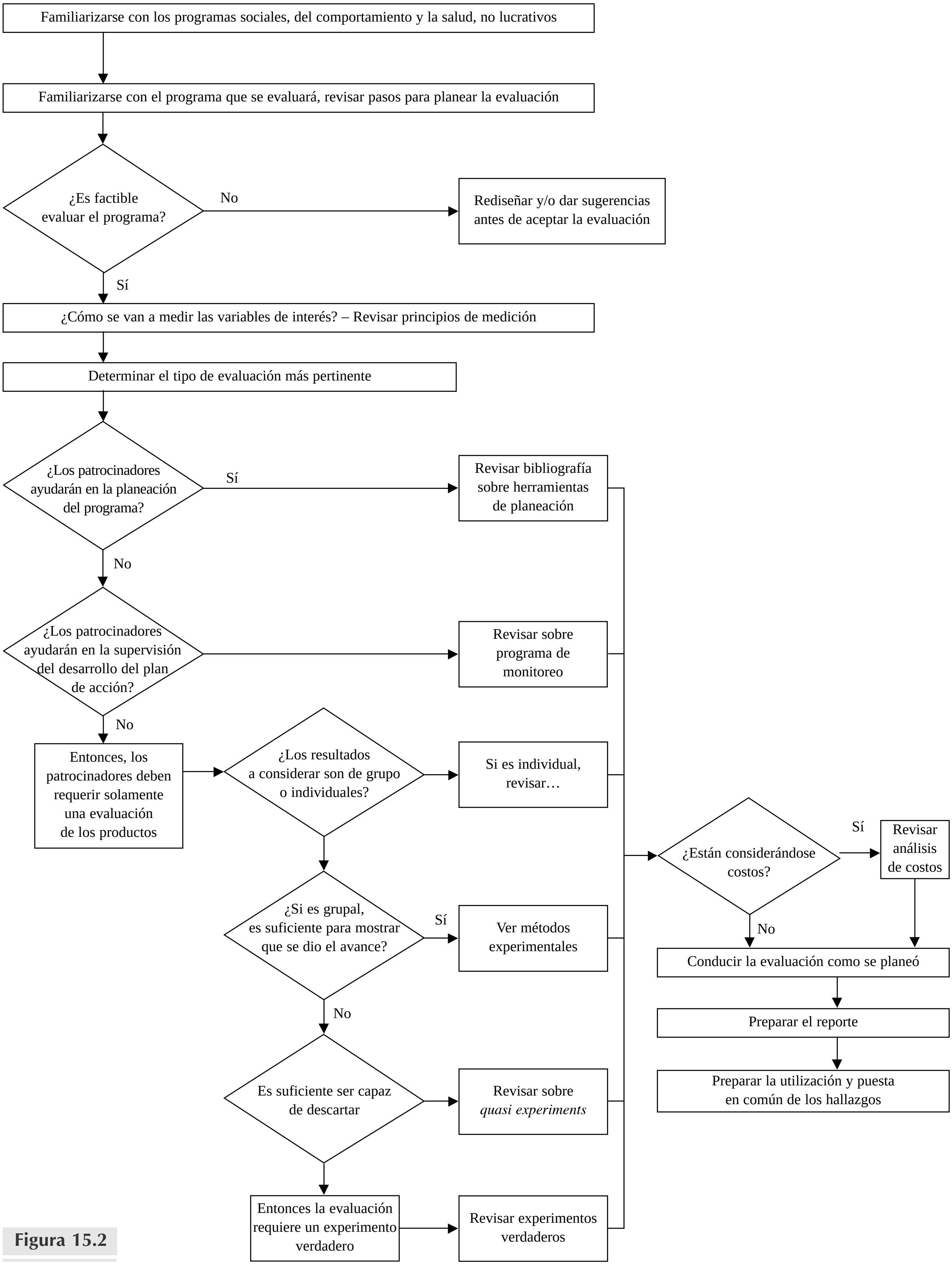

Familiarizarse con los programas sociales, del comportamiento y la salud, no lucrativos
Familiarizarse con el programa que se evaluará, revisar pasos para planear la evaluación
¿Es factible evaluar el programa?
No
Rediseñar y/o dar sugerencias antes de aceptar la evaluación
Sí
¿Cómo se van a medir las variables de interés? – Revisar principios de medición
Determinar el tipo de evaluación más pertinente
¿Los patrocinadores ayudarán en la planeación del programa?
Sí
Revisar bibliografía sobre herramientas de planeación
No
¿Los patrocinadores ayudarán en la supervisión del desarrollo del plan de acción?
Revisar sobre programa de monitoreo
No
Entonces, los patrocinadores deben requerir solamente una evaluación de los productos
¿Los resultados a considerar son de grupo o individuales?
Si es individual, revisar…
¿Si es grupal, es suficiente para mostrar que se dio el avance?
Sí
Ver métodos experimentales
No
Es suficiente ser capaz de descartar
Revisar sobre *quasi experiments*
Entonces la evaluación requiere un experimento verdadero
Revisar experimentos verdaderos
¿Están considerándose costos?
Sí
Revisar análisis de costos
No
Conducir la evaluación como se planeó
Preparar el reporte
Preparar la utilización y puesta en común de los hallazgos

Figura 15.2

El evaluador debe:

1. Familiarizarse con los programas sociales no lucrativos, del comportamiento y de la salud.
2. Seguir las etapas y el proceso sugeridos para planear la evaluación.
3. Tener claramente definido el propósito general del proyecto.
4. Reconocer a quienes va dirigido el programa y el ámbito sociopolítico que subyace al mismo.

Procedimientos:

Paso 1. Identificar al personal y las figuras participantes de importancia para el programa:
- Personas o instituciones que tienen un interés genuino en que el programa tenga éxito y, por consiguiente, consideran la evaluación como un factor necesario e importante.
- Ubicar a los *patrocinadores* del programa.
- Conocer en la medida de lo posible a los destinatarios o beneficiarios del mismo.

Paso 2. Establecer reuniones previas, con el fin de ubicar:
- ¿Quién requiere la evaluación?
- ¿Qué tipo de evaluación desea realizarse?
- ¿Por qué se desea este tipo de evaluación?
- ¿Cuándo y a quiénes deben entregarse los resultados?
- ¿Con qué recursos se disponen?

Paso 3. Decidir el mejor momento para realizar el estudio evaluativo:
- Considerar la sistematización de las actividades propuestas, horarios, calendarización, agendas y eventos de los participantes en dichos procesos, así como actividades y situaciones de oportunidad o de amenaza al proceso de evaluación.

Paso 4. Revisión de la literatura:
- Esto incluye la revisión de literatura, revisión documental institucional y estándares internacionales si es el caso, enriqueciendo estas acciones con trabajos de campo, entrevistas con expertos relacionados o con trabajos afines, etcétera.

Paso 5. Definir la metodología, acorde con el tipo de estudio que se determinó realizar, esto incluye:
- Estrategias y diseño.
- Población objetivo.
- Muestra.
- Control y comparación de grupos.
- Selección de instrumentos de medición.
- Recolección y concentración de la información obtenida.
- Análisis estadístico.
- Conclusiones.
- Sugerencias.
- Reporte final.

Paso 6. Detección de fortalezas-debilidades y oportunidades-amenazas del estudio evaluativo, esta detección se hace desde las reuniones de planeación, con la participación de los involucrados en el proceso evaluativo.

Áreas de interés del estudio evaluativo

Los resultados evaluativos pueden enfocarse a ciertas zonas o áreas del programa que está evaluándose, puede ser a una o varias, dependiendo de los propósitos, de tal manera que se puede realizar:

a) *Evaluación de las necesidades*. Generalmente implica una detección de necesidades en la comunidad a quien va dirigido el programa.
b) *Evaluación del proceso*. Sirve para determinar el desarrollo del programa; si está cumpliendo las metas planteadas y si ha considerado las características de los destinatarios.
c) *Evaluación del resultado o producto final*. Esta evaluación es la que más frecuentemente se realiza, y da cuenta del éxito y el impacto final del programa.

PROGRAMAS SUSCEPTIBLES DE EVALUACIÓN

Sociales

- Sistema de justicia.
- Seguridad pública.
- Protección ciudadana.
- Prevención del delito.
- Rehabilitación social.
- Asistencia social.

Educativos y del comportamiento

- Calidad de la enseñanza y el aprendizaje.
- Integración de niños, adolescentes y adultos con discapacidad, en los sistemas educativos regulares, de todos los niveles.
- Programas curriculares innovadores.
- Efectividad de los métodos educativos.
- Desempeño docente.
- Técnicas de modificación de conductas en el aula.
- Estilos de aprendizaje.

Salud

- Calidad de primero, segundo y tercer nivel de los servicios hospitalarios, clínicas y centros de salud.
- Prevención de enfermedades tanto físicas como mentales.
- Prevención y control de conductas adictivas.
- Control de calidad en los procedimientos de los servicios de salud.

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Existen dos maneras de interpretar los resultados obtenidos en el estudio educativo, una con referencia a la *norma* y la otra con referencia al *criterio*. Ambas requieren de una precisión de los requerimientos o parámetros, así como de elementos de juicio previamente establecidos a la intervención evaluativa.

En seguimiento de la tradicion, la forma para interpretar los resultados arrojados por un instrumento de medida ha sido la que establece la calificación referida a una norma ya sea grupal o bien poblacional. En el primer caso, la referencia es limitada debido a que está dada por las puntuaciones de donde pertenece el destinatario: una población determinada y a veces reducida para ser inferencias. La calificación que obtenga un individuo se interpretará en función del desempeño alcanzado por el grupo de referencia, calificándolo según la ubicación de sus resultados en el marco total de puntuaciones del grupo.

La evaluación referida a una norma

Está relacionada con el grupo de referencia en el que se haya basado la comparación, por lo que un cambio en el grupo dará como resultado un cambio en la interpretación de la calificación individual. Siendo ésta relativa, no podría iniciar lo que el individuo puede hacer respecto de sus limitaciones curriculares o en sus dominios para el trabajo, solamente llegaría a saber lo que logra con referencia a otros individuos. Su propósito principal es el de ordenar, calificar y catalogar a los sujetos respecto del atributo por rasgo medido en el mismo grupo de referencia. El referente de comparación es el nivel general de un grupo determinado (otros individuos, instituciones, programas y el promedio de la clase). Aplicada al aprendizaje del alumnado, la evaluación establece la comparación entre el rendimiento de cada sustentante con el rendimiento promedio de la clase en la que se sitúa, aunque esta comparación también puede establecerse con el promedio de otras clases, con la media de toda la institución o con la nacional. En contraposición a las evaluaciones con referencia al criterio.

La evaluación referida al criterio

También llamada evaluación criterial, presenta la característica distintiva de proporcionar la ubicación de los sujetos con relación a dominios de conducta observable previamente definidos, centrándose en lo que hacen o son capaces de hacer los sujetos, en lugar de tomar como referencia la conducta de otros sujetos o de la norma del grupo.

Una de las definiciones más aceptadas de las pruebas referidas al criterio es la de Popham (1978), la cual señala que este tipo de evaluación se utiliza para contrastar el estatus absoluto del sujeto respecto de algún dominio de conductas bien definido. Ésta se hace mediante la determinación precisa y concreta de los rendimientos que pretenden alcanzarse. Ello supone la formulación previa de estándares de evaluación pertinentes que faciliten la tarea de determinar si un individuo ha alcanzado los objetivos previstos; los criterios de evaluación deben estar formulados concreta y claramente. Se pretende que el sustentante alcance un determinado nivel en el ciclo escolar o que aprenda a hacer algo previamente acordado, intentando establecer un equilibrio entre los resultados conseguidos y los objetivos propuestos. La idea es evaluar el resultado del aprendizaje tomando como punto de referencia el criterio marcado y/o las fases en que éste ha podido desglosarse, independientemente del nivel del grupo.

Ambos tipos de evaluación requieren hacer explícitos los términos en que las conductas o rendimientos que el sujeto exhibe durante la medición van a considerarse adecuadas, deseables o aprobadas; sin embargo, en la referencia a normas, generalmente no se determina un dominio inicial o criterio mínimo, sino la distribución normal, que es el parámetro de referencia. Esto a diferencia de los referidos al criterio, donde, de comenzar con una clara especificación y delimitación de conductas de referencia, se facilitará el diseño y el uso pretendido de la medida, lo cual es un elemento central para la fase de construcción del instrumento. Ambos tipos de evaluación son útiles, dependiendo del tipo de proyecto o programa que va a evaluarse.

Plataforma conceptual de la evaluación

La evaluación retoma conceptos de sociología, economía, medicina, educación, ecología, física, matemáticas, administración y psicología.

UN MODELO DE INVESTIGACIÓN[†]

PROPÓSITOS

El propósito central de esta parte es que el lector sea capaz de realizar un estudio, encuesta o investigación, analizando y procesando los datos obtenidos mediante un instrumento de medición.

El lector:

1. Planteará el problema de investigación en forma clara, sencilla y precisa.
2. Seleccionará de manera adecuada la muestra que participará en dicho diseño de la investigación.
3. Utilizará un cuestionario confiable como instrumento de medición.
4. Aplicará el cuestionario en forma ética, supervisando las encuestas y no induciendo las respuestas en ninguna circunstancia.
5. Procesará los datos con la mayor precisión posible utilizando adecuadamente los medios disponibles, sean manuales o automáticos.
6. Presentará los resultados obtenidos, sin ninguna tendencia, sesgo o alteración.
7. Redactará un informe final, señalando los alcances y limitaciones, las recomendaciones y las conclusiones de dicho estudio.

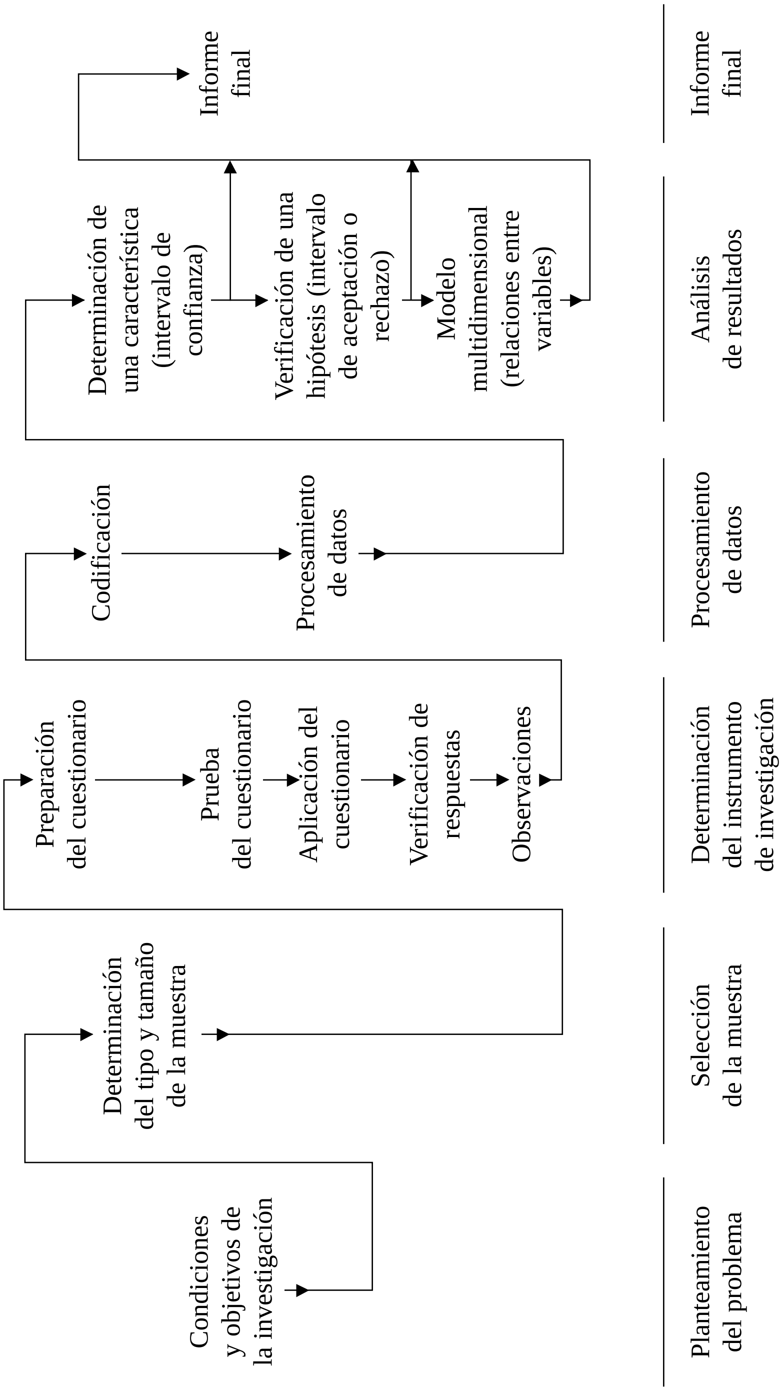
DATOS INICIALES

Al emprender una investigación, conviene saber a dónde se quiere llegar, para determinar los métodos estadísticos que van a utilizarse y el instrumento de investigación que se diseñará. Es un diálogo entre el principio y el final; cuando se habla de datos iniciales se hace referencia a las informaciones que tienen que especificarse. En el caso de las investigaciones de opinión pública, particularmente las electorales, muchas de estas informaciones están contenidas en la ley, por tanto, deben darse a conocer en los resultados. En cualquier investigación, siempre se exige una nota metodológica.

Antes de iniciar una investigación se necesita responder a diversas cuestiones. Una investigación comienza, aunque parezca insólito, por saber *qué se desea investigar*. En muchas ocasiones se tiene una idea imprecisa, difusa, de ello. Además, generalmente las primeras ideas no se sostienen al final. En la práctica, un buen número de empresarios solicita investigaciones de mercado y cuando se les pregunta qué desean investigar, la respuesta es: ¡usted es el investigador! Planear el problema no es tan fácil como parece. También suelen ocurrir situaciones donde el objetivo parece obvio y, sin embargo, no es así. En una ocasión una empresa solicitó un estudio sobre tiendas de departamentos. La compañía investigadora realizó un estudio de hábitos de consumo, pero lo que buscaba el cliente era ¡dónde ubicar los establecimientos! Conviene tomarse todo el tiempo requerido hasta formular claramente las metas (figura 15.3). Otra dificultad que aparece con relativa frecuencia al iniciar una investigación es la formulación de hipótesis. Éstas se utilizan en especial cuando al procesar los datos van a usarse métodos inferenciales, justamente las pruebas de hipótesis. Existen métodos estadísticos que no requieren hipótesis, como son los multidimensionales, o bien, en estadística descriptiva, donde se estudia una población y una variable.

[†] Dr. Adip Sabag Sabag

Figura 15.3 Etapas de una investigación



¿A qué sectores económicos, políticos y sociales hay que dirigirse? El costo de un estudio aumenta o disminuye de acuerdo con el sector al que va a dirigirse. Cuando se trata de una investigación de mercado, el cuestionario va encaminado a una población de consumidores potenciales. Ahora bien, como las clases medias y altas son las que tienen las mayores posibilidades de compra, las encuestas se dirigen principalmente a este universo.

¿Qué regiones abarcará el estudio? Es muy importante especificar la zona donde va a aplicarse el estudio. Una investigación ni cuesta igual ni toma el mismo tiempo en el nivel local que en el nivel nacional. Los resultados se suscribirán exclusivamente a la región donde se realizó la investigación.

¿De qué tiempo se dispone para el estudio? El tiempo del estudio es una información determinante y se refiere exclusivamente al periodo durante el cual se levanta la encuesta o se realiza la investigación. Es conveniente señalar que algunas investigaciones de encuesta son como una fotografía: cuanto más breve sea la exposición, más alta será la definición de los resultados. Hay investigadores que presumen de haber tardado 10 o 15 años realizando la investigación; por desgracia, con el tiempo cambian las circunstancias y, por tanto, los resultados ya no reflejan la realidad estudiada.

¿Con qué recursos humanos, técnicos o económicos se cuenta? Contrario a lo que se piensa, en muchas investigaciones no se requiere una gran cantidad de dinero. Con frecuencia se recurre a infraestructuras ya establecidas de las que se puede disponer con cierta facilidad. Buena parte de las investigaciones se hace con estudiantes, a quienes se considera honestos y confiables, con una actitud positiva hacia la investigación. Cuando se trata de encuestas, los estudiantes son una mano de obra abundante, confiable, eficiente y con un costo mínimo. Por otra parte, las universidades y otras instituciones disponen de computadoras en las que pueden procesar los datos de manera confiable y a bajo costo.

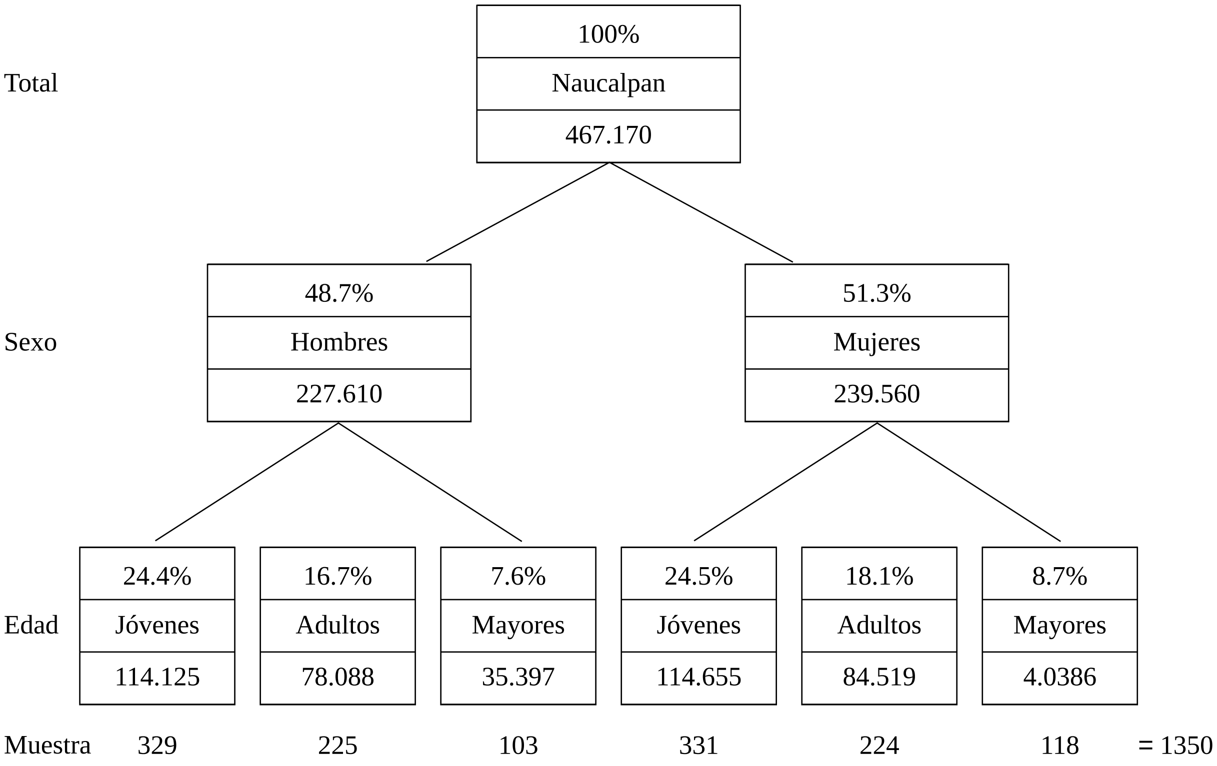
¿Qué precisión se desea obtener? La parte más delicada del estudio es justamente la precisión que se desea obtener. Calcular los errores estadísticos es lo que le hace científico y remite al tipo y tamaño de la muestra. En la práctica, una buena investigación es la que tiene una seguridad entre 95 y 99%, una homogeneidad (cuando no se dispone de estudios previos), de 50/50 y un error aceptable entre 1 y 5%. Antes de iniciar una investigación, es necesario decidir dicha precisión deseada. Para más información sobre el muestreo, consulte el capítulo 5.

TIPO Y TAMAÑO DE LA MUESTRA

La muestra más sencilla es la de testigos (o testimonios) privilegiados. Consiste en buscar exclusivamente ciertas características en la población (estudiantes, pasajeros de avión, tarjetahabientes, etc.). Se recomienda aplicar un mínimo de 250 encuestas para asegurar la tendencia en las respuestas. Las variables que distinguen a la población, en general, son las preguntas-filtro del cuestionario; por ejemplo: ¿tiene tarjeta de crédito? ¿Ha viajado en avión? ¿Escolaridad, edad?...

La muestra más utilizada es la de cuotas, que garantiza la representación de la población, utilizando los datos del censo o de otras fuentes documentales. Algunos investigadores consideran que una muestra de cuotas es equivalente en errores estadísticos a la mitad de una muestra aleatoria. Así, una muestra por cuotas de 800 personas equivale a una muestra aleatoria de 400 personas. Por ejemplo, para una investigación en Naucalpan, con personas mayores de 18 años y en la que se utilizó el método de cuotas, se recurrió a una segmentación a partir de los datos del *X Censo General de Población y Vivienda*, que proporciona los datos por edad y sexo (figura 15.4). A partir de los datos el investigador decidió aplicar 1 350 encuestas, que se dividieron en los diferentes grupos de edad y sexo.

Figura 15.4 Muestra por cuotas (*X Censo General de Población y Vivienda,* INEGI).



La muestra por cuotas no garantiza la representatividad, por ejemplo, selección en mercados, centros de diversión, etcétera.

La muestra aleatoria permite calcular los errores estadísticos a que está sujeta la investigación. La *seguridad* de una muestra se refiere al error de muestreo. Una seguridad de 95% quiere decir que, si tomamos 100 muestras, se esperan cinco donde los resultados *se alejan de la realidad* o, lo que es lo mismo, que hay un 100% de probabilidades de ser ciertas. La *homogeneidad* se refiere al grado de conocimiento de una población. Se indica, por lo general, en términos de una proporción (p/q) y ésta se expresa en porcentajes 50/50, 70/30 o 60/40. Siempre la suma dará 100. Cuando en una investigación no se tienen antecedentes de ningún tipo, la única proporción a utilizar es 50/50, que es el caso más favorable cuando no se conoce nada de la población. Finalmente, el *error aceptable* indica el margen de error de los resultados. Así, cuando en una encuesta se dice que un candidato obtendrá 53% de votos, éste no es el resultado de la población, el cual se encontrará sumando y restando el error aceptable. Si es de 4%, quiere decir que dicho resultado se ubicará en el intervalo {49–57}.

La fórmula más sencilla para calcular una muestra aleatoria, cuando la seguridad es de 95% y la homogeneidad o proporción es de 50/50 (en estás condiciones se calculan prácticamente todas las muestras), es uno entre el error aceptable al cuadrado $\left(\frac{1}{e^2}\right)$. Por ejemplo, si $S = 95\%$, $p = 50/50$ y $e = 2\%$, el tamaño de la muestra será de $\left(\frac{1}{e^2} = \frac{1}{0.02 \times 0.02}\right) = 2500.$

Este resultado es válido cuando la muestra es no exhaustiva, es decir, cuando no agotó el universo. Éste debe ser mayor o igual que siete veces la muestra. Por lo contrario, cuando el universo es exhaustivo, es decir, la muestra es mayor que el universo, entonces se recurre a una fórmula de corrección $n' = \frac{Nn}{(N+n)}$, donde N es el universo y n la muestra no exhaustiva. Por ejemplo, si quiere una muestra donde S = 95%, p = 50/50, e = 2%, pero un universo de 300 personas, la muestra será de 2 500, que agota al universo de 300 personas. Por tanto, recurre a la fórmula de corrección y queda: $\frac{2500 \times 300}{(2500+300)} = 268.$ En vista del resultado, en lugar de utilizar una muestra se prefiere levantar un censo, ya que se evitan los errores estadísticos y se cuenta con mayor precisión.

Cuando se dispone de una lista de individuos y es necesario seleccionar una muestra aleatoria, en la práctica las personas dividen el total entre el tamaño de la muestra y a intervalos regulares van seleccionándose los individuos. De esta manera se cree que los individuos fueron seleccionados al azar. Lo que conviene hacer es que el primer número se seleccione por sorteo o utilizando una tabla de números aleatorios, y a partir del dígito que salió, la serie ya se aplica (muestreo sistemático).

Errores frecuentes. Uno de ellos es pensar que cuanto más grande sea la muestra, mayor será la precisión de los resultados. En unas elecciones presidenciales en Estados Unidos, *Literary Digest* lanzó 10 millones de cuestionarios y se recibieron alrededor de 2 millones. A pesar del número tan alto de respuestas, el margen de error fue de 18%. Para una muestra aleatoria con este error habrían bastado 31 entrevistas individuales. Al mismo tiempo, otros institutos, utilizando el cálculo de probabilidades, entrevistaron a 4 500 personas y acertaron con 1% de error. La confiabilidad de una muestra no depende de la cantidad de entrevistados, sino de la calidad de sus testigos. Aún más dramático: en un diagnóstico clínico, el examen de sangre requiere unas cuantas gotas, ¡no litros! Para saber que el agua del océano es salada, basta probar una cucharadita. Parafraseando el proverbio popular, “para conocer a Inés basta una vez”.

Otro error frecuente, aun entre profesionales, es creer que una buena muestra es del 10% del universo. O también, según el tamaño, del 6 o 20%. Cabe repetirlo: la precisión de los resultados no depende del tamaño de la muestra sino de la forma de seleccionar la muestra de los individuos seleccionados.

Instrumento de investigación

Hay diferentes instrumentos de investigación: entrevista, observación, entre otros. Sin embargo, el método más popular y accesible es el cuestionario. Presenta ventajas importantes: es el mismo para todas las personas; pueden hacerse estudios comparativos tanto longitudinales como transversales y correlativos con las propias variables y con otros estudios, y analizar estadísticamente los datos con relativa facilidad; además, es objeto de derechos de autor y su costo es bajo. No obstante, el diseño de un cuestionario es más adecuado y sensible, se requiere cierta experiencia.

Un buen cuestionario es el que gana información, no el que la pierde. Por tanto, una pregunta debe ser formulada para aquel fin y se requiere evitar las que ya condensan información, como es el caso de grupos de edad, intervalos de salario, etc. También se considera que es mejor el cuestionario que formula preguntas indirectas. Las personas tienden a evitar y, por consiguiente, a mentir cuando se les interroga directamente.

Antes de iniciar el diseño de un cuestionario, conviene considerar las características de las escalas estadísticas, ya que de la escala y el número de sujetos participantes dependerá el método estadístico por utilizar.

Según el marco teórico que esté usándose es posible clasificar las variables de un cuestionario en: 1. Control, pasivas, independientes o estructurales y 2. Experimentales, activas o dependientes. Las variables de control son las que estructuran una investigación, dan cuenta de la representatividad de la muestra y permiten construir el perfil del entrevistado, perfil al que se sujetan los resultados. Las variables de control más utilizadas son: edad, sexo, lugar de nacimiento, escolaridad, medio socioeconómico, estado civil, ocupación principal. Otros análisis requieren variables diferentes, como son: periódico que lee, y barómetros como presión social y preferencias electorales.

El *sexo* es una pregunta que, cuando hay un entrevistador de por medio, no se formula, sino que se observa, aunque pueda haber distintas respuestas, como: masculino, femenino, homosexual, lesbiana, bisexual o transexual. En México, las respuestas a estos últimos reactivos no se dan; por tanto, sólo se clasifican en hombre o mujer.

La *edad* es una pregunta que encierra muchos prejuicios, a tal grado que importantes investigaciones se desechan por haber preguntado la edad, ya que las personas tienden a mentir, a quitarse, aumentarse o redondear su edad y aparecen con frecuencia cifras terminadas en cero y en cinco, por ejemplo, 30 años, 25 años… Para resolver este problema, se recomienda preguntar el año de nacimiento en lugar de la edad, ya que las personas sienten que se trata de un dato oficial impersonal y si intentan mentir, muestran un tiempo prolongado de reacción.

Lugar de nacimiento. Como el número de cuestionarios en una investigación es relativamente pequeño, en lugar de formular la pregunta de manera abierta conviene agrupar la información en cuatro posibilidades: capital, interior de la República, extranjero y extranjero naturalizado, depende del objetivo.

Estado civil. La ley sólo marca dos estados civiles: soltero o casado. Así, divorciado, separado, viudo o unión libre pasan todos a ser solteros. Ahora bien, hay investigaciones que necesitan justamente estos datos, por lo que se recomienda, en este caso, utilizarlos.

Medio socioeconómico. Hay dos maneras de interrogar sobre el medio socioeconómico: 1. Directamente el ingreso mensual, pero prácticamente nadie sabe a ciencia cierta cuánto percibe. Los empleados confunden sus ingresos, ya que se expresan en un salario bruto y otro neto. Por lo general, las personas no hacen esa diferencia. Por tanto, se recurre a los intervalos de ingresos, que tienen mejor resultado. 2. Otra forma es agrupar por estratos, es decir, por las diferentes características de la persona. Además, si se entrevista en el domicilio, se puede observar, sin interrogar directamente, la colonia donde vive, estado de la vivienda, etc. Todos estos datos arrojan diferentes estratos: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo. Existen mapas mercadológicos donde se señalan las zonas urbanas por la categoría social.

Estudios realizados. En algunos cuestionarios la pregunta se reduce a cuántos años de escolaridad completos ha realizado el sujeto. Aunque de esta manera se gana información, se pierde el sentido de los ciclos escolares, por lo que es preferible interrogar directamente sobre los niveles escolares alcanzados: saber leer y escribir, primaria, secundaria, estudios técnicos, preparatoria, estudios superiores y posgrado. Todos estos niveles y otros más pueden reagruparse en cuatro: sin instrucción, educación elemental, educación media y educación superior.

Ocupación. El análisis de esta pregunta puede convertirse en un dolor de cabeza. Se habla de más de 70 mil actividades profesionales, que en un gran esfuerzo de síntesis algunos catálogos simplifican en 100. Este número es alto, por lo que terminamos condensando la información en nueve actividades profesionales: campesino, empleado (público o privado), obrero (personas asalariadas), oficiales (personas que trabajan de forma independiente), profesionales, amas de casa, estudiantes, comerciantes (donde se incluye a los comerciantes, banqueros). A veces se consideran otras categorías profesionales, como artistas, militares, intelectuales, etcétera.

El *periódico que lee* es una información que permite, además de confirmar el estrato socioeconómico, controlar al entrevistador, puesto que en principio él desconoce el perfil de cada periódico o se trata de investigaciones de otros estados, los nombres y la importancia de los diarios que ahí circulan.

Los *barómetros* permiten traducir el optimismo o el pesimismo de las personas y también su actitud frente a sus gobernantes. En épocas de elecciones la preferencia electoral permite hacer predicciones de voto. Los indicadores de estos barómetros dan información relevante al cruzarse con otras variables.

Las variables activas o dependientes, son las que constituyen realmente el cuestionario. Una buena pregunta debe satisfacer las siguientes condiciones: despertar el interés, ser concisa, de fácil comprensión y no producir respuestas tendenciosas. Nunca se deben planear preguntas personales, discretas o que evoquen deseos (sexo, higiene, ingresos, etc.). También hay que evitar cuestiones que requieran hacer un esfuerzo de memoria, las preguntas que llevan a respuestas de *sí* o *no*. Demasiados *¿por qué*? pueden predisponer al entrevistado. No es conveniente plantear preguntas ambiguas, difíciles o complejas.

Tanto las preguntas como el cuestionario deben ser breves y ágiles. Resulta fatigante responder a un cuestionario con demasiadas interrogantes. Ahora bien, si al probar un cuestionario en una pregunta se obtiene la misma respuesta, hay que modificar la cuestión, puesto que más que una variable se trata de una característica de la población.

PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE DATOS

El procesamiento de datos puede ser manual o automático. El manual, para ciertos cálculos estadísticos, resulta muy laborioso y cansado. Sin embargo, es el método más adecuado, aunque parezca paradójico, cuando no se dispone de mucho tiempo. Por lo contrario, el procesamiento automático (con computadora) es el método más adecuado sobre todo cuando se desean análisis estadísticos multidimensionales.

Cuando el procesamiento de datos es manual, es muy probable que los resultados sean incorrectos. Para evitar esto, conviene cruzar las respuestas para confirmar los resultados y cotejar los parciales con el total. A pesar de la precisión y rapidez de los medios electrónicos, el problema principal radica en la captura de datos, fuente importante de errores. Algunos programas de cómputo cuentan con algoritmos para controlar la captura de datos, pero siempre existe un margen de error. Hay que tener cuidado con algunos programas de cómputo que arrojan resultados susceptibles de interpretaciones equivocadas.

Ahora bien, los datos pueden analizarse desde la estadística descriptiva, que permite determinar una variable y un intervalo de confianza; en cambio, la estadística inferencial contrasta una hipótesis y un intervalo de aceptación o rechazo y puede manejar simultáneamente un buen número de variables. La estadística multidimencional puede tratar al mismo tiempo todas las variables necesarias (lo cual depende de la capacidad de la computadora que se tenga), y aunque existan pocos casos y muchas variables, pueden encontrarse con relativa facilidad las relaciones que existen entre ellas.

INFORME FINAL

Nada mejor que recordar a Santo Tomás cuando comenta la obra de Aristóteles, *De Anima*: aquel que hace un informe persigue tres objetivos: 1. Ganarse la buena voluntad del lector al mostrar la utilidad de su investigación, 2. Disponerlo al estudio, al proponerle el orden y el plan, y, finalmente, 3. Mantenerlo atento al testimoniarle las dificultades encontradas. Al presentar los resultados hay que ser siempre honestos, sobre todo cuando son negativos, contrarios a lo que se esperaba o irrelevantes. Es indispensable evitar las opiniones personales. Debe mostrar siempre los hechos y no caer en falacias privilegiando los no hechos o expectativas. También hay que evitar las conclusiones o inferencias de resultados que en realidad no aparecen en el estudio. No deben presentarse como positivos resultados que son negativos, pensando que sólo aquéllos son exitosos, cuando en realidad un resultado negativo es tan interesante como un positivo.

TABLAS DE CONTINGENCIA

En general, es cuando se clasifica a los sujetos en diferentes categorías y se cuentan los que forman cada una de ellas, es decir, se considera la frecuencia en cada categoría presentada por una variable categórica, nominal o cualitativa.

Estas clasificaciones, cuyas categorías son mutuamente excluyentes y completamente exhaustivas, implican que existen suficientes categorías para ubicar a todos los elementos de la muestra.

Prueba de homogeneidad

El valor estadístico χ^2 se utiliza con frecuencia para determinar si dos o más muestras, y por consiguiente las poblaciones, son homogéneas; es decir, si las distribuciones de los datos son similares respecto de una variable de criterio en particular.

Para ilustrar lo anterior, suponga que desea conocer las actitudes de la iniciativa privada y el gobierno de un estado de la República Mexicana respecto de la aprobación de un proyecto de educación especial. Con el fin de llevar a cabo está investigación, selecciona dos muestras al azar por completo, separadas e independientes; una correspondiente a la iniciativa privada y la otra al sector gubernamental. La variable de criterio es la actitud, expresada en las categorías favorable o no favorable. La prueba de homogeneidad χ^2 indica que las actitudes de ambos grupos no difieren significativamente, también que las dos poblaciones pueden considerarse homogéneas o esencialmente sensibles a diferencias entre ellas (forma, tendencia central o variabilidad) que afectan las proporciones en las categorías. En la prueba de homogeneidad no es necesario que las muestras seleccionadas de cada población tengan el mismo tamaño, pero es recomendable que sean similares en magnitud.

Las pruebas χ^2 de homogeneidad son, en ciertas condiciones, idénticas a las pruebas paramétricas t de Student para dos muestras, como se indicó en el capítulo 10. Por otra parte, las pruebas de homogeneidad constituyen alternativas muy útiles cuando no es posible cumplir con los requisitos de pruebas paramétricas.

■ Ejemplo 1

Aplicación de la prueba χ^2 para la homogeneidad de dos poblaciones.

Un agrónomo desea comparar las proporciones de crecimiento anual de abetos en los estados de Michoacán y Chihuahua (véase el cuadro de la página siguiente). Las dos poblaciones abarcan árboles que crecen tanto en una como en otra entidades; el muestreo se completa cuando se seleccionan al azar e independientemente 100 árboles de cada población.

La variable de criterio sobre la proporción de crecimiento se estableció arbitrariamente en dos categorías: menos de 10 cm y 10 cm o más. La hipótesis tiene que ser no direccional o de dos colas. La H_0 señala que ambas poblaciones son esencialmente homogéneas; o sea, que no difieren respecto de la medida del criterio. Debido a que el error de tipo II es muy significativo para el investigador, éste elige $\alpha = 0.05$, cuyo valor crítico es de 3.84 para un grado de libertad. Cabe tener en cuenta que no todos los árboles de las muestras sobrevivieron un año, por lo que *A* se redujo a 96 unidades y *B* a 94. Los árboles faltantes se clasificaron de acuerdo con la tasa de crecimiento y la observación de la tabla de frecuencias.

Para calcular el valor de χ^2 se utilizará la fórmula siguiente:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{i\,jkl}$$

De esa manera se elimina el problema de calcular frecuencias esperadas. Por razones de cálculo esta fórmula se reserva para *n* menores que 100. Como la x^2 es mayor que el valor crítico y, por consiguiente, se rechaza la H_0 a un nivel de 5%, los datos parecen apoyar la conclusión de que la proporción de crecimiento en el estado de Michoacán es mayor que en Chihuahua.

El agrónomo no podrá realizar esta comparación específica a un nivel conocido de probabilidad y con una prueba no direccional de dos colas de *ji*-cuadrada. Si tal hipótesis alterna pudiera haberse establecido con anterioridad y si se hubiesen cumplido otros requisitos, una prueba paramétrica de *t* de una cola habría aceptado esta conclusión.

Frecuencias observadas
(tasa de crecimiento)

	Menos de 10 cm	10 cm o más	Total
Muestra *A*	9 (*a*)	87 (*b*)	96 (*i*)
Muestra *B*	23 (*c*)	71 (*d*)	94 (*j*)
Total	32 (*k*)	158 (*l*)	190 = *n*

A continuación se presenta al lector una forma desarrollada de resolver este problema:

Paso 1. La población la constituyen abetos de 3 años de edad, estudiados en el periodo de un año.
Población *A*. Los abetos que crecen en el estado de Michoacán.
Población *B*. Los abetos que crecen en el estado de Chihuahua.

Paso 2. La muestra *A* se compone de 100 plantas seleccionadas al azar de la población *A*.
La muestra *B* consta de 100 plantas seleccionadas al azar de la población *B*.

Paso 3. La variable de criterio es la tasa de crecimiento durante el periodo de un año. Expresada como proporción arriba de 10 cm.

Paso 4. Modelo de decisión.
H_0: Las tasas de crecimiento de las poblaciones *A* y *B* son iguales.
H_1: Las tasas de crecimiento de las poblaciones *A* y *B* son diferentes.

Paso 5. Nivel de confianza: $\alpha = 0.05$.

Paso 6. RD: si $\chi_c^2 \geq 3.84$, se rechaza H_0.

Paso 7. Fórmula y desarrollo numérico:

$$\chi_c^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{i\,jkl} = \frac{190(9\times 71 - 87\times 23)^2}{96\times 94\times 32\times 158}$$

$$= \frac{190(639-2001)}{45\ 625\ 344} = 7.73$$

$$\boxed{\chi_c^2 = 7.73}$$

Paso 8. Debido a que 7.73 > 3.84, se rechaza H_0.

Conclusión

Según la clasificación de este estudio, la distribución de las tasas de crecimiento no es igual: en ambas difiere significativamente.

■ Ejemplo 2

Prueba de homogeneidad para tres o más muestras.

Un estudio de mercado en escala nacional referente a tres estilos de sacos de gamuza para caballero se plantea determinar las distintas preferencias según regiones. Se obtienen cuatro muestras de 60 compradores, una por cada región considerada: norte, sur, este y oeste. Por tanto, la variable de criterio es la preferencia y se obtiene al preguntar a cada comprador cuál es su estilo favorito. Así pues, la hipótesis nula establece que no existen proporciones iguales.

Las frecuencias observadas y esperadas se muestran en el cuadro del ejemplo 3 sobre las actitudes (pag. 608). Se obtuvieron las esperadas mediante los totales marginales de las tablas de frecuencias observadas. En el ejemplo, las frecuencias esperadas para cada celda en una columna en particular son las mismas, debido a que todos los marginales de los renglones también son iguales. Las celdas en la columna que representa el estilo *A*, por ejemplo, proporcionan las siguientes frecuencias esperadas: $\frac{(41)(60)}{240} = 10.25$.

Observe que la tabla de estas frecuencias es congruente con la hipótesis nula de no preferencias de estilo por renglón, aunque los estilos *B* y *C* son más populares que el *A*.

		Estilo			
		A	*B*	*C*	
Región	Este	6 10.25	32 26.5	22 23.25	60
	Norte	10 10.25	21 26.5	29 23.25	60
	Sur	22 10.25	15 *y* 26.5	23 23.25	60
	Oeste	3 10.25	38 26.5	19 23.25	60
		41	106	93	240

$$y = \frac{106\ (60)}{240}$$

$$x = \frac{41\ (60)}{240}$$

$$x = 10.25$$

Calculando la χ^2, se tiene:

$$\chi_c^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe} = \frac{(6.0 - 10.25)^2}{10.25} + \frac{(32.0 - 26.5)^2}{26.5} \ldots + \frac{(19.0 - 23.5)^2}{23.5}$$

$$\chi_c^2 = 34.93$$

Los grados de libertad para este problema son 6, o sea (4 – 1) (3 – 1). El investigador ha escogido el nivel de significancia $\alpha = 0.01(1\%)$ y, para dichos grados, la *ji*-cuadrada que se observa es 16.81. como ésta es mayor, o sea $\chi_c^2 \geq \chi^2$ (crítica), entonces el investigador infiere con bastante confianza la relación de preferencia entre el estilo del saco y la región de procedencia del posible comprador.

El investigador puede necesitar información adicional del cuadro anterior; por ejemplo, determinar si el estilo *A* es menos aceptable que los *B* y *C* en todas las regiones. Para realizar esto, se necesita un análisis más cuidadoso, que se considerará al estudiar el análisis de varianza no paramétrico (véase también M. McSweeney, 1977).

Otra opción es extraer información nueva para el análisis de χ^2 de cada comparación o el contraste de intereses, como lo señaló la inspección en la tabla completa. También ceder a cualquier prueba adicional de confianza y efectuar observaciones sobre cada una de las celdas o conjunto de celdas que hayan contribuido altamente a la obtención de χ^2 para la tabla de contingencia anterior; por ejemplo, los valores de las celdas *g* y *h* sobresalen en particular (13.5 y 5.0, respectivamente), por lo que juntos contribuyen a más de la mitad del total de χ^2 (13.5 + 5.0 = 18.5). Con base en esto, el investigador puede inferir que es posible vender el estilo *A* con mayor éxito en las regiones del sur que el estilo *B*; pero no está en condiciones de determinar la probabilidad de verdad o error en esta decisión. Si una decisión errónea acarreara consecuencias financieras graves, se requiere una prueba estadística adicional a partir de una nueva muestra, en especial para la región sur, con el fin de comprobar la hipótesis de no diferencia en la referencia de los estilos *A* y *B*.

Prueba de independencia

A diferencia de la prueba de bondad de ajuste para una muestra, la prueba de independencia siempre considera medidas de dos variables para cada elemento de la muestra, y no se utiliza una distribución teórica independiente *per se* para construir frecuencias esperadas. Algunas veces se conoce como *prueba de asociación* y se relaciona con los procedimientos de correlación. La muestra para la prueba de independencia se compone de miembros seleccionados al azar de una sola población de interés.

Por consiguiente, la prueba se utiliza para determinar si las medidas en las dos variables de criterio son dependientes respecto de otra variable dentro de una población en particular. En este sentido, podrían investigarse las posibles asociaciones entre el precio de menudeo de televisores y la calidad de resolución; el número de libros que se leen y el nivel académico de los lectores; el peso de un mamífero y su capacidad craneal, entre otros temas.

En términos analíticos, la prueba de independencia es idéntica a la de homogeneidad. Una de las distribuciones más obvias es que el investigador determina el tamaño de cada muestra en la prueba de homogeneidad y, por ende, la frecuencia total para el problema y los totales marginales, tanto en las columnas como en los renglones. Asimismo, en la prueba de independencia únicamente se conoce la frecuencia total (el tamaño de la muestra); los totales marginales de cada renglón y columna son variables aleatorias cuyas frecuencias no se determinan hasta que la muestra ha sido extraída y los datos recopilados. En este nivel, el lector debe ser capaz de reconocer que el problema citado en el cuadro de abajo podría analizarse con una prueba de independencia.

■ Ejemplo 3

Se analizarán las actitudes de los residentes de una ciudad ante la construcción de un nuevo centro cívico (primera variable), las cuales son independientes de las que suscita la edificación de un nuevo palacio municipal (segunda variable). Si las dos variables se asocian positivamente, quienes están a favor del centro cívico opinarán en ese sentido respecto del palacio municipal. No obstante, si ambas variables son independientes, la gente que respalda la edificación del centro fluctuará en su posición hacia el palacio municipal: algunos aprobarán y otros no. Dicho de manera distinta, cuando las actitudes son independientes, el conocimiento de una no proporcionará información respecto de la otra. Se desarrollará este ejemplo más adelante. Como se observa en el cuadro siguiente, es posible definir una sola población y extraer una muestra; los miembros de ésta podrían responder a dos preguntas sobre actitudes: una, concerniente al centro cívico y, la otra, al palacio municipal.

Para elaborar la tabla de frecuencias observadas, se asignará a cada miembro una casilla o celda particular en un cuadro de doble entrada que contiene las dos respuestas posibles. Las frecuencias observadas marginales de la tabla se utilizan para calcular las frecuencias esperadas correspondientes a estas pruebas. Note que los entrevistados tienden a oponerse a ambos proyectos de construcción, pero, como es proporcional en relación con las marginales, la tabla de frecuencias esperadas describe una situación congruente con H_0. De los 132 sujetos a favor de proyecto *A*, cerca de 43% apoyará el proyecto *B*; por otra parte, de los 218 sujetos contrarios al proyecto *A*, alrededor de 43% estará a favor del proyecto *B*.

Frecuencias observadas

	Actitud *B*		
Actitud *A*	A favor	En contra	Total
A favor	47 (*a*)	85 (*b*)	132 (*i*)
En contra	102 (*c*)	116 (*d*)	218 (*j*)
Total	149 (*k*)	201 (*l*)	350 (*n*)

Frecuencias esperadas

	Actitud *B*		
Actitud *A*	A favor	En contra	Total
A favor	56.19 (*a*)	75.81 (*b*)	132 (*i*)
En contra	92.81 (*c*)	25.19 (*d*)	218 (*j*)
Total	149 (*k*)	201 (*l*)	350 = *n*

Desarrollo del ejemplo de prueba χ^2 de independencia:

Paso 1. La población consiste en los residentes adultos de la ciudad *Z*.

Paso 2. La muestra constituye 350 individuos escogidos al azar de la población.

Paso 3. Las variables de criterio son *A*: actitud hacia la construcción del nuevo palacio municipal (a favor o en contra) y *B*: actitud hacia la construcción del nuevo centro cívico (a favor o en contra).

Paso 4. Modelo de decisión.
H_0: las actitudes *A* y *B*, son independientes. H_1: las actitudes *A* y *B* están asociadas (son dependientes).

Paso 5. Nivel de confianza: $\alpha = 0.05$ (5%).

Paso 6. RD: si $\chi_c^2 \geq 3.84$, entonces se rechaza H_0.

Paso 7. Fórmula y desarrollo numérico:

$$\chi_c^2 = \sum \frac{fo^2}{fe} - n$$

$$\chi^2 = \frac{(47)^2}{56.19} + \frac{(85)^2}{75.81} + \frac{(102)^2}{92.81} + \frac{(116)^2}{125.19} - 350$$

$$= 39.31 + 95.30 + 112.10 + 107.48 - 350 = 354.20 - 350$$

$$\boxed{\chi_c^2 = 4.20}$$

Paso 8. Debido a que 4.20 > 3.84, se rechaza H_0.

Conclusión

Las actitudes *A* y *B* están asociadas en la población definida. La fuerza de esta asociación deberá calcularse con un coeficiente de correlación no paramétrico.

Si se utiliza la forma convencional, en una sola tabla de contingencia:

		Actitud *B*		
		A favor	*En contra*	
Actitud *A*	A favor	47 56.19	85 75.81	132
	En contra	102 92.81	116 25.19	218
		149	201	350

$$fe = 25.19 = \frac{201\,(218)}{350}$$

Con el modelo $\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$

Se tiene

$$\boxed{\chi^2_c = 4.20}$$

Procedimiento *post hoc*

Las pruebas de independencia sólo indican la presencia de asociación, pero no su magnitud (valor numérico). La sensibilidad de χ^2 a cualquier grado de asociación se incrementa en función del tamaño de la muestra. Sin embargo, se obtiene un valor significativo de χ^2 con una muestra grande, aunque la relación entre las variables es tan débil que su significado práctico resulta limitado. Cuando se ha rechazado la H_0 de independencia, hay que calcular un índice de asociación para obtener una estimación numérica de la fuerza de la relación. Estos índices incluyen el coeficiente Φ, el de Kramer y el de contingencia.

■ Ejemplo 4

Un investigador busca establecer si existen diferencias entre los hombres y las mujeres que presentan examen de admisión a la universidad. Admita que las puntuaciones de dicho examen se clasifican como aceptados o rechazados. Los datos se obtuvieron de una muestra aleatoria de 200 aspirantes de la población total que desea ingresar a esa institución; estos datos pueden exponerse en la siguiente tabla de contingencia (2 × 2).

	Aceptados	**Rechazados**	**Total**
Hombres	93 (*a*)	36 (*b*)	132
Mujeres	41 (*c*)	27 (*d*)	68
Total	134	63	200

Esto indica que la muestra ($n = 200$) la constituían 132 hombres y 68 mujeres; en ella, 93 hombres y 41 mujeres obtuvieron puntuaciones de aceptación. A continuación, se calculan las frecuencias esperadas respecto de si el sexo del aspirante es independiente de la puntuación de aceptación. El procedimiento es el siguiente:

Paso 1. Se calcula el total de puntuaciones aceptadas: 93 + 41 = 134.

Paso 2. Se encuentra la proporción de 134 (total de aceptados) respecto de n. Así, $\frac{134}{200} = 0.67$.

Paso 3. Se multiplica esta proporción por el número total de hombres en la muestra: 0.67 × 132 = 88.44; ésta es la frecuencia esperada para la casilla (*a*).

Paso 4. Se resta 88.44 de 132 (132 – 88.44) = 43.56, y así se encuentra la frecuencia esperada de hombres con puntuaciones de aceptación.

Tome en cuenta que la suma de las frecuencias esperadas para un renglón o columna será igual a la suma de las frecuencias observadas para ese mismo renglón.

Paso 5. Posteriormente, se calculan las frecuencias esperadas para las mujeres con puntuaciones de aceptación: se resta 88.44 de 134, lo que resulta 45.56, y sucesivamente se calculan todas las frecuencias esperadas, donde se aplica la siguiente fórmula en cada casilla:

$$fe = \frac{RC}{n}$$

donde:

fe = Frecuencia esperada de una casilla.
R = Total marginal del renglón de dicha casilla.
C = Total marginal de la columna de dicha casilla.
n = Tamaño de la muestra.

Paso 6. Se calcula χ^2 por medio del siguiente procedimiento para cada casilla:

$$\frac{(\left|fo - fe\right| - 0.5)^2}{fe}$$

Las líneas verticales $|fo - fe|$, indican que debe tomarse el valor absoluto de esa diferencia. Los resultados de las casillas se suman, y el total será la χ^2. La corrección de continuidad de Yates se utiliza debido a que el grado de libertad para este diseño es 1 y la distribución real es discontinua.

$$\chi^2_c = \frac{(4.06)^2}{88.44} + \frac{(4.06)^2}{43.56} + \frac{(4.06)^2}{45.56} + \frac{(4.06)^2}{22.44}$$

$$\chi^2_c = 0.19 + 0.38 - 0.36 + 0.73 = 1.66$$

$$\boxed{\chi^2_c = 1.66}$$

Paso 7. Se aplica la prueba de confianza. El valor de la *ji*-cuadrada teórica (χ^2), al nivel del 5%, con un grado de libertad es de 3.84. como 1.66 es menor que 3.84, se rechaza la hipótesis alterna (H_1), de acuerdo con la regla de decisión de la prueba *ji*-cuadrada.

Conclusión

El sexo de los aspirantes y las puntuaciones obtenidas en el examen de admisión son independientes entre sí. En otras palabras: no existe diferencia significativa entre los hombres y las mujeres respecto del examen de admisión.

Requisitos para usar la prueba *Ji*-cuadrada (χ^2)

1. *Aleatoriedad*. Los elementos que constituyen la muestra deben haber sido extraídos de manera aleatoria de la población de estudio.
2. *Independencia de las submuestras*. Las observaciones dentro de las muestras y entre las mismas (submuestras) deben ser mutuamente independientes.
3. *Distribución regular.* Dentro de cada categoría, las observaciones repetidas a través de todos los posibles valores para esa categoría. Así, el valor esperado es un punto de medida poblacional para los datos de frecuencia.
4. *Aleatoriedad*. Sólo se requieren frecuencias de casos o respuestas.

5. *Independencia de las muestras*. Esto requiere la presencia de un cuadro 2 × 2 como mínimo. La suposición de independencia indica que la χ^2 no puede aplicarse a una sola muestra (de panel antes-después); deben obtenerse por lo menos dos muestras de entrevistados.
6. Algunos estadísticos sugieren que no es adecuado el uso de la χ^2 cuando las frecuencias esperadas sean menores de cinco, aunque este requisito no constituye una restricción.

Coeficiente *fi* (Φ)

Cuando ambas variables son nominales y dicotómicas, es posible determinar el grado de asociación entre las variables de interés. Dicho coeficiente (Φ) también constituye un caso particular del coeficiente de correlación de Pearson, y se utiliza con cierta frecuencia, aunque no necesariamente con este propósito, en la elaboración y análisis de pruebas. En secciones posteriores se considerará la independencia o dependencia de dos variables en una muestra determinada; cuando se realice este análisis, a partir de las hipótesis establecidas, si la conclusión indica que existe dependencia, el análisis estadístico más pertinente es conocer el grado de asociación que implica la dependencia entre las variables o las muestras. Para determinar esto, se necesita un número que se establecerá a partir del coeficiente de correlación Φ (*fi*); sin embargo, debe recordarse que dicho número está supeditado al diseño 2 × 2, al tamaño de muestra y a la proporción de las variables dicotomizadas. Cuando el número de casos en una variable es igual al de la otra, el coeficiente Φ tendrá el valor máximo de 1; cuando los totales marginales son diferentes, no se alcanzará ese valor.

■ Ejemplo 5

Se desea establecer una escala de medición de cierto rasgo de agresión en adultos. La interrogante al respecto consiste en determinar si existe relación entre el sexo de la persona y la respuesta (dicotómica) ante una situación que provoque agresividad. Así, se realiza un estudio con 400 personas, 200 del sexo masculino y 200 del femenino. Los datos son los siguientes: 160 personas del sexo masculino están de acuerdo y 40 en desacuerdo; por parte del sexo femenino, 40 están de acuerdo y 160 no lo están. Calcule el coeficiente Φ de correlación y concluya con base en los resultados obtenidos.

Paso 1. Se presentan los datos obtenidos en una tabla de doble entrada de dos renglones y dos columnas (2 × 2).

	Acuerdo	**Desacuerdo**	**Total**
Masculino	160 *a*	40 *b*	200 *a* + *b*
Femenino	40 *c*	160 *d*	200 *c* + *d*
Total	200 *a* + *c*	200 *b* + *d*	400

Paso 2. Se aplica la definición de Φ.

$$\Phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

donde:

a = las puntuaciones del primer renglón y la primera columna (en este caso, masculino y de acuerdo = 160).
b = puntuaciones del primer renglón y la segunda columna (masculino y en desacuerdo = 40).
c = puntuaciones del segundo renglón y la primera columna (femenino y de acuerdo = 40).
d = las del segundo renglón y la segunda columna (femenino y en desacuerdo = 160).

Paso 3. Se sustituyen estos datos en la fórmula anterior y se efectúan las operaciones.

$$\Phi = \frac{(160)(160) - (40)(40)}{\sqrt{(200)(200)(200)(200)}}$$

$$\Phi = \frac{25\ 600 - 1\ 600}{\sqrt{1\ 600\ 000\ 000}}$$

$$\Phi = \frac{24\ 000}{40\ 000} = 0.60$$

$$\boxed{\therefore \Phi = 0.60}$$

Paso 4. Se concluye teóricamente que el grado de asociación entre el sexo y la agresión es del 60%.

Prueba de significancia de *fi* (Φ)

Para poder comprobar la significancia de dicho coeficiente, se utiliza la siguiente definición:

$$\chi^2 = n\,\Phi^2$$

donde:

n = número total de casos (suma de los totales marginales, tanto de columnas como de renglones); en el ejemplo, $n = 400$.
Φ = coeficiente *fi* = 0.60.
χ^2 = *ji*-cuadrada, que guarda la siguiente relación:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Al sustituir los valores anteriores, se obtiene:

$$\chi^2_c = (400)\ (0.60)^2$$

$$= (400)\ (0.36) = 144$$

$$\boxed{\therefore\ \chi^2 = 144}$$

Este resultado se contrasta con el valor crítico de *ji*-cuadrada, calculado mediante la siguiente regla de decisión RD:

$$\text{Si } \chi^2 \geq \chi^2_{crit}, \text{ entonces } \Phi \text{ es significativa.}$$

El valor crítico de la χ^2 está en función de los grados de libertad y el nivel de significancia (α), establecido de antemano. Para un diseño 2 × 2, los grados de libertad serán siempre igual a 1, pero, en general, para cualquier diseño diferente del mencionado se calcularán mediante las siguientes definiciones:

$$gl = (r - 1)\ (c - 1)$$

donde:

gl = grados de libertad.
r = número de renglones de la tabla de contingencia.
c = número de columnas de la tabla de frecuencias observadas.

En este caso se tiene $r = 2$ y $c = 2$ (dos renglones y dos columnas), o sea: $gl = (2 - 1)(2 - 1) = 1 \times 1 = 1$.

Se compara el valor calculando de χ^2 con el valor crítico (véase la tabla χ^2 del apéndice), así como con $gl = 1$, y se establecen los niveles de significancia $\alpha = 5\%$ y $\alpha = 1\%$, cuyos valores son $\chi^2_{(5\%)} = 3.84$ y $\chi^2 = 6.63$, respectivamente. La χ^2 calculada en lo bastante grande para ambos valores, lo cual significa que el coeficiente $\Phi = 60\%$ es significativo.

Requisitos de uso de Φ

Con el fin de utilizar adecuadamente el coeficiente Φ como medida de asociación entre las variables x y y dicotomizadas, deben tomarse en cuenta las siguientes condiciones:

1. *Datos nominales*. Las variables x y y deben ser nominales y dicotomizables, ya que únicamente se requerirán las frecuencias observadas (el número de veces que ocurren en cierta nominación).
2. *Tabla de contingencia 2 × 2*. Los datos deben colocarse en un diseño de dos renglones por dos columnas. Es inadecuado aplicar el coeficiente Φ a diseños mayores del indicado, donde se comparan varios grupos o categorías.
3. *Muestreo aleatorio*. Para poder comprobar la significancia y validez de Φ, la muestra en estudio debe extraerse en forma aleatoria (todos los elementos de la población deben tener la misma posibilidad de ser escogidos).
4. *Un caso particular*. Cuando la muestra en estudio es pequeña se utilizará la definición de χ^2, pero con la corrección de Yates, también llamada de *Pirie-Handem*. Un criterio para definir la pequeñez, es que la frecuencia Φ observada en dos o más casillas sea menor que 10. La definición de χ^2 consiste en lo siguiente:

$$\chi^2 = \frac{n\left[\,|ad - bc| - 0.5\right]^2}{(a+b)\ (a+c)\ (b+d)\ (c+b)}$$

donde:

$|\,ad - bc\,|$ = valor absoluto de la diferencia entre ad y bc:

y

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n}}$$

Coeficiente de contingencia (*C*)

Es un coeficiente de correlación para datos nominales colocados en una tabla de contingencia con un diseño mayor que 2 × 2. Con éste se trata de determinar el grado de asociación, al comparar varios grupos o categorías. Puede calcularse mediante la siguiente definición:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

donde:

C = coeficiente de contingencia.
χ_c^2 = valor calculado de *ji*-cuadrada.
n = número total de casos (tamaño de la muestra).

■ Ejemplo 6

Se investiga la posible relación entre cierto tipo de defecto genético en recién nacidos y la edad de la madre al ocurrir el parto. Se necesita encontrar el grado de asociación, si existe dependencia entre ambas variables. El defecto se clasifica en cuatro tipos: *A*, *B*, *C* y *D*; la edad de la madre en tres intervalos: menor que 25, entre 25 y 40 y mayor que 40 años. Para llevar a cabo este tipo de estudio, se consideran 309 niños ($n = 309$) en los que se han diagnosticado defectos genéticos.

Paso 1. Los datos obtenidos al realizar este estudio se concentran en una tabla de contingencia:

	Padecimiento genético				
Edad materna	*A*	*B*	*C*	*D*	Total
Menor que 25 años	51	46	25	15	137
Entre 25 y 40 años	33	17	49	20	119
Mayor que 40 años	4	11	35	3	53
Total	88	74	109	38	309

Si las dos clasificaciones son independientes entre sí, la posibilidad (proporción relativa) de una casilla determinada será igual al producto de su total marginal del renglón por el total marginal de su columna, dividido entre *n*. A esto se le llama *frecuencia esperada* (*fe*).

Para calcular la χ^2 puede utilizarse la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = \sum \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

donde:

fo = frecuencia observada (se mide directamente).
fe = frecuencia esperada (producto total marginal del renglón por el total marginal de la columna, dividido entre n).

Paso 2. Se calculan las frecuencias esperadas:

		1	**2**	**3**	**4**	
		A	***B***	***C***	***D***	**Total**
1	Menor que 25 años	51/39	46/32.8	25/48.3	15/16.8	137
2	Entre 25 y 40 años	33/33.9	17/28.5	49/42	20/14.6	119
3	Mayor que 40 años	4/15.1	11/12.7	35/18.7	3/6.5	53
4	Total	88	74	109	38	309

Por ejemplo:

$$fe_{11} = \frac{137 \times 88}{309} = 39$$

$$fe_{23} = \frac{119 \times 109}{309} = 42$$

Sucesivamente, se obtienen las demás frecuencias, hasta $fe(3) = \dfrac{53 \times 38}{309} = 6.5$

Paso 3. Para cada casilla se obtiene $fo - fe$, lo cual se eleva después al cuadrado igualmente en cada casilla con el fin de establecer $(fo - fe)^2$.

De este modo, las casillas quedan en particular:

$$(fo_{11} - fe_{11})^2 = (51 - 39)^2 = (12)^2 = 144$$

$$(fo_{23} - fe_{11})^2 = (49 - 42)^2 = 49$$

Paso 4. Se divide cada uno de los resultados anteriores entre su respectiva frecuencia esperada (fe) y se suman los mismos.

$$\frac{144}{39} + \frac{174.24}{32.8} + \frac{542.89}{48.3} + \frac{3.24}{16.8} + \frac{0.81}{33.9} + \frac{132.25}{28.5} +$$

$$\frac{49}{42} + \frac{29.16}{14.6} + \frac{123.21}{15.1} + \frac{2.89}{12.7} + \frac{265.69}{18.7} + \frac{12.25}{6.5}$$

A continuación:

$$3.7 + 5.31 + 11.24 + 0.19 + 0.02 + 4.64 + 1.16 +$$

$$3.40 + 8.16 + 0.227 + 14.20 + 1.88 = 54.127$$

$$\boxed{\therefore\ \chi_c^2 = 54.127}$$

Paso 5. Se calcula el coeficiente *C* mediante la fórmula:

$$C = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n+\chi^2}}$$

$$C = \sqrt{\frac{54.127}{309+54.127}}$$

$$C = \sqrt{\frac{54.127}{363.127}}$$

$$C = \sqrt{0.149 = 0.386}$$

$$\boxed{\therefore\ C = 0.386}$$

Paso 6. Teóricamente, el coeficiente de contingencia en la correlación entre el defecto genético del recién nacido y la edad de la madre es de 38.6%.

Prueba de significancia

La significancia estadística del coeficiente de contingencia se consigue a partir de la magnitud de la χ^2 obtenida con la siguiente regla de decisión: si $\chi_c^2 \geq \chi_{crit}^2$, entonces *C* es significativo. El valor de la χ^2 crítica (χ_{crit}^2) se presenta en la tabla χ^2 del apéndice, y se consideran los grados de libertad de la siguiente manera:

$$gl = (r - l)\ (c - l)$$

donde:

r = número de renglones.
c = número de columnas.

En el ejemplo:

$$gl = (3 - l)\ (4 - l) = 2 \times 3 = 6;\ gl = 6$$

Así, el valor de χ_{crit}^2 al nivel de significancia de 5% es 12.6 y al de 1% es 16.81. Pero el valor de la χ^2 calculada es de 54.127, es decir, mayor que cualquiera de los dos valores anteriores. En consecuencia, el coeficiente de contingencia calculado es estadísticamente significativo, por lo que se rechaza la hipótesis nula: los tipos de defectos congénitos dependen de la edad de la madre.

Requisitos para el uso del coeficiente de contingencia:

1. *Datos nominales*. Sólo se requieren datos de las variables dicotomizadas, las que se colocan en una tabla de contingencia $n \times m$.
2. *Muestreo aleatorio*. Con la finalidad de comprobar la significancia estadística del coeficiente, la muestra se obtuvo en forma aleatoria.

Coeficiente *V* de Kramer

El coeficiente *C* presenta una desventaja: el número de correspondientes a la tabla de contingencia influirá en el valor obtenido de *C*. Esto significa que este coeficiente no siempre variará entre 0 y 1 (por supuesto, nunca excederá de 1). En ciertas condiciones, el máximo valor de *C* podrá ser de 0.94, pero, en general, es de 0.89.

Para resolver este problema se emplea otro coeficiente de correlación, el *V* de Kramer, que expresa el grado y asociación entre variables nominales, pero en tablas mayores de 2 × 2. Dicho coeficiente se define de la siguiente manera:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(L-1)}}$$

donde:

n = total de casos (tamaño de la muestra).
L = columna o renglón, con casos, más pequeño de los dos.

A diferencia del *C*, este coeficiente tiene 1 como límite superior.

Como prueba de significancia, cuando la χ^2 que se utiliza al calcular *V* es estadísticamente significativa, dicho coeficiente también lo es.

■ Ejemplo 7

A 350 estudiantes de una escuela preparatoria se les aplica una prueba que mide la habilidad verbal; los resultados se correlacionarán con los correspondientes a Historia de México, lo cual se llevará a cabo al final del curso. Los resultados se muestran en la tabla de contingencias.

		Calificaciones en Historia de México			
		10–8.1	8–6	Inferior a 6	Total
Habilidad verbal	Superior a 600	100	15	5	120
	Entre 500 y 599	50	85	15	150
	Inferior a 500	10	20	50	80
	Total	160	120	70	350

Paso 1. Se calculan las frecuencias esperadas (*fe*) mediante sus correspondientes totales marginales, que luego se dividen entre el total *n*: (54.9), (41.1), (24), …, (16).

100 (54.9)	15 (41.1)	5 (24)	120
50 (68.6)	85 (51.4)	15 (30)	150
10 (36.6)	20 (27.4)	50 (16)	80
160	120	70	350

Paso 2. Se calcula el valor de χ^2 mediante la fórmula conocida:

$$\chi^2 = \sum \frac{(fe - fe)^2}{fe}$$

$$\chi_c^2 = \frac{(100-54.9)^2}{54.9} + \frac{(15-41.1)^2}{41.1} + \frac{(5-24)^2}{24} + \frac{(50-68.6)^2}{68.6} + \frac{(85-51.4)^2}{51.4} +$$

$$\frac{(15-30)^2}{30} + \frac{(10-36.6)^2}{36.6} + \frac{(20-27.4)^2}{27.4} + \frac{(50-16)^2}{16} = 196.6$$

$$\boxed{\therefore\ \chi_c^2 = 196.6}$$

Paso 3. Se sustituyen los valores de $n = 350$, $L = 3$, así como de la χ_c^2 obtenida anteriormente, en la definición de V.

$$V = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n(L-1)}}$$

Se sustituyen los valores de $n = 350$, $L = 3$, así como de la χ_c^2 obtenida anteriormente, en la definición de V.

$$V = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n(L-1)}}$$

$$V = \sqrt{\frac{196.6}{350(3-1)}}$$

$$V = \sqrt{\frac{196.6}{700}} = 0.53$$

$$\therefore \; V = 0.53$$

Paso 4. Teóricamente, el coeficiente de Kramer de la correlación entre la habilidad verbal y las calificaciones que obtuvieron en historia de México cada uno de lo 350 estudiantes, es del 53%.

Prueba de significancia de *V*

De la misma manera que C, en el coeficiente V de Kramer se obtiene la prueba de significancia. Es decir, si $\chi^2_c \geq \chi^2_{crít}$, H_0 se rechaza y el coeficiente V es significativo.

Para $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ y $\alpha = 0.005$ con $gl = (3 - 1)\,(3 - 1) = 4$, se obtienen:

$$\chi^2(4, 0.05) = 9.49$$

$$\chi^2(4, 0.01) = 13.28$$

$$\chi^2(4, 0.005) = 14.86$$

Como 196.6 >> 14.86, el coeficiente $V = 0.53$ es significativo.

PRUEBA EXACTA DE FISHER

Esta prueba se utiliza para comparar proporciones binominales de dos muestras independientes; dichas proporciones se ubican en una tabla de contingencia de dos renglones por dos columnas (2 × 2).

Cuando las frecuencias esperadas no son menores que 5, en cuanto menos una casilla, se aplica la prueba de χ^2 (*ji*-cuadrada).

Requisitos de uso:

1. Las muestras son independientes.
2. Existe una casilla con una frecuencia esperada menor que 5.
3. Los valores marginales de la tabla son fijos (esto es necesario para calcular probabilidades exactas).
4. Las dos muestras son pequeñas, por lo que no siempre se cumple que las proporciones binominales tengan una aproximación normal.

Variable 1			
			Total
Grupo 1	a	b	$a + b$
Grupo 2	c	d	$c + d$
Total	$a + c$	$b + d$	n

$$Pr\ (a,\ b,\ c,\ d)\ =\ \frac{(a\ +\ b)!\ (c\ +\ d)!\ (a\ +\ c)!\ (b\ +\ d)!}{n!\ a!\ b!\ c!\ d!}$$

Hipótesis:

H_0: $P_1 = P_2$
H_1: $P_1 \neq P_2$

■ Ejemplo 8

Suponga que 15 personas fallecieron recientemente en un hospital, donde la causa de muerte de ocho de ellos fue no-cardiovascular (P_1), pero en siete de ellos sí lo fue (P_2). De las 15 personas fallecidas, seis tenían alto consumo de sal en su dieta y nueve lo tenían bajo.

Los datos se ubican en una tabla de contingencia de la siguiente forma:

		Tipo de dieta		
		Consumo alto de sal	Consumo bajo de sal	Total
Causa de muerte	Cardiovascular	2	5	7
	No cardiovascular	4	4	8
		6	9	15

Calcule la prueba exacta de Fisher

$$P = 0.608$$

$$P(2,5,4,4)\ =\ \frac{7!\ 8!\ 6!\ 9!}{15!\ 2!\ 5!\ 4!\ 4!}\ =\ 0.29$$

PRUEBA DE McNEMAR

Para el caso de una misma muestra, esta prueba mide una situación antes y después de posibles cambios. También se aplica el modelo para dos muestras dependientes o correlacionadas, obtenidas en forma aleatoria de una misma población, midiendo de igual manera los posibles cambios antes y después.

■ Ejemplo 9

Para un grupo de pacientes que recibe determinado tratamiento (el mismo grupo de pacientes es su control), la variable de interés sería: actitud positiva o negativa, bienestar o malestar, acuerdo o desacuerdo, alivio o no alivio, cumplimiento de la norma establecida o no, entre otros aspectos.

En el caso más simple, se establecería la hipótesis nula (H_0) en términos de igualdad de proporciones correlacionadas; el grupo se mide antes del tratamiento y después del mismo.

La variable es cualitativa (nominal) y dicótomica. La proporción (número de sujetos) que pertenece a una categoría es mutuamente excluyente con la proporción de las otras categorías; dichas categorías pueden representarse en una tabla de contingencia (de doble entrada) como la siguiente:

		Situación 2		
		+	–	Total
Situación 1	+	a	b	$a + b$
	–	c	d	$c + d$
	Total	$a + c$	$b + d$	N

En el anterior, a, b, c y d son las probabilidades de intersección (*joint*) y $a + b$, $c + d$, $a + c$ y $b + d$ son las probabilidades marginales. El modelo estadístico por emplear, si el número de casos de $c + b$ es mayor que 20, será una aproximación a la prueba Z.

$$z = \frac{c - b \pm 1}{\sqrt{c + b}}, \text{ si:}$$

1) $c > b$, el signo es negativo (–).
2) $c \leq b$, el signo es positivo (+).

Si $c + b \leq 20$, entonces el valor de b se compara con un valor crítico en la tabla.
Las hipótesis se establecen en la siguiente fórmula:

$$H_0 : c = b$$

Para la hipótesis alterna:

1) H_1: $c > b$
2) H_1: $c < b$
3) H_1: $c \neq b$

El valor crítico se obtiene en la tabla z, con la siguiente regla de decisión:
Si $z_{calc} \geq z_{tablas}$, H_0 se rechaza.

■ Ejemplo 10

Unas flores recibieron un nuevo tipo de mantenimiento, que se valuará mediante un experimento antes-después, en el que será aplicada la prueba de McNemar. Las observaciones proporcionaron los siguientes resultados:

		Después		
		Rosa	Clavel	
Antes	Rosa	20 *a*	18 *b*	38
	Clavel	6 *c*	38 *d*	44
		26	56	82

Las hipótesis estadísticas son las siguientes:

H_0: el mantenimiento de la rosa es igual antes y después.
H_1: el mantenimiento de la rosa es diferente antes y después.

Se desea realizar la prueba con un $\alpha = 5\%$.
La región de rechazo para H_0 es:

Es decir, si $|z_c| \geq z_{(0.025)} = 1.96$, H_0 se rechaza.
Como $b + c > 20$ y $b > c$, se utiliza la siguiente fórmula:

$$z = \frac{(c-b)+1}{\sqrt{c+b}}$$

Se sustituye

$$z = \frac{(6-18)+1}{\sqrt{24}}$$

$$z_c = \frac{-12+1}{\sqrt{24}} = \frac{-11}{4.9}$$

$$\boxed{z_c = -2.24}$$

Se aplica posteriormente la regla de decisión:
$z_c = |-2.24| = 2.24$
$2.24 > 1.96 = z_{0.025}$
Entonces, H_0 se rechaza.

Conclusión

El mantenimiento de la rosa es diferente antes y después.

Resumen

Sólo puede mejorarse aquello que se evalúa.
Antonio Gago (1994)

Las sociedades actuales demandan hoy en día altos niveles de calidad en todas las áreas del quehacer humano, ya sea a través del establecimiento de estándares, indicadores o parámetros que midan lo realizado y lleven implícito un mecanismo o elemento regulador, que dará cuenta de su efectividad, pertinencia, relevancia y trascendencia.

Es a través de los procesos de evaluación que se puede llegar a definir si estos haberes, saberes y haceres alcanzan niveles esperados. Por tanto, el fortalecimiento de una cultura de la evaluación debe impactar positivamente en la sociedad civil.

Los resultados de la evaluación siempre estarán sujetos a la interpretación, por ende, debe ponerse especial atención en quién desarrolla los procesos, quién contrata los servicios de una agencia evaluadora y el uso que se dará a los resultados obtenidos, estimar el impacto de los resultados que se generen, en la inteligencia de que dicho impacto debe orientarse invariablemente a la mejora continua.

En el ámbito educativo la evaluación es materia indispensable, no sólo para evaluar el rendimiento académico de los destinatarios de la labor de enseñanza-aprendizaje, actualmente son evaluables todos y cada uno de los componentes del sistema educativo, de tal manera que a través de procesos evaluativos se logran objetivos varios:

Transparencia en los procesos y procedimientos de un sistema.

Acceso a fuentes de financiamiento en la medida que después de una evaluación se confirma que se están alcanzando estándares de calidad esperados.

Realimentación permanente sobre la pertinencia o reformulación de estrategias educativas.

Posibilidad de hacer perfectibles a todos los sistemas del ámbito social.

La información de este proceso evaluativo implica también dominio y poder para quien la posee, de ahí que los principios éticos y los valores humanos no pueden separarse de éstos. Toda evaluación, independientemente, de sus propósitos, debe estar regulada por preceptos de respeto, equidad y accesibilidad, evitando que los resultados creen estigmas o etiquetas en los individuos y en las instituciones.

En este capítulo se proponen procedimientos estadísticos que permitirán el manejo de variables nominales o categóricas, como las escalas de Likert que se pueden ubicar en matrices de doble entrada o tablas de contingencia, los estadísticos: *ji*-cuadrada, McNemar, Kappa, prueba exacta de Fisher por mencionar algunos; resultan idóneos para el análisis de tales formas evaluativas. Por tanto, la relevancia de evaluar, de obtener indicadores sobre la calidad y la posible mejora de procesos, instancias, y sistemas que operan en cualquier estrato de las sociedades actuales tendrán que abordarse con esta metodología estadística.

Considere, entonces, el desarrollo aquí presentado como una primera aproximación a este campo de los estudios evaluativos con sus correspondientes tratamientos estadísticos, con los que se pueden generar evidencias *a posteriori* de su validez y confiabilidad.

Ejercicios

15.1 Se realiza una encuesta con un grupo de 100 pacientes con cáncer y 100 personas sanas, para conocer su conducta frente a la bebida alcohólica.

Ingestión de alcohol	Con cáncer	Sin cáncer
Abstemio	37	39
Moderada	34	30
Excesiva	15	21
Adicción	14	10
Total	100	100 200

Aplique la prueba de χ^2 y concluya.

15.2 En un estudio donde participaron 8726 personas, entre las que había 6037 sanas, 883 con un cáncer incipiente en el estómago y 1796 con úlcera duodenal, se aplicó una clasificación a partir del tipo de sangre: O, A y B.

GRUPOS				
Tipo de sangre	*Úlcera*	*Cáncer*	*Sanos*	*Total*
O	983	393	2842	4758
A	679	416	2625	3720
B	134	84	570	788
Total	1796	893	6037	8726

Aplique la prueba de independencia.

15.3 Calcule la *ji*-cuadrada si se tienen 2 789 personas, de las cuales 1 058 fuman y 1 731 no fuman al analizar sus historias clínicas 472 fallecieron y 2 317 siguen vivos.

	Fallecieron	Vivos	Total
No fumadores	264	1467	1731
Fumadores	208	850	1058
Total	472	2317	2789

a) Utilizando la corrección de Yates.

b) Sin utilizar la corrección de Yates.

15.4 En un estudio realizado a 3 000 mujeres, de las cuales 300 presentan cáncer de mama se requiere conocer si está relacionado con la ingesta de alcohol.

		Consumo de alcohol				
		Abstemio	Leve	Moderado	Severo	Total
Cáncer de mama	Sí	75	40	60	125	300
	No	2000	280	120	300	2700
		2075	320	180	425	3000

15.5 Trescientas personas, donde 100 forman el grupo testigo y 200 el de estudio (tratamiento), se obtiene datos de los expedientes de un hospital, dos años después.

	Muertos	Vivos	Total
Tratamiento	10	190	200
testigo	15	85	100
	25	275	300

Calcule χ^2

PARTE 6

Introducción a la medición

Vivir es aprender.

K. Lorenz

Capítulo 16

Teoría de la respuesta al ítem

Dr. José Martínez Guerrero
Facultad de Psicología, UNAM

Propósitos

El objetivo central del presente capítulo es que el lector aprenda las nociones básicas de la teoría de la respuesta al ítem (TRÍ).

De igual forma, al término del mismo el lector podrá:

- Comparar la TRÍ con la teoría clásica de los tests.
- Explicar los principales supuestos conceptuales y estadísticos de la TRÍ.
- Interpretar el modelo de la ojiva normal de Lord.
- Identificar los modelos logísticos de uno, dos y tres parámetros: Rasch, Birbaum de la habilidad.
- Describir los procedimientos de estimación y los parámetros del ítem.
- Evaluar la bondad de ajuste de los modelos de la TRÍ.
- Explicar el modelo politómico dentro de la TRÍ.
- Analizar ejemplos de modelos multicategoriales para el desarrollo de escalas de medida.
- Describir las ventajas que ofrece la TRÍ.
- Interpretar la información relevante al graficar los modelos anteriores.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos centrales de la psicometría moderna es el desarrollo de modelos formales y métodos que posibiliten la medición de variables psicológicas y educativas. En esta disciplina se parte del principio de que es empíricamente posible medir desempeños psicológicos, conocimientos, habilidades, aptitudes, rasgos, procesos, etc., tanto en los ámbitos educativo y laboral, como en otras áreas de investigación en ciencias sociales y del comportamiento.

La *teoría de la respuesta al ítem* (TRÍ) es una parte muy importante, activa y en desarrollo de la psicometría moderna. Representa un nuevo enfoque que permite superar las limitaciones de la *teoría clásica de los tests psicométricos* (Hambleton, Swaminathan y Rogers, 1991; Van der Linden y Hambleton, 1997; Muñiz, 1997). Al igual que la teoría psicométrica clásica, la TRÍ pretende obtener una puntuación interpretable que corresponda al nivel de capacidad de una persona, en una habilidad o rasgo que busca medirse a partir de un modelo; en este caso, centrado en las propiedades de los ítems individuales, más que en las características globales de la puntuación en un test, como se hacía tradicionalmente.

La psicometría contemporánea incluye las siguientes áreas generales:

- Teoría de la medición.
- Teoría clásica de los tests.
- Teoría de la generalizabilidad.
- Teoría de la respuesta al ítem.

Como recordará el lector, en el primer capítulo del libro conoció el concepto de *medir* desde una perspectiva representacional de la medida. En el desarrollo de la *teoría de la medición*, el problema de medir variables psicológicas se ha abordado también desde otro enfoque muy interesante, la "*teoría de medición conjunta*", la cual ofrece métodos para identificar la estructura cuantitativa de dichas variables. La postura básica de la medición conjunta es que no pueden darse por sentado las propiedades cuantitativas de una variable, sino que deben someterse a prueba empírica y, además, satisfacer las condiciones numéricas de un sistema conjunto.

Por su parte, la *teoría de la generalizabilidad* ha intentado ofrecer una alternativa que permita liberar a la teoría clásica de los siguientes problemas: el manejo del error unidimensional e indiferenciado, el paralelismo estricto entre tests, así como las diferentes interpretaciones del concepto de confiabilidad, al que trata de sustituir por el de generalizabilidad de la medida.

Es claro que una explicación a profundidad de estos temas, de los avances en la teoría de la medida y de otros tópicos en la psicometría moderna, van más allá de los objetivos del libro, por lo que en este capítulo sólo se expondrán los supuestos básicos de la teoría clásica de los tests, las limitaciones que presenta y las ventajas que ofrece la teoría de la respuesta al ítem.

A continuación, se presentan los principales supuestos, concepciones y procedimientos de la teoría clásica de los tests y los problemas que intentan superarse con la teoría de la respuesta al ítem.

TEORÍA CLÁSICA DE LOS TESTS EN LA PSICOMETRÍA

La teoría clásica de los tests (TCT) constituye un conjunto de supuestos, teorías y técnicas *ad hoc* para analizar las puntuaciones de grupos de individuos en los tests. Dicho análisis de medición sobre las diferencias individuales se realiza habitualmente a partir de ciertos supuestos de la concepción tradicional, conocida como *teoría de la puntuación verdadera*.

Supuestos básicos de la teoría de la puntuación verdadera

Los principales supuestos de esta teoría se explican en los siguientes puntos:

1. La puntuación observada (X) de un sujeto en un test se compone de dos variables latentes:
   a) La puntuación teórica o verdadera (T).
   b) El error de medida (E).

Dicha puntuación observada se refiere a todo el test. Entonces: $X = T + E$

2. La variable latente (E) es una variable aleatoria con una distribución normal, media de cero y una varianza finita. Se puede expresar como:

$$E \sim N\,(0,\, \sigma^2\, E)$$

3. Las variables latentes T y E no están correlacionadas:

$$\varepsilon\,(T\,E) = 0 \Rightarrow (R_{TE} = 0)$$

Esto significa que al aumentar el valor de T, el valor de E sigue procediendo de la misma distribución. Por tanto, se asume que el error es independiente de la magnitud real del objeto medido.

4. Cuando se realizan dos mediciones, se supone que los errores de ambas son independientes entre sí.

$$\varepsilon\,(E_1\;\,E'_2) = 0 \Rightarrow (R_{\,E_1\;E'_2} = 0)\;\therefore\;\text{son independientes.}$$

5. El error que se comete en una medida es independiente de la puntuación teórica (verdadera) de una segunda medición.

$$\varepsilon\,(E_1\;T_2) = 0 \Rightarrow (R_{\,E_1\;T_2} = 0)\;\therefore\;\text{son independientes.}$$

En resumen, la teoría de la puntuación verdadera es una teoría de componentes latentes, los cuales se asumen como independientes o no correlacionados.

Confiabilidad de un test

A partir de los supuestos anteriores, la teoría clásica de los tests define uno de los conceptos centrales de la psicometría: *la confiabilidad de la medida*. Esto se explica en términos generales como una correlación entre dos conjuntos de puntuaciones obtenidas con el mismo test o con formas paralelas del test. Así, el concepto de confiabilidad en la TCT se define como una proporción de varianza entre puntuaciones observadas y la varianza de la puntuación verdadera.

Se expresa de la siguiente forma:

$$\rho^2 xT = \frac{\sigma^2(T)}{\sigma^2(x)}$$

Si supone dos medidas paralelas, entonces su correlación sería:

$$\rho\,(x,x') = \frac{\sigma(x,x')}{\sigma\,(x)\;\sigma\,(x')} = \frac{\varepsilon\,[(T+E)(T'E')]}{\sigma\,(x)\;\sigma\,(x')} =$$

$$\frac{\varepsilon T^2 + \varepsilon\,(TE) + \varepsilon\,(T'E) + \varepsilon\,(EE')}{\sigma(x)\;\sigma(x')} = \frac{\varepsilon\,(T^2)}{\sigma^2(x)} = \frac{\sigma^2(\mathrm{T})}{\sigma^2(x)} = \rho^2 XT = \rho^2 xx'$$

La confiabilidad puede estimarse a partir de dos medidas equivalentes o paralelas, o bien, mediante el procedimiento test-retest. Sin embargo, en la TCT deberán cumplirse ciertas condiciones de paralelismo, misma que se expondrán a continuación.

Condiciones de paralelismo

Considere dos mediciones independientes X y X':

Dado que $X = T + E$ y $X' = T' + E'$, entonces tiene las condiciones siguientes.

A. Medidas equivalentes:

$$T = T' \text{ y } F(E) \equiv F(E')$$

En este caso, las puntuaciones verdaderas son iguales y la distribución de errores es equivalente; es decir, los errores proceden de la misma distribución. Es una condición muy exigente y muy difícil de conseguir en la práctica psicométrica.

B. Medidas paralelas:

$$T = T' \text{ y } \sigma^2 (E) = \sigma^2 (E')$$

Las puntuaciones verdaderas son iguales y las distribuciones de los errores de las dos mediciones tienen varianzas iguales. Esta condición implica que la precisión de la medida debe ser la misma, o que la varianza del error es igual en las dos.

C. Medidas ζ – Equivalentes:

$$T = T' \text{ y } \sigma^2 (E) \neq \sigma^2 (E')$$

Las puntuaciones verdaderas son iguales, pero las dos medidas se llevan a cabo con distinta precisión; es decir, las varianzas de los errores son diferentes.

D. Medidas esencialmente ζ – Equivalentes

$$T = K + T', \quad \text{siendo } K = \text{Constante y } \sigma^2 (E) \neq \sigma^2 (E')$$

Las dos medidas tienen distinta precisión y se trata de la aplicación de tests de diferente longitud y también con distinto rango de dificultades de los ítems. Por tanto, en este caso las puntuaciones estarán en escalas distintas y entonces se requiere agregar una constante.

Características de los ítems en la TCT

Además de cumplir las condiciones de paralelismo para estimar la confiabilidad, el esquema básico en la TCT incluye un modelo correlacional, donde cada ítem se correlaciona con un criterio, generalmente con la puntuación total del test. Así, los parámetros que definen las propiedades de los ítems de un test en la TCT son:

a) La discriminación del ítem:
Índice de discriminación D = Correlación biserial puntual entre el ítem
y la puntuación total del test.

b) La dificultad del ítem:
Índice de dificultad P = Proporción de sujetos que aciertan el ítem.

En la TCT puede haber variaciones importantes en los parámetros debido al tipo de ítems aplicados en una prueba o a cambios en la muestra; es decir, los valores pueden variar dependiendo de los ítems de acompañamiento que se incluyan o de las características del grupo de examinados. Como se explicará la estimación de parámetros de los ítems en la TRÍ no dependerán de la puntuación total del test, ni de los examinados en un grupo normativo que contesta cada ítem.

Principales limitaciones de la teoría clásica de los tests

El análisis de los estadísticos de la TCT ha resultado útil durante muchos años; sin embargo, se ha identificado una serie de problemas de carácter psicométrico:

1. La magnitud medida con un test no es invariante respecto del instrumento utilizado, ésta depende del test particular que se aplique. Por lo que la escala del rasgo medido varía de un test a otro similar.
2. Los parámetros de los ítems no son invariantes respecto de la muestra utilizada; el nivel de dificultad depende del nivel del grupo muestral al que se le aplique el test.
3. Los parámetros de un ítem no son invariantes respecto del resto de ítems del test utilizado. Dado que el criterio es el puntaje global del test, no existe independencia local entre los ítems de una prueba.
4. La puntuación verdadera (T) y el parámetro de dificultad (P) no forman parte del mismo modelo estadístico y no están en la misma escala. Por tanto, no son comparables.
5. La confiabilidad del test depende directamente de la variabilidad de las puntuaciones de la muestra utilizada. Entonces, las estimaciones de confiabilidad se obtienen con sesgo.
6. En la TCT, la confiabilidad está definida bajo la condición de formas paralelas, pero son muy difíciles de obtener en la práctica, por lo que en la aplicación de tests se obtienen cotas mínimas de confiabilidad.
7. En la TCT no se pueden comparar las puntuaciones del test con instrumentos diferentes, a menos que sean medidas estrictamente paralelas; por lo que se requiere un procedimiento de *equiparación:* hacer la transformación lineal en los dos tests para igualar la escala.
8. La varianza del error de medida se supone que es la misma para todos los sujetos, pero la varianza observada no es igual en el centro.
9. El análisis y la estimación de los parámetros de los ítems no forman parte de los supuestos estadísticos y procedimientos de la teoría de la puntuación verdadera.
10. En suma, la teoría clásica de los tests es útil, pero presenta, tanto en su aplicación como en el análisis teórico, un conjunto de problemas de medición que no ha podido resolver de manera satisfactoria.

¿QUÉ OFRECE LA TEORÍA DE LA RESPUESTA AL ÍTEM?

En la teoría de respuesta al ítem (TRÍ) los parámetros de cada reactivo no dependen de otros ítems con los que se presente en una prueba. La puntuación se obtiene en función de la respuesta del sujeto a cada ítem y de los parámetros del ítem. Así, esta teoría permite crear bancos de ítems previamente calibrados.

Una segunda ventaja es que en la TRÍ lo que se mide es la habilidad medida por el desempeño de una persona que contesta a un ítem. Por ello, se tiene que contar con las respuestas individuales a cada ítem, a fin de inferir el nivel de la variable psicológica que se está midiendo.

En tercer término, en la TRÍ un modelo de un rasgo latente (variable inferida) especifica una relación entre las respuestas observables de una persona en un test y el rasgo no observable o habilidad que es la que determina que responda correctamente en una prueba, esto es de su desempeño.

Otra aportación importante en los modelos de la TRÍ es que describen la relación entre el rasgo latente y la probabilidad de la respuesta correcta a un ítem, la cual se representa en una función llamada curva característica del ítem (CCÍ).

La probabilidad de que una persona proporcione una respuesta correcta a un ítem es independiente de la distribución del rasgo latente en la población de estudio. Es decir, la probabilidad de una respuesta correcta del examinado no dependerá de las respuestas de otros examinados en algún punto del continuo del rasgo. Por ello, la forma de la curva característica del ítem será invariante a través de diferentes muestras de examinados, cuando el modelo se ajusta a los datos.

En el siguiente cuadro se hace un resumen de los aspectos psicométricos que reflejan las principales diferencias de contraste entre la teoría clásica de los tests y la teoría de la respuesta al ítem.

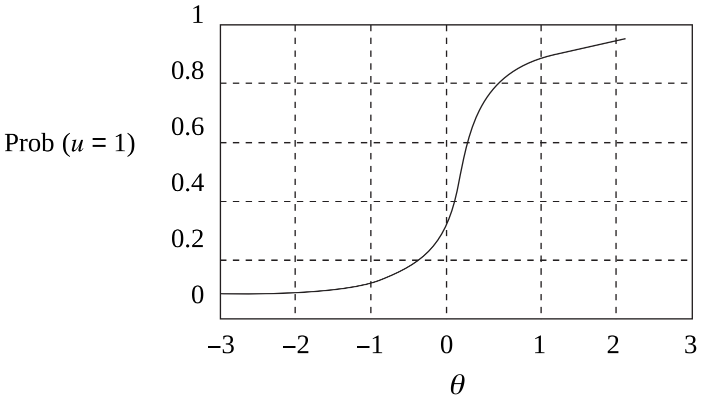
	Teoría clásica de los tests	**Teoría de respuesta al ítem**
Criterio de medición	La puntuación global del test.	La respuesta del examinado ante cada ítem
Medida del rasgo	La magnitud del rasgo medido varía de un test a otro	Invarianza en la medición de la habilidad con diferentes ítems
Tipo de modelo	Aplica un modelo lineal	Modelos logísticos y de ojiva normal
Estimación parámetros	Correlación biserial puntual y proporción de respuestas	Máxima verosimilitud conjunta, condicional o marginal
Parámetros (muestra)	Los valores de los parámetros varían según la muestra	Los parámetros de los ítems son invariantes al cambiar la muestra
Parámetros (entre ítems)	Los parámetros de los ítems varían con otros ítems	Los parámetros de cada ítem son independientes de otros ítems
Escala de parámetros	La puntuación del rasgo (T) y nivel de dificultad (P) del ítem no están en la misma escala	La habilidad medida (θ) se ubica en la misma escala de la dificultad del ítem (b)
Confiabilidad	La confiabilidad del test depende de la variabilidad de puntuaciones en la muestra (con sesgo).	Estimación estadística y gráfica de precisión de la medida mediante la función de información
Estimación del error	La varianza de error es la misma para todos los sujetos en todas las puntuaciones obtenidas	La estimación del error de medida es diferente para cada nivel de habilidad

Curva característica del ítem (CCÍ)

La curva característica del ítem (CCÍ) es una función monotónica creciente que relaciona la probabilidad de éxito en un ítem con la habilidad medida (rasgo latente) mediante la aplicación de un test psicométrico. El rasgo latente es el responsable de que se responda bien o mal a un ítem. Como se sabe existe mayor o menor probabilidad para responder correcta o incorrectamente a un ítem particular, dependiendo del nivel de habilidad.

Un rasgo inferido, es decir la variable que se busca medir tiene origen y una unidad arbitrarios en un continuo que puede ir desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El rasgo latente de habilidad que se designa como θ corresponde al eje *X* (véase figura 16.1). En el eje *Y* se representa la probabilidad de "theta" $P(\theta)$, es decir, la probabilidad de responder correctamente en un ítem, dado el nivel θ del rasgo medido. Como se señala en la gráfica este continuo se representa como (theta).

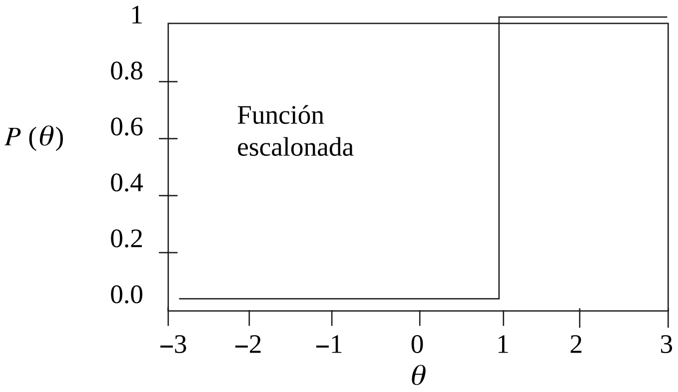
Figura 16.1 Curva característica del ítem (CCÍ)



Modelo ideal de Guttman y parámetros de un ítem

A mediados del siglo XX Guttman planteó la llamada "escala perfecta", en la cual un ítem ideal sería aquél que correspondiera a una función discontinua, escalonada, en la cual los sujetos con una capacidad menor a la dificultad del ítem tendrían una probabilidad de 0 de responder correctamente al ítem; y aquellos con capacidad mayor a ese ítem tendrían una probabilidad del 100% de contestarlo correctamente. A diferencia de la función psicofísica para medir umbrales sensoriales en la cual se observa un proceso gradual, en este modelo la probabilidad de responder correctamente al ítem pasaría de 0 a 1 en un punto.

Figura 16.2 Escala de Guttman



El modelo de Guttman y la función psicofísica constituyen antecedentes importantes y un punto de partida para entender los modelos de la TRÍ que representan funciones no lineales, monotónicas crecientes, en forma de "S". En constraste con la TCT, en la teoría de respuesta al ítem los parámetros de los ítems adquieren una significación congruente con el modelo teórico, se encuentran en el mismo modelo, están en la misma escala y se estiman de manera diferente.

Índice de dificultad

El índice de dificultad de un ítem b_i es una estimación de la posición del ítem en la escala de θ. Se trata de un estadístico que informa en qué lugar de esta escala se parten las probabilidades de contestar correctamente ese ítem en particular. Este parámetro indica entonces la parte de la escala θ donde se da la transición desde una mayor probabilidad de responder incorrectamente al ítem hasta una mayor probabilidad de hacerlo correctamente. El índice de dificultad b_i es el valor de θ para el que la probabilidad de responder correctamente el ítem i es de 0.5

$$P\ (x = 0 \mid \theta < B) < 0.5 \text{ y por encima de } b_i\text{: } P\ (x = 1 \mid \theta > B) > 0.5.$$

El parámetro b_i es entonces el punto de inflexión de la curva, y significa que el valor de la derivada primera es el máximo en ese punto dado. El índice de dificultad de un ítem señala en qué parte de la escala θ se encuentra el punto de inflexión de la CCÍ para ese ítem. Es el valor de la posición del ítem en la escala theta.

Discriminación de un ítem

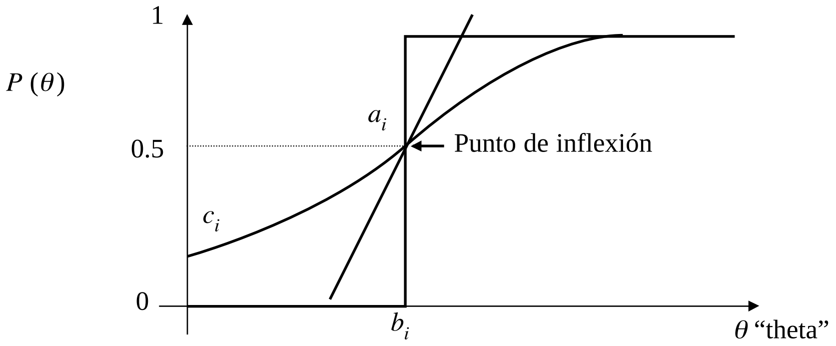
En la TRÍ, la discriminación de un ítem a_i es un valor directamente proporcional a la derivada primera de la curva en el punto de inflexión; es decir, se refiere a la pendiente de la curva en ese punto, definida como la tangente del ángulo α:

$$a_i = \text{Tan } \alpha \bullet \kappa$$

Parámetro de seudoadivinación

El tercer parámetro se refiere al parámetro C_i como la probabilidad de contestar el ítem por adivinación, o identificando una pista en la opción correcta del ítem, aún por abajo de la capacidad o conocimientos del sujeto examinado.

Figura 16.3 Parámetros de la curva característica del ítem



Modelo de ojiva normal

Considere una variable continua Y, la cual representa la respuesta de un sujeto ante un ítem que pretende medir la capacidad θ de ese sujeto, entonces la relación entre las dos variables estaría dada por el coeficiente β, que sería la pendiente de la recta que representa dicha relación. Así, dada la capacidad θ de un sujeto, ¿cuál sería la probabilidad de que responda correctamente al ítem? Esta misma pregunta puede expresarse de este modo:

Dada la capacidad θ, ¿cuál es la probabilidad de que el sujeto tenga una puntuación en Y superior al umbral y?

Estará estimada por la integral definida de la curva normal de probabilidades, en el rango que va desde el umbral y hasta ∞.

Por otro lado, si β representa la correlación entre las variables θ y Y, entonces β^2 sería la varianza explicada.

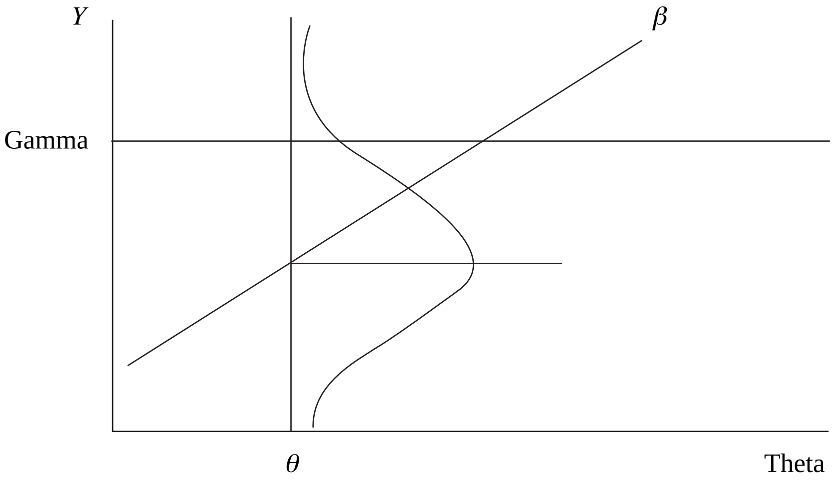
$$\therefore\ Y = 1 - \beta^2 \text{ sería la varianza No explicada} \Rightarrow \sigma^2 = 1 - \beta^2$$

Para un sujeto j, dada una puntuación en θ, ¿cuál es su probabilidad de responder correctamente al ítem i? Será el área comprendida en la distribución por encima del umbral de corte y.

Se puede expresar así: $P\ (U_{ij} = 1 \mid \theta = \theta_j) = P\ (Y > y \mid \theta = \theta_j)$

$$= \int_{Y}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[\frac{-(Y-\beta\theta)^2}{2\sigma^2}\right] dY$$

Figura 16.4 Parámetros del modelo de ojiva normal



La expresión del modelo de ojiva normal está en función de los parámetros y y β.

Reparametrización del modelo de ojiva normal

El parámetro y del modelo de ojiva normal tiene que ver con la dificultad del ítem, debido a que la probabilidad de responderlo disminuirá si se eleva ese valor; o bien, será más probable contestarlo correctamente si el valor de y baja. Pero también la forma en que aumente o disminuya ese valor depende de la pendiente de la recta de regresión β, por lo que los dos parámetros están interrelacionados.

El parámetro b_i tiene que ver así con la discriminación entre sujetos. Como recordará el lector, el parámetro de dificultad b_i se definió como la puntuación en θ para la probabilidad media de responder correctamente al ítem en 0.5.

Entonces b_i = valor de θ, tal que $P\ (U_{ij} = 1 \mid \theta) = 0.5)$

Cuando $\beta\ \theta = y$, tiene que $\beta\ b_i = y$

Entonces: $b_i = \dfrac{Y}{\beta}$

Otra forma de obtener una expresión más directa del modelo es cambiando o tipificando las variables.

Si $t = \dfrac{Y - \beta\theta}{\sigma}$

$$Y = \sigma\, t + \beta\ \theta$$

$$d\ Y = \sigma\, d\ t$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d(\sigma\, t)}{dt} + \frac{d\beta\theta}{dt} = \sigma + 0 \Rightarrow \frac{dY}{dt} = \sigma$$

Sustituyendo en la expresión de la ojiva normal tendría:

$$P\ (U_{ij} = 1) \mid \theta = \theta_j = \int_{\infty} \frac{-Y - \beta\theta}{\sigma}\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\frac{(-t^2)}{2}\sigma\, dt$$

Cambiando de orden el límite superior:

$$\int_{\infty} \frac{-Y - \beta\theta}{\sigma}\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\frac{(-t^2)}{2}\sigma\, dt$$

$$= \frac{\beta\theta - y}{\sigma} = \frac{\beta\theta}{\sigma} - \frac{y}{\sigma} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\theta - \frac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\theta - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{y}{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\theta - \frac{y}{\beta}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}(\theta - b)$$

Si al elemento $\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ le llama "a", entonces $\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $(\theta - b) = a\,(\theta - b)$ [límite superior de la integral definida]

Con los nuevos parámetros de dificultad del ítem y *a* el índice de discriminación, tiene las expresiones:

$$b_i = \frac{y}{\beta} \qquad a = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Entonces, el modelo de ojiva normal, con los nuevos parámetros, sería *para dos parámetros*:

$$P(U_{ij} = 1\ \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{a(\theta-b)} \exp\ \frac{(-t^2)}{2} dt$$

Así, la probabilidad de responder correctamente a un ítem dado θ representaría la diferencia entre la capacidad de un sujeto para ello y la dificultad de un ítem, además del nivel de discriminación de éste.

En el modelo de tres parámetros, tendría una expresión más general, donde se consideraría, además de los dos parámetros anteriores, que puede haber cierto nivel de “adivinación” o “seudo-azar”.

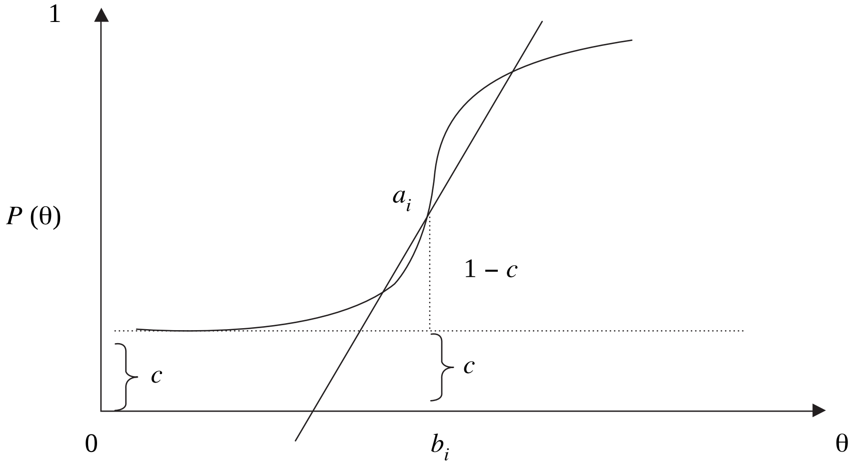
La expresión para el modelo de ojiva normal de tres parámetros sería:

$$P_i(\theta) = C_i + \frac{1 - C_i}{2\pi} \int_{\infty}^{a(\theta-b)} \exp\ \frac{(-t^2)}{2} dt$$

El tercer parámetro, denominado “*c*”, refleja el hecho de que los sujetos de menor capacidad pueden tener cierta probabilidad (mayor que cero) de responder correctamente al ítem.

Entonces, C_i sería la asíntota inferior de la función del ítem *i*.

Figura 16.5 Parámetro *c* en la curva característica del ítem



Modelo logístico de un parámetro o modelo de Rasch

El modelo de Rasch, o función logística de un parámetro, se ha utilizado ampliamente por las ventajas teóricas y prácticas que representa en comparación con el modelo de ojiva normal. Dicho modelo fue propuesto originalmente por el matemático George Rasch en los años sesenta del siglo XX y posteriormente fue desarrollado por otros investigadores en psicometría en Estados Unidos.

En el modelo de Rasch se concibe la respuesta de un sujeto a un ítem como una conducta que depende de una sola característica del ítem: el nivel de dificultad. Y de una sola característica del sujeto: el nivel de capacidad o habilidad.

Como se sabe, las probabilidades de acertar a un ítem en relación con las de fallar, para un sujeto *J*, están dadas por el cociente de las dos cantidades: una, referida a la capacidad del sujeto y la otra por la dificultad del ítem *i*.

$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{\theta *}{b *}$ donde: θ^* es la cantidad del sujeto (su capacidad)
b^* es la cantidad el ítem (su dificultad)

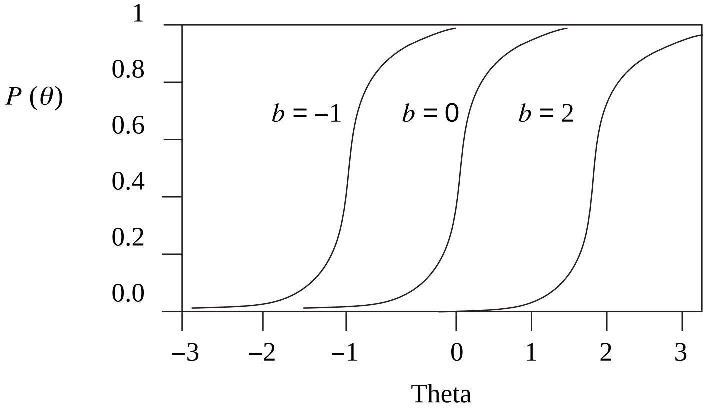
El cociente anterior variará entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$

$$Q_i = 1 - P_i \ \therefore \ \frac{\theta *}{b *} = \frac{P_i}{1 - P_i} \Rightarrow P_i \, b* = (1 - P_i) \, \theta *$$

$$(1 - P_i) \, \theta^* = \theta^* - P_i \, \theta^* \Rightarrow \theta^* = \theta^* \, P_i + P_i \, b^* = P_i \, (\theta^* + b^*)$$

$P_i \, (\theta^* + b^*) = \theta^* \Rightarrow$ Despejando: $P_i = \frac{\theta *}{(\theta * + b^*)}$

Figura 16.6 Modelo de un parámetro *(Rasch)*



En la gráfica se observa una representación gráfica del modelo de un parámetro; se muestran tres ítems con distinto grado de dificultad, pero con la misma pendiente. El índice de discriminación es constante e igual que 1 en los tres ítems. En este modelo sólo se estima el nivel de dificultad en función del nivel de theta.

Transformación exponencial de la función logística en el modelo de Rash:

Si $\theta^* = \exp(\theta)$ y si $b^* = \exp(b) \Rightarrow$ sustituyendo:

$$P_i(\theta) = \frac{\exp(\theta)}{\exp\theta + \exp b} = \frac{\dfrac{\exp(\theta)}{\exp(\theta)}}{\dfrac{\exp b}{\exp(\theta)}} = \frac{1}{1+\exp(b-\theta)}.$$

$$\frac{1}{1+\exp(b-\theta)} = \frac{1}{1+\exp[-(\theta-b)]} \Rightarrow$$

$$P_i(\theta) = \frac{\exp(\theta-b)}{1+\exp(\theta-b)}$$

Por tanto: $$P_i(\theta) = \frac{\exp(D(\theta-b))}{1+\exp(D(\theta-b))}$$

En esta última ecuación, la cual representa el modelo de Rasch, se ha incluido una constante de escalamiento D cuyo valor es 1.7. Esta constante hace que la función logística coincida con la curva obtenida en el modelo de ojiva normal.

El modelo de Rasch tiene la ventaja, a diferencia de la función de ojiva normal, de que es más sencillo y parsimonioso, porque no es necesario integrar para estimar los parámetros de la función y el número de elementos a estimar es menor.

El modelo de Rasch supone dos condiciones:

a) Que no se producen respuestas acertadas por “adivinación”.
b) Que todos los ítems de una prueba tienen el mismo nivel de discriminación.

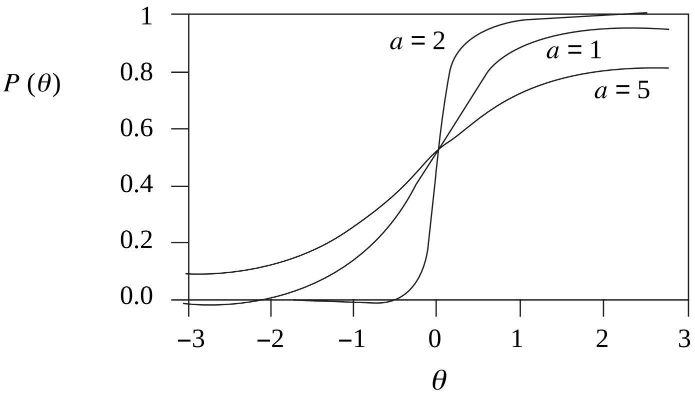
Modelo logístico de dos parámetros

En este modelo de dos parámetros, o modelo de Birnbaum, además del parámetro b_i que se refiere a la dificultad del ítem, en cada reactivo se tiene un índice diferente de discriminación a.

Siguiendo la derivación del modelo anterior, tendría que:

$$P_i(\theta) = \frac{\exp[a(\theta-b)]}{1+\exp[-a(\theta-b)]} = \frac{1}{1+\exp[Da(\theta-b)]}$$

Figura 16.7 Modelo de dos parámetros



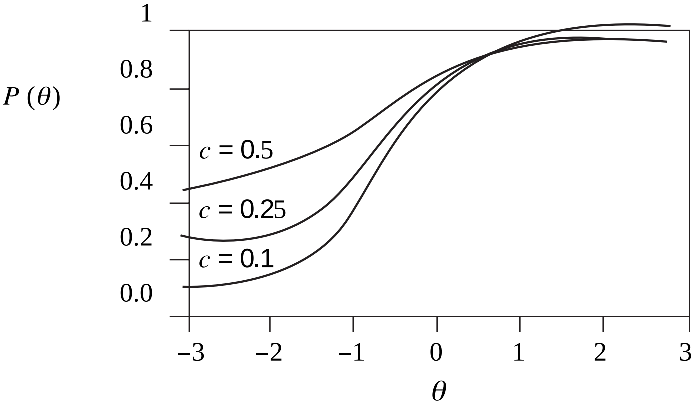
En estas curvas características del ítem se observan dos ítems con distinto índice de dificultad y diferentes índices de discriminación. Este modelo, como en el anterior, supone que no hay aciertos por adivinación y, con ello, que no existe en la ecuación el parámetro que refleje esta posibilidad.

Modelo logístico con tres parámetros

El tercer parámetro en los modelos logísticos supone el hecho de que los sujetos examinados de más baja capacidad tienen una probabilidad mayor que cero de responder correctamente al ítem. Lo anterior necesariamente debe interpretarse como elección al azar de la opción correcta; el valor de (*c*) suele ser menor que el valor esperado por simple azar. Por eso se le denomina parámetro de “seudoadivinación” o “seudo-azar”. La expresión del modelo de tres parámetros sería:

$$P_i(\theta) = c + (1-c)\frac{1}{1+\exp\left[Da(\theta-b)\right]}$$

Figura 16.8 Modelo de tres parámetros



En esta gráfica se ilustra el modelo de tres parámetros; se muestran tres ítems con un nivel de dificultad similar, pero con diferentes niveles de discriminación y con valores diferentes en el parametro “*c*” de “seudoadivinación”.

PRINCIPALES SUPUESTOS DE LA TRÍ

La TRÍ asume que existe una relación funcional entre los valores de la variable que se busca medir con los ítems y la probabilidad de contestarlos correctamente; por lo que en los modelos de la TRÍ, la probabilidad de acertar a un ítem depende (si el modelo es adecuado) de un factor: el nivel de θ. Otros supuestos son:

Unidimensionalidad del test

En la teoría de la respuesta al ítem debe demostrarse que el conjunto de ítems que miden la variable θ constituye una sola dimensión, es decir, debe ser unidimensional. Entre los posibles métodos para comprobar que un conjunto de ítems son de esta índole, está el *análisis factorial,* que sigue siendo uno de los más utilizados. Mientras más alta sea la varianza que explique el primer factor, se identificará la existencia de *unidimensionalidad* de la prueba.

Indeterminación de la escala del rasgo latente

El rasgo latente θ es la característica de un sujeto que explica su desempeño al resolver un ítem. En la TRÍ, la escala en la que se define el rasgo está indeterminada. Es decir, el rasgo latente es una magnitud no observable que tiene origen y unidades arbitrarios. Para solucionar esta indeterminación, usualmente se atribuye a la escala de θ una media de cero y desviación estándar de uno.

Así, los valores de θ como los valores de b sirven para calcular $P(\theta)$. Y la distancia de $\theta - b$ es útil para obtener ese valor. Si se cambia el valor de θ, pero también el valor de b_i, la probabilidad será la misma. La implicación práctica es que debe haber elementos comunes para poder hacer una comparación entre medidas y usar una misma escala que sea comparable. Independientemente de la ubicación de la escala, en la TRÍ los parámetros de la curva característica del ítem se mantienen invariantes.

La independencia local

El supuesto de *independencia local* se refiere a que las respuestas de una persona ante los ítems a los que se somete en una prueba son estadísticamente independientes entre sí. Esto significa que el rendimiento de un sujeto a un ítem no está determinado por los resultados obtenidos en otros ítems de la prueba.

La respuesta de un sujeto a cada ítem sólo está relacionada con el rasgo que mide y nada más, por ninguna otra cosa. Por tanto, dos ítems no deben compartir ninguna característica que afecte la probabilidad de la respuesta correcta del sujeto, más allá de aquellas que supuestamente mide el ítem.

El supuesto de independencia local se cumple si la correlación parcial entre todos los posibles pares de ítems, eliminando el influjo común del factor medido, es 0. Un conjunto de ítems es *unidimensional* cuando el número de rasgos necesarios para hacer cero las correlaciones parciales entre los ítems, es igual a 1 (un rasgo).

Sea $\theta_j = (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j}, ..., \theta_{pj})$ Vector de rasgos latentes a un conjunto de ítems.

Si V_i = Variable que puede adoptar sólo dos valores: $u_{ij} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$

Si se cumple el supuesto de independencia local, entonces

$P(V_1 = u_1, V_2 = u_2, V_3 = u_3, \ldots, V_p = u_p \mid \theta)$

Matemáticamente, puede expresarse como un producto de probabilidades:

$P\ (V_1 = u_1 \mid \theta) \cdot P\ (V_2 = u_2 \mid \theta) \cdot P\ (V_3 = u_3 \mid \theta) \ldots P(V_i = u_i \mid \theta) \ldots P\ (V_p = u_p \mid \theta)$

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL EXAMINADO Y LOS ÍTEMS

La teoría de la respuesta al ítem supone que la respuesta a cada ítem depende sólo del nivel de destreza o habilidad de un sujeto que se expone a una prueba. Así, para cada sujeto es necesario estimar sólo un parámetro individual: θ

Entonces si aplica un test de cierto número de ítems a N sujetos, el número de parámetros de la habilidad que debe estimar, es N, uno por cada sujeto. El número de parámetros de los ítems dependerá del modelo elegido.

Método de estimación de máxima verosimilitud

En la TRÍ se cuenta con varios métodos de estimación, tales como la máxima verosimilitud conjunta, condicional o marginal. Cuando se cuenta con un banco de ítems calibrados, en el que se conocen las características de los parámetros de cada ítem, se puede utilizar entonces la función de verosimilitud para estimar los parámetros individuales.

$$P\ (U) = P_1^{u_1} \cdot Q_1^{(1-u_1)} \cdot P_2^{u_2} \cdot Q_2^{(1-u_2)} \cdot P_3^{(u^3)} \cdot Q_3^{(1-u^3)} \ldots Pn^{u_n} \cdot Qn^{(1-u_n)} = L$$

Por ejemplo, P es una función de θ, a y b en el modelo de dos parámetros. Entonces, el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud viene dado de la siguiente forma:

$\ln L = U_1 \cdot \ln P_1 + (1\text{-}U_1) \ln Q_1 + U_2 \ln P_2 + (1\text{-}U_2) \ln Q_2 + \ldots Un \cdot \ln Pn + (1\text{-}Un)$

$\ln L = f\,(\theta)$ debido a que: $P_1 = P\ (U_1 = 1 \mid \theta)$

$Q_1 = P\ (U_1 = 0 \mid \theta)$

Esta función tiene los máximos para los mismos valores de θ, a y b que la función de verosimilitud. Para identificar el máximo de la función, se iguala la primera derivada de θ a cero.

$$\frac{d\ \ln L}{d\theta} = 0$$

Si se resuelve esta ecuación y obtiene el valor de θ que la satisfaga, se obtiene el estimador de máxima verosimilitud.

Como se trata de estimar todos los valores de θ, hay que usar métodos numéricos, debido a que es difícil obtener soluciones analíticas de las ecuaciones. Así, los parámetros se estiman, por ejemplo, mediante el método de Newton-Raphson.

Otros métodos de estimación de parámetros, además del de máxima verosimilitud conjunta, condicional o marginal, son los bayesianos. En términos generales, a partir de la distribución *a priori* de θ y de la función de verosimilitud, se obtiene la distribución *a posteriori*, de $L\ (q) \cdot \varphi\ (q)$. Entonces, se obtiene una función con un máximo definido más preciso.

Estimación de los parámetros: *a* y *b*

1) $\hat{a} = \dfrac{rbp}{\sqrt{1\ -}\ \sqrt{bp}}$. Sería la aproximación por índices de la teoría clásica

2) $\hat{b} = \dfrac{Z_i}{rbp}$. En la TRÍ, es importante recordar que $a = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y que $b = \dfrac{y}{\beta}$

La estimación de los parámetros se realiza por aproximaciones sucesivas (iteraciones). Si se desconocen los valores de los parámetros de los ítems, se inicia a partir de un valor aproximado que puede darse como cierto. A partir de este valor inicial se estiman los valores de los parámetros de los ítems; y entonces, con esos valores se calcula el valor de los nuevos parámetros individuales. A partir de los parámetros individuales se estiman de forma reiterada los parámetros de los ítems. El proceso de iteraciones se repite hasta que los valores de los parámetros converjan y se detenga el proceso de estimación.

FUNCIÓN DE INFORMACIÓN

La teoría de la respuesta al ítem permite estimar el valor de θ y también puede proporcionar una medida de precisión de las estimaciones en la medida del rasgo.

La cantidad de información que da la CCÍ de un ítem en un punto dado, depende de dos aspectos básicos:

1. De qué tan bien el ítem es capaz de discriminar entre los sujetos alrededor de ese punto (pendiente de la curva), es decir, la derivada primera en ese punto.
2. De qué tan precisas son las predicciones de la curva característica del ítem en ese punto, es decir, de la varianza.

Mientras más pendiente, mayor discriminación; esto es, el ítem ofrece más información. Y mientras más varianza, mayor error y menos información.

$$(\theta j) = \frac{1}{\sigma^2 \theta j}$$

Por tanto, el concepto de cantidad de información para un determinado valor de θ se define como el inverso de la varianza de sus errores de medida en ese valor.

Así, la función de información viene dada por:

$$i(\theta) = \frac{P_i\ (\theta)^2}{P_i\ (\theta)\ Q_i\ (\theta)}$$

Usos de la función de información

La función de información en la TRÍ tiene una utilidad similar al coeficiente de confiabilidad de la teoría clásica, en cuanto a que ofrece una estimación sobre la precisión de la medida y el nivel de error. Pero aquí la función de información es un concepto más fuerte.

En el caso de la TRÍ, la función de información sólo depende de la relación de cada ítem con el rasgo que pretende medirse. Los principales usos de la *F* (*I*) son:

1. La función de información es un indicador que permite conocer la precisión con que mide cada ítem en un test.
2. Al calcular todos los niveles de θ se obtienen las funciones de información que sirven para construir y seleccionar los tests más adecuados, con el máximo de información en el punto de corte.
3. La función de información también sirve para aplicar tests adaptativos por computadora. Este procedimiento se ahorra la presentación de ítems intermedios o extremos y sólo selecciona los más informativos en el nivel de rasgo de cada individuo que está evaluándose.
4. En la teoría de la respuesta al ítem, la función de información tiene una función similar al coeficiente de confiabilidad en la TCT. Como se ha señalado, este concepto es mucho más robusto y sustituye a la confiabilidad clásica.
5. La función de información de un test toma valores distintos para cada nivel del rasgo que se mide. Así, se cuenta con una herramienta más precisa y poderosa para la construcción de pruebas.

Función de información del test

La función de información de un test es la suma de las funciones de información de los ítems que lo conforman. Las funciones de información de un test y de cada ítem están dadas por:

En un test: $X = \sum_{i=1}^{n} U_{ij}$, donde n = número de ítems

Entonces, para el sujeto $J \Rightarrow$ como $U_{ij} \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{array}$

$\varepsilon\ (U_{ij} \mid \theta) = 1\ P\ (U_{ij} = 1 \mid \theta_j) + 0\ P\ (U_{ij} = 0 \mid \theta_j =$

$P\ (U_{ij} = 1 \mid \theta_j)$ [curva característica del ítem]

$\varepsilon\ (X \mid \theta_j) = \sum_{i=1}^{n} P_i\ (\theta_j)$ [curva característica del test]

El inverso de la función de información = la varianza del estimador en ese punto

$$V(\hat{\theta} \mid \theta) = \frac{1}{(\theta)}$$

El error estándar de medida de θ es por tanto: $S_e = \dfrac{1}{\sqrt{(\theta)}}$

La función de información de los ítems, de una subescala o un test, constituye una de las herramientas psicométricas más importantes en la actualidad para la construcción, aplicación y análisis de los tests.

EVALUACIÓN DE BONDAD DE AJUSTE DEL MODELO

Las ventajas y potencial de los modelos de la TRÍ para resolver problemas de medición son muy prometedoras. Sin embargo, no pueden lograrse sólo con estimar los parámetros de un modelo con un programa de computadora disponible para ello. Dichas ventajas son posibles solamente cuando el ajuste, entre el modelo y los datos obtenidos de las respuestas a los ítems del test, es satisfactorio.

Entre los métodos que existen para evaluar el ajuste del modelo a la distribución de resultados obtenidos, se han utilizado diferentes procedimientos estadísticos e indicadores. Por ejemplo, las técnicas basadas en el estadístico *ji*-cuadrada consisten en comparar valores pronosticados por el modelo con los valores reales obtenidos empíricamente. Para ello, se divide la distribución de θ en varias categorías o fractiles, se les calcula la frecuencia esperada y se comparan los valores pronosticados con los datos en cada una.

El estadístico *ji*-cuadrada de Yen, conocido como Q_1, es un procedimiento que se utiliza para comprobar la bondad de ajuste del modelo elegido. Está dado por la siguiente expresión:

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{N_j\ (O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}\ (1 - E_{ij})}$$

La distribución se divide en:

m = el número de categorías o fractiles sobre la habilidad estimada de θ.

O_{ij} = la proporción de respuestas correctas al ítem i en la categoría j.

E_{ij} = la proporción pronosticada de respuestas correctas a ese ítem i para cada j.

N = el número de sujetos examinados dentro de cada fractil.

El estadístico de Yen se distribuye aproximadamente como una *ji*-cuadrada con $m - k$ grados de libertad, donde k = número de parámetros del modelo.

Interpretación del índice de bondad de ajuste

En el caso de un buen ajuste de los datos al modelo, los valores del estadístico de Yen coincidirían con *ji*-cuadrada en todas las categorías. Lo que indicará el valor de *ji*-cuadrada es si la diferencia es estadísticamente significativa o no.

Es importante recordar que en la evaluación de la bondad de ajuste se espera que el valor de *ji*-cuadrada con $m - k$ grados de libertad no sea significativo, con el fin de considerar un buen ajuste del modelo.

En general, se ha observado que los resultados de las pruebas estadísticas de ajuste del modelo son sensibles al tamaño de la muestra utilizada. Sin embargo, al menos en dos situaciones extremas identificables, los resultados pueden tener una interpretación clara en la prueba de ajuste:

1. Cuando el tamaño de la muestra es pequeño y se obtiene un mal ajuste; es decir, si el valor del estadístico de Yen resulta muy significativo.

En este caso, el investigador puede tener la confianza de concluir que el modelo elegido no ajusta satisfactoriamente a los datos obtenidos y, por tanto, no es el adecuado, o bien, es necesario revisar el funcionamiento de ítems.

2. Cuando el tamaño de la muestra es grande y efectivamente se obtiene un buen ajuste. Esto es, cuando el valor de *ji*-cuadrada de Yen no resulta significativo.

   En este caso, el investigador puede tener la confianza para asumir que, a pesar de una muestra grande, el modelo sí se ajusta a los datos de manera satisfactoria, por lo que es adecuado para estimar los parámetros de ese conjunto de ítems.

MODELOS POLITÓMICOS DE LA TEORÍA DE LA RESPUESTA AL ÍTEM

Como se ha explicado en las secciones anteriores uno de los propósitos centrales de la teoría de la respuesta al ítem es la especificación de una función matemática que relaciona la probabilidad de respuesta de un individuo a un ítem con una capacidad o habilidad que se busca medir. Durante los primeros esfuerzos de este enfoque se trabajaron modelos aplicables a instrumentos unidimensionales con respuestas dicotómicas mediante el análisis de funciones de uno, dos o tres parámetros, en formulaciones matemáticas de ojiva normal o logísticas.

El danés George Rasch (1960) fue el primer investigador que se interesó en desarrollar un modelo logístico de sólo un parámetro. El planteamiento básico de Rasch difería de la aproximación clásica para abordar el problema de la medida de variables psicológicas, pero también del tipo de manejo matemático; había desarrollado un modelo psicométrico que daba cuenta de manera objetiva del desempeño de un individuo (su capacidad) en función sólo del nivel de cada ítem (su dificultad) como unidad básica de medida.

A partir de los antecedentes expuestos, los modelos de medida de la teoría de la respuesta al ítem desarrollados en las últimas décadas, además de superar las limitaciones de la teoría clásica de los tests, han aprovechado y potenciado los avances matemáticos y tecnológicos de la psicometría moderna. Hoy día se cuenta con mayores ventajas estadísticas e informáticas y se han podido derivar generalizaciones y aplicaciones específicas dentro de los modelos básicos. Asimismo, se han logrado avances en los procedimientos para la estimación de parámetros y el análisis de datos no sólo de carácter dicotómico, sino también para diferentes formas de respuesta, escalas multidimensionales e instrumentos de medida multicategoriales con modelos politómicos de procesos psicológicos y conductuales (Masters, 1982; Van der Linden & Hambleton, 1997).

En efecto, en la evaluación e investigación educativa y social con frecuencia se han aplicado instrumentos con formatos de respuesta muy diferentes a los clásicos tests con ítems dicotómicos de aptitudes y aprovechamiento escolar. Entre los tipos de respuestas que se evalúan, a menudo se usan instrumentos con respuestas categóricas, de crédito parcial y escalas de valoración con respuestas graduadas. Algunos instrumentos miden actitudes, frecuencia de conductas o la resolución de problemas, entre otros procesos o componentes cognoscitivos y conductuales, mediante escalas tipo Likert. Por ello, en los últimos años también la investigación psicológica y social ha enfocado la atención en la aplicación de otros modelos psicométricos, a fin de analizar diversos tipos de ítems y desarrollar escalas con datos politómicos.

Los nuevos modelos se han diseñado para datos obtenidos bajo otras condiciones de control o estandarización, a fin de analizar respuestas multicategoriales, ordenadas y no ordenadas, de procesos y en formatos más abiertos y flexibles. Estas variaciones han implicado que las puntuaciones tengan que ajustarse a diferentes variables y por tanto nuevos parámetros a considerar y métodos para estimarlos. Por ejemplo, si el puntaje depende de la decisión entre alternativas de respuesta en cada ítem, es claro que esto dependerá del tipo de opciones que deberán parametrizarse para este tipo de ítems.

El principio metodológico y estadístico general de esta clase de modelos se refiere al aspecto básico de identificar parámetros separados de cada factor del ítem, ajustando y estimando (controlando) los efectos de los parámetros de respuestas. En esta nueva etapa de la psicometría se han logrado avances en el desarrollo y aplicación de modelos dentro de la teoría de la respuesta al ítem que constituyen procedimientos adecuados para el análisis de datos politómicos. Por ejemplo, en el uso de escalas tipo Likert o en instrumentos con formatos multicategoriales de respuesta o politómicos.

Uno de los primeros desarrollos de los modelos politómicos fue el que realizó Fumiko Samejima entre 1969 y 1973, quien siguiendo un enfoque thurstoniano de evaluación de umbrales de discriminación en juicios de elección categorial, aplicó un modelo de ojiva normal para analizar datos de categorías ordenadas. En esa época no se mostraba aún mucho interés por desarrollar nuevos modelos, sino en aprovechar las aplicaciones prácticas y el desarrollo de los modelos dicotómicos existentes para pruebas de aptitudes y desempeño escolar. Más adelante se empezaron a derivar dentro de la TRÍ modelos para escalas de valoración o de clasificación por Andrich y Andersen; de categorías nominales de Bock; modelos de crédito parcial de Masters o el de Muraki; modelos logísticos de respuesta graduada de Samejima; de alternativas múltiples de Thissen & Steinberg; modelos multidimensionales de Wilson & Wang; o de componentes y procesos cognoscitivos de Embretson, entre otros modelos psicométricos que se están aplicando actualmente (Van der Linden & Hambleton, 1997).

Modelos politómicos para categorías ordenadas

En la psicometría existen fundamentalmente dos tipos de modelos para analizar datos de respuestas para categorías ordenadas (Masters, 1982). Las dos aproximaciones se diferencian en los supuestos que manejan y en el enfoque metodológico. Por un lado, los modelos tipo Thurstone parten del supuesto de que los sujetos responden al ítem de una forma racional; es decir, suponen que el ítem induce en el sujeto una reacción subjetiva, identificada como proceso discriminal. Esto significa que la probabilidad de respuesta a un ítem depende de la relación entre el valor de esa reacción específica y los parámetros del ítem. Otra característica que asumen estos modelos es que si se unen categorías adyacentes se suman sus probabilidades, mientras que las categorías de las demás permanecen invariantes. Un modelo derivado de esta tradición metodológica es el modelo de respuesta graduada de Samejima, el cual se mostrará como un ejemplo de desarrollo de un modelo para datos politómicos.

Por otro lado, existen desarrollos de los modelos tipo Rasch que parten de una lógica distinta. En términos generales, dentro de éstos, primero se considera el tipo de datos que se obtienen al aplicar un test o una escala, luego se analiza la matriz de los puntajes de los sujetos y de los ítems y, a partir de esos puntajes, se hace una transformación directa a los parámetros que permiten estimar los datos, por último se deduce la función de probabilidad. Este tipo de modelos debe cumplir una condición para estimar los parámetros: contar con *estadísticos suficientes* que contengan toda la información muestral referida a cada parámetro de los sujetos y los ítems. Los estadísticos suficientes se refieren a las puntuaciones de los sujetos en el test y a las de los ítems de las respuestas de los sujetos de la muestra.

En los modelos tipo Rasch se asume que la puntuación del sujeto en el test contiene toda la información disponible para estimar el nivel del rasgo (θ), lo cual permite contar con un valor resumido global de los patrones de respuestas. Es decir, todos los sujetos con la misma puntuación, independientemente del patrón específico de respuestas, tendrían el mismo valor estimado de θ. Por lo contrario, en los modelos tipo Thurstone los sujetos con la misma puntuación global en el test pueden tener valores estimados de θ diferentes. Por ello, se dice que en los modelos thurstonianos la puntuación del sujeto no es un estadístico suficiente de θ, lo cual, lejos de ser una limitación, evita que se pierda parte de la información que contiene el vector de respuestas al resumirlo en una puntuación global.

Otra diferencia entre modelos thurstonianos y modelos de Rasch consiste en que estos últimos asumen que la aditividad entre categorías adyacentes sí afecta la probabilidad de las demás categorías. Esto supone que, cuando el sujeto elige una respuesta, no se evalúa cada categoría por separado, sino todas en su conjunto. En cuanto al parámetro de los ítems, se considera similar la puntuación del ítem con todos los sujetos de la muestra como un estadístico suficiente para estimar los parámetros, lo cual no sucede con dichos modelos de límites categoriales tipo Thurstone. Ejemplos de modelos tipo Rasch son el modelo de escala de clasificación de Andrich y el de crédito parcial de Masters.

Modelo de respuesta graduada

El modelo de respuesta graduada (MRG) representa un conjunto o familia de modelos matemáticos para categorías politómicas ordenadas (Samejima, 1997). Dicho modelo se aplica principalmente en el análisis de datos psicométricos de escalas con categorías, por ejemplo de letras, de números en un intervalo, o categorías de respuesta que asumen cierta graduación ordenada en los valores de las alternativas posibles de la variable que se mide. Otros ejemplos serían las escalas de cantidades o frecuencia estimada, valoraciones cualitativas, de procesos o aptitudes parciales y en las escalas tipo Likert. El MRG puede usarse con medidas cognoscitivas, habilidades y actitudes. Este tipo de modelos tienen la ventaja de proporcionar al investigador la posibilidad de conocer la precisión de la medida lograda por la escala para cada individuo y desarrollar escalas independientes de la muestra (De Ayala, 1993).

La función de respuesta para cada categoría de la escala vendría dada por:

$$P_{ui}\,(\theta) = \text{Prob}\,[U_i = u_i \mid \theta]$$

En donde U_i se refiere a la variable aleatoria y denota la respuesta graduada al ítem i, de tal forma que u_i representa la respuesta discreta específica a ese ítem en una categoría dada. Además, en un conjunto de ítems podrían identificarse los patrones de respuesta que indicarían las secuencias de U_i para cada ítem, desde $i = 1$ hasta $i = n$. Así, para ese conjunto de ítems tiene la notación del siguiente patrón de respuestas:

$$V = \{\, U_1,\, U_2,\, U_3,\, \ldots\, U_n\}$$

Si se asume el principio de independencia local para un grupo de sujetos con el mismo valor de habilidad θ, la distribución de las respuestas sería independiente de un patrón a otro.

Entonces, la probabilidad condicional $P_v\,(\theta)$ para el patrón de respuestas V sería:

$$P_v(\theta) = \text{Prob}\,[V = v \mid \theta] = \prod_{u_i \varepsilon \text{v}} P_{ui}\,(\theta) = L(V \mid \theta)$$

Semejima (1969) propuso los primeros modelos de respuesta graduada, utilizando tanto el modelo de ojiva normal como el modelo logístico para categorías ordenadas. Posteriormente, esta misma investigadora desarrolló un marco general para distinguir dentro de los modelos logísticos, el caso homogéneo del caso heterogéneo (Samejima, 1973). En el caso homogéneo la función P_u tiene la misma forma para todas las alternativas del ítem. En el caso heterogéneo las funciones P_u pueden variar en las alternativas y no sólo con cada ítem.

El MRG se caracteriza como un modelo de diferencias; es decir, al analizar las probabilidades para cada categoría de respuesta, la probabilidad de una puntuación dada se calcula como la diferencia entre dos funciones. Otra característica del modelo se refiere a que asume el principio de aditividad; esto es, que cuando dos opciones de respuesta se juntan en una, la probabilidad de esta última sería igual a la suma de las probabilidades de las alternativas originales. En contraste con los modelos tipo Rash se considera que este modelo no cuenta con estadísticos globales suficientes para estimar θ de un individuo.

El MRG parte del principio de que al responder a un ítem es necesario completar una serie de operaciones o pasos previos en forma secuencial; esta secuencia viene dada de tal forma que para completar el paso (u + 1) es necesario haber completado los pasos (u – 1) anteriores exitosamente.

Por ejemplo, considere P^*u como la probabilidad de completar o cubrir satisfactoriamente los u o más pasos anteriores; entonces tendría que $P*0 = 1$ debido a que todos los sujetos que eligen una categoría del ítem pueden completar al menos 0 pasos. En el otro extremo tendríamos que $P*m + 1 = 0$ en donde si m es el número máximo de categorías o pasos posibles del ítem, ningún sujeto podría completar más pasos u obtener un puntaje mayor del máximo posible de la escala.

La función $P*u(\theta)$ se usa para estimar las probabilidades reales de la puntuación lograda en cada ítem. Esta función representa la probabilidad condicional con la cual los sujetos con cierta capacidad θ completan los procesos cognoscitivos, o pasos, con éxito, hasta el paso u_i. Para cada paso o respuesta se asume que la P_{ui} (θ) es no decreciente, de tal manera que cada ítem posee una relación directa y positiva con la capacidad o variable psicológica medida.

La función de respuesta para cada categoría P_{ui} (θ) en una escala graduada en un ítem i estaría dada por:

$$P_{ui}\ (\theta) = \left[\prod_{s \le u_i} Ms\ (\theta)\ 1 - Mu_i + 1\ (\theta)\right]$$

Entonces: $$P*u_i\ (\theta) = \prod_{s \le u_i} Ms(\theta)$$

También puede expresarse como: $Pu_i(\theta) = P^*_{ui}(\theta) - P^*u + 1\ (\theta)$

Ésa sería la forma más general del modelo MRG que resumiría una de sus principales características: el análisis de probabilidades de cada categoría estará dado por la diferencia entre las probabilidades de las curvas límite o de frontera entre cada paso o categoría de respuesta. Dicha función puede calcularse con el modelo de ojiva normal o con un modelo logístico.

Es importante notar que P^*u_i (θ) viene a ser la función de respuesta positiva al ítem i, y donde el puntaje graduado del ítem se transforma en un puntaje binario provisional, asignando 0 a todas las demás categorías menores que u_i, y se asigna 1 a las categorías mayores o iguales a u_i. Es claro que si $P*u_i(\theta)$ también es no decreciente en θ y asume la unidad para $u_i = 0$ y el cero para $u_i = m + 1$ en el rango completo de θ; es decir, en la escala de los diferentes pasos o categorías del intervalo de respuestas.

La función logística del modelo politómico de respuesta graduada sería:

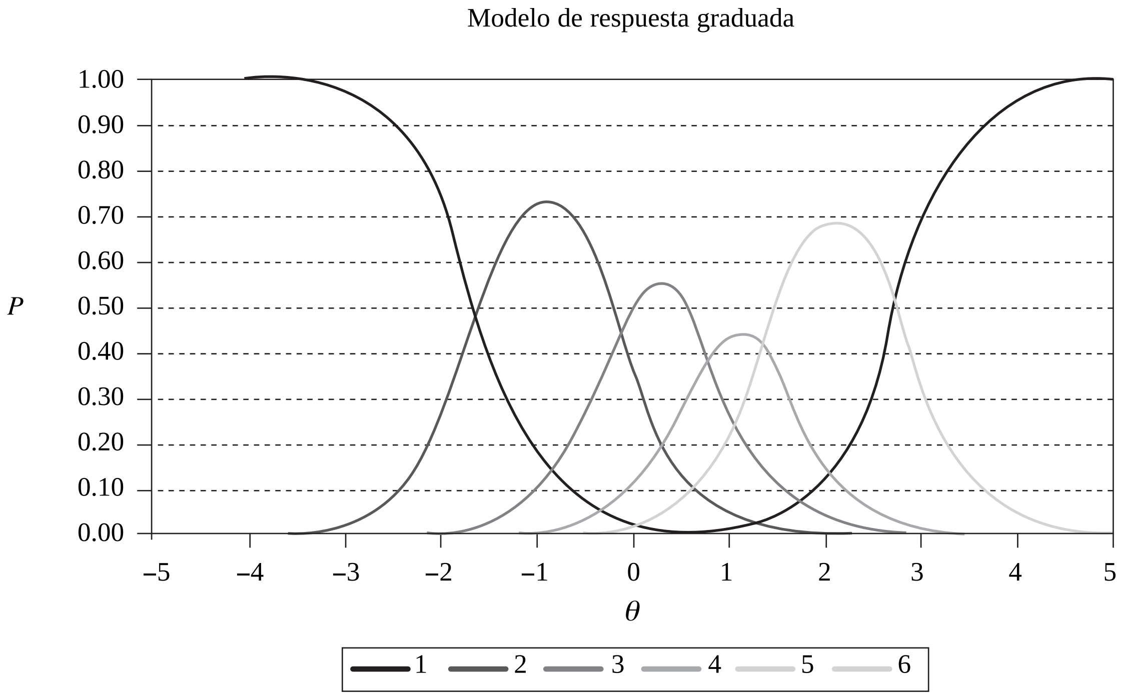
$$P*u = \frac{\exp[D\ \alpha_i\ (\theta - \beta u_i)]}{1 + \exp[D\ \alpha_i\ (\theta - \beta u_i)]}$$

En donde, como se ha señalado anteriormente, la constante $D = 1.7$.

Así, las probabilidades serían las mismas con el modelo de ojiva normal.

A continuación se muestra un ejemplo gráfico del modelo politómico MRG para un ítem con seis categorías de respuesta graduada y sus probabilidades para cada categoría estimadas con la función logística.

Figura 16.9 Representación de funciones de respuesta de un modelo politómico



Ventajas de los modelos politómicos

En suma, las principales ventajas de los modelos politómicos de la TRÍ para estimar las propiedades psicométricas de una escala frente al análisis clásico de datos con puntuaciones globales del test, serían:

1. El análisis de un modelo politómico de la TRÍ implica un estudio previo de la dimensionalidad del test o de la escala que se está construyendo. Al aplicar el modelo no es suficiente con estimar sus parámetros; es necesario evaluar la bondad de ajuste del modelo a los datos, a fin de considerar que la escala es unidimensional y adecuada para evaluar a los sujetos.
2. Este tipo de modelos permite ubicar a los sujetos en una misma escala. Como se sabe el parámetro *b* del ítem puede interpretarse como el valor afectivo de preferencia del sujeto y permite compararlo con el parámetro de rasgo del sujeto. Mediante un análisis de frecuencias no se podría apreciar esto debido a que no proporciona información de la intensidad de preferencia de la categoría del ítem.

3. La construcción de escalas con estos modelos permite estimar predicciones sobre la probabilidad de respuesta de un sujeto ante la presentación de nuevos ítems, del mismo tipo. Esta propiedad permite construir instrumentos de medida seleccionando los ítems que sean máximamente informativos.
4. Los modelos de respuesta graduada para categorías ordenadas constituyen una alternativa metodológica útil para el desarrollo de escalas que miden rasgos y procesos psicológicos diferentes de las medidas tradicionales de conocimientos.
5. No obstante la limitada generalidad que pueden alcanzar algunos modelos como el MRG, representan aspectos positivos al restringir la interpretación del evaluador a una población, a un conjunto de ítems y a un contexto particular. De esta forma se fortalecería la validez metodológica y el investigador estaría obligado a buscar mayor evidencia empírica que apoye la validez de constructo de la escala.

Resumen

Un aspecto central en la teoría de la respuesta al ítem es la especificación de una función matemática que relaciona la probabilidad de respuesta de un individuo a un ítem con una habilidad que se busca medir. Inicialmente en este enfoque se desarrollaron modelos aplicables a instrumentos unidimensionales, con respuestas dicotómicas, mediante el análisis de funciones de uno, dos o tres parámetros, en formulaciones matemáticas de ojiva normal y logísticas.

En las últimas décadas, además de superar las limitaciones de la teoría clásica de los tests, se han aprovechado y potenciado los avances matemáticos y tecnológicos de la psicometría moderna. En consecuencia se cuenta con mejores métodos estadísticos y mayores ventajas informáticas. Además se han podido derivar generalizaciones y aplicaciones específicas dentro de los modelos básicos. Asimismo, se han logrado avances en los procedimientos para la estimación de parámetros y análisis de datos, pero también para diferentes formas de respuesta, e instrumentos de medida multicategoriales con modelos politómicos de procesos psicológicos y conductuales. El principio metodológico y estadístico general de los modelos psicométricos se refiere al aspecto básico de identificar parámetros separados de cada factor del Ítem, ajustando y estimando los efectos de los parámetros de respuestas.

En la investigación educativa y social con frecuencia se aplican instrumentos con formatos de respuesta diferentes a los clásicos tests con ítems de aptitudes o de aprovechamiento escolar. Los tipos de respuestas que se evalúan requieren instrumentos de respuestas categóricas, de crédito parcial y escalas de valoración con respuestas graduadas. Otros instrumentos miden actitudes, frecuencia de conductas o resolución de problemas, entre otros procesos o componentes cognoscitivos y conductuales. La investigación psicológica y social ha enfocado la atención en la aplicación de nuevos modelos estadísticos y psicométricos, a fin de analizar y desarrollar escalas con datos politómicos y multidimensionales.

Apéndice

Los escritos científicos

Mtra. Alejandra Terán Álvarez del Rey
Facultad de Estudios Superiores Iztacala, UNAM

Dr. Serafín Mercado Domenech
Facultad de Psicología, UNAM

INTRODUCCIÓN

Una vez hecho el análisis de la literatura (libros, capítulos de libros y artículos) sobre un determinado tema, habiéndose planteado un problema interesante y trascendente de investigación, seleccionado una metodología pertinente para resolverlo, habiendo colectado los datos y analizado estadísticamente los resultados, lo que queda es publicarlos. Nada de lo anterior tiene sentido si el resultado de los esfuerzos realizados para avanzar en la comprensión de un aspecto de la realidad, usando el método científico no se hace público, es decir, se pone a la disposición de la comunidad científica, realizando una aportación, no importa cuán pequeña o grande sea ésta.

La ciencia es una empresa social, sobre la cual miles, tal vez en la actualidad, millones de individuos participan de un arduo proceso de generación de ideas, análisis, discusión de las mismas y de contrastación de éstas contra la evidencia.

Los congresos y, fundamentalmente las publicaciones, son los foros donde se lleva a cabo el juicio que en forma paulatina moldea el resultado de la ciencia. Para todo fin práctico, una investigación es un informe de los resultados de alguna investigación específica, mientras que otros, en su mayoría en la forma de libros o capítulos especializados en antologías y libros coordinados, son revisiones críticas del estado del arte del problema en cuestión. Otros más son discusiones teóricas donde se analiza, a la luz de la evidencia acumulada hasta el momento, la mejor explicación posible, tal vez estableciendo el debate entre diferentes aproximaciones o teorías.

Mientras un trabajo no llega a la prensa, éste no se encuentra sujeto al proceso natural y muy saludable de la crítica. Popper habla de tres mundos, el mundo objetivo de la realidad, el mundo de las percepciones e ideas acerca de este primer mundo, donde se dan conjeturas acerca de sus entes y naturaleza y el tercer mundo, el mundo de las ideas publicadas y, por tanto, susceptible de ser analizado y criticado por los demás y hasta por uno mismo. La ciencia se da sólo en ese tercer mundo.

No obstante, lo importante que resulta publicar para la ciencia y el conocimiento, uno de los puntos que cuesta más trabajo de los artículos de investigación, divulgación, análisis de textos, antología o trabajos de tesis, es escribirlos: enfrentar la hoja en blanco requiere de tiempo para tomar el valor de hacerlo. Más difícil aún resulta preparar el escrito para su publicación. Es muy posible que usted, estimado lector, tenga algún trabajo en el cajón de su escritorio, el cual nunca se atrevió a enviar a alguna editorial, por temor al rechazo.

Tomando en cuenta que, dado lo que se señaló en los primeros párrafos, vale la pena tomarse el trabajo de preparar un escrito para enviarlo a una editorial, conviene eliminar prejuicios que muchas veces sólo están en el pensamiento de cada uno. Las razones, entre otras muy válidas pueden ser:

- Concluir una investigación, haciéndola llegar a los colegas.
- Ver de manera objetiva el esfuerzo realizado.
- Adquirir prestigio.
- Obtener alto valor curricular.

Por las razones señaladas, en este libro se incluye este apéndice, que pretende orientar acerca de cómo preparar un artículo para su publicación, tomando como base las recomendaciones de la American Psychological Association (APA) para el caso de los escritos del área social, y las del Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas (CIDRM) para el caso de los escritos biomédicos.

Qué escribir

Debido a que cada autor puede tener un motivo personal para escribir, conviene reflexionar acerca de que los buenos escritos resultan benéficos para el propio autor, los lectores, las instituciones y la ciencia. A fin de que tenga mayor probabilidad de ser publicado, un manuscrito debe cumplir varios requisitos, a saber:

- Buena calidad del contenido. Intentar disfrazar una investigación planteada o manejada de manera deficiente, resulta en un trabajo que está destinado al rechazo. Para los editores, un artículo que refleje deficiencia en el método, resulta inaceptable.
- Originalidad. Por desgracia, muchos autores, sólo por publicar, informan de cambios insignificantes en investigaciones previas de sí mismos o de otros. Esto tiene un costo para el conocimiento porque hace que avance con mucha lentitud o que no avance y además consume recursos de las instituciones y de los grupos de trabajo.
- Congruencia. Entre las operaciones específicas del estudio, el diseño, el análisis, con la interpretación y discusión de resultados.

Tipo de escrito

El tipo de escrito que puede hacerse es muy diverso, a continuación se esbozan algunos.

Artículos de investigación o **informes de estudios empíricos**, que son informes de investigaciones originales. Suelen incluir distintas secciones que son:

- **Introducción,** que resulta de la revisión de la literatura y en la cual se incluye el desarrollo del problema y se plasma el objetivo de la investigación.
- **Método**, apartado en el cual se describe con detalle cómo se llevó a cabo la investigación, de manera que otro investigador si lo desea, pueda repetirla.
- **Resultados,** importante sección en la cual se describen los resultados encontrados, tanto positivos como negativos o que contradigan a las hipótesis. Algunos autores temen que suene a fracaso el poner estos últimos; por lo contrario, permiten conocer caminos que no conducen a nada, evitan repeticiones innecesarias. Cabe recordar que no conviene hacer contrastaciones en este apartado, las cuales deben incluirse en el capítulo de discusión.
- **Discusión,** es la contrastación de lo encontrado en relación con lo que han dicho otros autores, así como la interpretación y análisis de las implicaciones de los resultados.

Artículos de reseña o recención. Son evaluaciones críticas de material ya publicado. Este trabajo, realizado con cuidado por un experto, es de gran ayuda para el conocimiento y para otros investigadores o estudiantes, debido a que define y clarifica problemas para posible investigación, permite conocer el “estado del arte” de un campo del conocimiento, identifica relaciones, contradicciones, lagunas e inconsistencias y propone pasos adelante para la posible solución de problemas.

La estructura de este tipo de escrito suele ser libre, si bien debe incluir:

- **Introducción.** Que incluya el qué, por qué, cómo, cuándo, dónde, para qué y para quién.
- **Cuerpo del escrito.** En el cual se ordena por relación la temática tratada.
- **Conclusión.** Que integre y haga explícitos los puntos señalados en el párrafo anterior.

Artículos teóricos. En este tipo de documentos, el o los autores recopilan y analizan las teorías existentes acerca de un tópico y finalmente contrastan y dan nuevas teorías o nuevos enfoques que permitirán disponer de distintos puntos de partida para la investigación. La estructura de este tipo de artículos y los de reseña es muy semejante, si bien en estos últimos se hace mayor énfasis en la conclusión.

Artículos metodológicos. Incluyen aproximaciones metodológicas nuevas, modificaciones de métodos existentes así como discusiones acerca de enfoques cuantitativos y de análisis de datos. Este tipo de artículo resulta muy útil al hacer el diseño de una investigación, sobre todo si tiene detalles suficientes como para que pueda valorarse la aplicabilidad de la metodología al diseño de un nuevo estudio.

Estudio de caso. Resultan de estudios acerca de un individuo o una organización, con el objetivo de ilustrar un problema, indicar algún modo de resolverlo o esclarecer una investigación o los elementos teóricos necesarios. Puede ser obligado utilizar material confidencial que quizá requiera autorización escrita del sujeto. Otra forma es alterar características específicas que tengan poca relación con las variables en estudio, limitar la descripción de rasgos particulares o encubrir los detalles del caso agregando material complementario.

Otros tipos de artículos. Menos frecuentes, pueden ser informes breves, comentarios y contestaciones a artículos ya publicados, discusiones acerca de métodos cuantitativos, historias de caso y monografías.

Cualquiera que sea el tipo de artículo que usted como autor desee publicar, se sugiere remitirse a la revista científica en la cual desee presentar su manuscrito, a fin de cubrir los requisitos que el comité editorial decide en cada revista.

Partes del manuscrito

Debido a que casi todos los artículos que se publican en ciencias sociales o biomédicas son informes de estudios empíricos, se presenta un esquema general de las partes que deben integrar un manuscrito. El autor debe seguir un esquema, dando por supuesto el enfoque de originalidad que lo hará único.

Hoja de portada o portadilla. Debe incluir el TÍTULO, parte importante del escrito dado que además de informar a los lectores acerca del estudio, también se utiliza como presentación del contenido en bases de datos. Debe sintetizar la idea principal, ser conciso, por sí solo debe ser explicativo del artículo. Se recomienda una extensión máxima de 15 palabras (la APA recomienda entre 10 y 12; el Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas (CIDRM) no pone extensión, sólo señala que debe ser “conciso pero informativo”) y se sugiere elaborarlo justo antes de enviarlo para publicación. Esto pudiera representar un problema debido a que en trabajos de tesis se exige un título al registrar el protocolo, sin embargo no existe impedimento para cambiar el título al publicar el trabajo.

Créditos. Deben incluir el o los nombres de los autores (sin grados académicos), completos, empezando por nombre(s) y apellidos, procurando siempre escribirlo de la misma manera, visualice su futuro como autor con muchas publicaciones y evite complicaciones a bibliotecarios y a otros investigadores. De igual manera anote la afiliación institucional, que es el lugar donde se realizó la investigación. Cuando no exista afiliación institucional, anotar la ciudad y la entidad de residencia bajo el nombre.

Cornisa. Es un renglón o título abreviado que se imprime en la parte superior de las páginas para identificar el artículo ante los lectores. Debe tener un máximo de 50 caracteres incluyendo letras, puntuación y espacios entre palabras.

Resumen. Es la carta de presentación del artículo, con frecuencia los lectores decidirán, con base en el resumen, si leerán el artículo completo y si les es útil como antecedente de su propia investigación. Por ello, el resumen debe ser: compacto en su información, legible, bien organizado, de corta extensión y completo. Es variable el número de palabras que cada revista acepta en el resumen, pero en términos generales es de 120 como máximo; revise lo que señala la revista en la cual desea publicar y apéguese a ello.

Una sugerencia para realizar su resumen: una vez concluido el artículo escriba las ideas principales, seleccione el párrafo, haga clic en el icono Herramientas y al desplegarse el menú haga clic en Contar palabras. Si el número excede al requerido, elimine algunos artículos, emplee dígitos para las cifras y evite frases trilladas o expresiones que no proporcionen información por sí mismas, como “Se concluye que...” o “Los resultados mostraron que...”.

Un buen resumen es **preciso**, no incluya en él información que no aparezca en el cuerpo del escrito. Es **completo**, no añada abreviaturas (excepto unidades de medida), escriba los nombres completos de pruebas y fármacos, defina términos poco comunes. Es **conciso** y **específico**, aproveche al máximo el lenguaje y haga que cada palabra y cada oración tengan en realidad contenido. **No evaluativo** sino informativo, no añada comentarios. Finalmente, debe ser **coherente** y **legible,** utilice verbos más que sustantivos equivalentes y emplee la voz activa en lugar de la pasiva (evite los gerundios).

El resumen de un artículo de investigación o informe de estudio empírico debe describir:

- Problema.
- Individuos participantes o sujetos especificando las características pertinentes como número, tipo, edad, sexo.
- El método experimental utilizado incluyendo mecanismos, forma de recopilación de datos, nombres de pruebas y nombres genéricos completos, así como dosis y vías de administración de los fármacos utilizados.
- Hallazgos incluyendo niveles de significado estadístico.
- Conclusiones e implicaciones o aplicaciones.

El resumen para un artículo de reseña o teórico debe incluir:

- Tema en un solo enunciado.
- Objetivo.
- Fuentes de información.
- Conclusiones.

El resumen de un artículo metodológico debe contener:

- Tipo general del método que se propone o discute.
- Características esenciales del método planteado.
- Rango de aplicación del método propuesto.
- Comportamiento del método, incluso su poder y la solidez de su estructura ante la violación de los supuestos teóricos.

El resumen de un estudio de caso debe describir:

- Al sujeto (individuo u organización) y sus características relevantes.
- La naturaleza del problema y su solución.
- Las preguntas que surgieron en relación con la investigación o fundamentación teórica.

Introducción. Por estar al principio del escrito, este apartado no se rotula, queda implícita. Debe describir el problema específico que se estudia y la estrategia de investigación. Resulta conveniente recordar que toda introducción debe incluir en los primeros párrafos, siempre el **qué** (problema de estudio), **por qué** (justificación), **cómo** (estrategia de investigación o método), **dónde** (institución o lugar donde se lleva a cabo la investigación), **para qué** (trascendencia). Es posible que sea necesario agregar el **para quién** si la investigación es por encargo de una institución, un grupo político, etcétera.

Según la APA, en la introducción deben anotarse los antecedentes. Procure no hacer una revisión histórica exhaustiva, cite y refiera sólo los trabajos pertinentes al tema de su investigación; evite los detalles no esenciales, en cambio haga énfasis en los hallazgos pertinentes, los aspectos metodológicos relevantes y los principales resultados y conclusiones. La extensión de la introducción no debe exceder de dos cuartillas y entre más corto mejor. Cabe recordar que una cuartilla es una hoja de papel bond tamaño carta, escrita por una sola cara, con márgenes de 2.5 o 3 cm por lado y con 28 renglones a doble espacio.

Método. En este apartado se describe con detalle la forma en que se llevó a cabo el estudio. Esta descripción permite a quien lo lee, evaluar si el método fue adecuado, así como la confiabilidad y validez de los resultados obtenidos. Además, como ya se mencionó, hace posible que otros investigadores repliquen el estudio si lo desean.

En este apartado es importante que se rotulen las subsecciones a fin de que queden muy claras. Algunas pueden ser:

- **Participantes o sujetos.** Si los sujetos son seres humanos, detalle la forma de selección y asignación, así como los acuerdos y pagos realizados, mencione si se obtuvieron consentimiento informado y acuerdos de confidencialidad. Mencione las principales características de las personas como sexo, edad, origen étnico, lugar de residencia y, si es pertinente, ocupación, nivel socioeconómico, grado de discapacidad, estado de salud y orientación sexual. Si alguna de estas características es variable en estudio, debe detallarla con precisión. En caso de que los sujetos no concluyan el estudio, mencione cuántos y las razones del abandono. En el caso de sujetos animales, mencionar el género, especie y número de cría y de dónde proviene, así como datos del proveedor. Debe indicar el número total de sujetos y cuántos de ellos fueron asignados a cada condición experimental.

  Por último, indique al editor de la revista a la cual envía su artículo, que el tratamiento de los participantes, sean seres humanos o animales, estuvo de acuerdo con las normas éticas de la APA ("Ethical Principales of Psychologists and Code of Conduct", APA 1992a) o en su caso del Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas (CIDRM).
- **Herramientas.** En esta subsección se describen en forma breve los equipos o materiales empleados y la función en el experimento. Los equipos de línea deben mencionarse con número de serie o modelo y datos del proveedor. Si fueron hechos *ex profeso* para el experimento, cabe hacer una ilustración detallada o una fotografía. El equipo estándar de laboratorio sólo debe mencionarse sin detalles.
- **Procedimiento.** Aquí se resume paso a paso la ejecución de la investigación, el método debe informar al lector con detalle, *qué* hizo el investigador y *cómo* lo llevó a cabo: la aleatorización, contrabalanceo, recopilación, de información en otro idioma. Si se emplean procedimientos nuevos o especiales, deben describirse puntualmente. En los artículos metodológicos, puede colocar en un apéndice las explicaciones más específicas como derivaciones y detalles de simulación de datos.

Resultados. Resuma los datos recolectados, el tratamiento estadístico o cualitativo y el producto obtenido. En esta sección es frecuente incluir contrastaciones de datos obtenidos por otros autores o analizar implicaciones de los mismos, en cuyo caso el aparato se denominará **Resultados y discusión**, o **Resultados y conclusiones**. Tal distribución dependerá mucho de la revista en la cual desea publicar. En opinión de quienes esto escriben, es mejor poner en apartados separados cada rubro, para mayor claridad de las ideas.

Como ya se mencionó, no omita los resultados que contradicen las hipótesis, quizá pensando en que se interprete como fracaso. Piense en el beneficio que aporta a otros investigadores el que usted les evite transitar por caminos equivocados.

El empleo de cuadros (tablas) y figuras es imprescindible en este apartado. Los aspectos a considerar para elegir uno u otro medio son: claridad, brevedad y economía. Evite repetir datos o emplear cuadros para información que puede decirse en dos o tres frases dentro del texto, como sería la distribución por sexo de los participantes.

Respecto de la presentación estadística, el enfoque puede ser muy diverso y las únicas sugerencias son: cuando presente datos provenientes de métodos estadísticos inferenciales (pruebas *t*, pruebas *F*, *ji* cuadrada), incluya información acerca de la magnitud o valor obtenidos de la prueba, los grados de libertad, la probabilidad de conseguir un valor tan extremo o más que el obtenido y la dirección del efecto.

Incluya estadística descriptiva (tamaño de muestra por celda, medias, correlaciones, desviaciones estándar) a fin de esclarecer la naturaleza del efecto que se está informando y para meta-análisis futuros. Por la misma razón es muy recomendable emplear intervalos de confianza, siempre el mismo en todo el artículo (por ejemplo 95 o 99 por ciento).

En el caso de sistemas de análisis de variables múltiples como los multivariados, análisis de regresión y de ecuaciones estructurales, son adecuadas la(s) media(s), el tamaño de la(s) muestra(s) y la matriz o matrices de varianza-covarianza o correlación. En caso de duda, los capítulos restantes de este texto están enfocados a resolverla, si bien el principio consiste en proporcionar al lector no únicamente información sobre la significancia estadística, sino datos suficientes para evaluar la magnitud del efecto o de la relación observados.

Discusión. Inicie esta sección con una exposición amplia de la sustentación o falta de ella, para las hipótesis originales. Aquí se aclaran y confirman las semejanzas y diferencias entre los resultados propios y los obtenidos por otros autores. Reconozca las limitaciones y señale las explicaciones alternativas de los resultados.

Conclusiones. Si decide colocar este apartado o lo solicita la revista a la cual se enviará el artículo, incluya aquí aspectos como importancia del problema, qué cuestiones dependen de los hallazgos, las proposiciones que se confirman o no mediante extrapolación a temas de mayor importancia. De igual manera, cómo pueden vincularse los hallazgos con fenómenos a niveles más o menos complejos de análisis y qué se necesita saber para establecer los vínculos. Si los hallazgos son válidos y replicables, mencione qué fenómenos psicológicos de la vida real es posible explicar o modificar con base en los resultados y si existen aplicaciones fundamentadas en esta investigación. Cuando sea pertinente, concluya esta sección con un comentario acerca de la importancia de sus descubrimientos.

Fuentes de información

Son los soportes materiales de donde es posible obtener información del conocimiento disponible. Se clasifican en fuentes primarias y secundarias.

Las primeras son artículos escritos como resultado de investigación, que pueden encontrarse en: revistas, bancos de información (*Psyc*INFO, Medline, entre otros), por Internet y en libros que se publican con intervalos de no más de seis meses, por ejemplo las Clínicas Médicas de Norteamérica. En este tipo de publicaciones puede encontrar información de avanzada y actualizaciones que no rebasan el año desde que se generó el conocimiento.

Las fuentes de información secundarias se refieren a artículos de revisión, actualización y a libros que tienen por lo menos un año desde que se generó el conocimiento. Son importantes dado que es la forma en que la mayoría de las personas recibe la información; si bien como fuente para escribir un artículo, algunos editores (o lectores) podrían cuestionarlo. En todo caso, como autor debe buscar ambas fuentes, a fin de tener la solidez del material que ya pasó la prueba de la crítica y la contrastación; más aquella que tiene el avance y la frontera del conocimiento.

Estilo

La escritura científica debe basarse en el método científico. Por tanto, el estilo de redacción que debe utilizarse de manera genérica es el estilo científico que es: racional, claro, objetivo, coherente y preciso. Para ello, las unidades de pensamiento, que pueden ser una palabra, una frase, oración (enunciado) o un párrafo deben organizarse, ser continuas y coherentes.

Se sugiere organizar las ideas por párrafos colocando una idea central al inicio (por ser la más importante) y cuatro o cinco, como máximo, ideas secundarias. Para redactar el siguiente párrafo, si la idea inicial no tiene mucha relación con la última del párrafo anterior, debe utilizarse una palabra o frase conectora, como la frase **Si bien** en el ejemplo siguiente:

> *Zea mays* es una planta monoica; sus inflorescencias masculinas y femeninas se encuentran en la misma planta. Las hojas toman una forma alargada íntimamente arrollada al tallo, del cual nacen las espigas o *mazorcas*. Cada mazorca está cubierta por filas de granos, cuyo número puede variar entre ocho y 30.
>
> **Si bien** la planta es anual, su rápido crecimiento le permite alcanzar hasta los 2.5 m de altura, con un tallo erguido, rígido, sólido. El tallo está compuesto a su vez por tres capas: una epidermis exterior, impermeable y transparente, una *pared* por donde circulan las sustancias alimenticias y una *médula* de tejido esponjoso y blanco donde almacena reservas alimenticias, en especial azúcares.

No obstante, cuando los editores se refieren a estilo, suelen hablar del estilo editorial, que son las reglas o principios que aseguran la presentación clara y consistente de la palabra impresa. El estilo editorial es el empleo uniforme de signos de puntuación, abreviaturas, construcción de cuadros y figuras, selección de encabezados, citas y referencias, y en general todos los elementos que hacen legible y atractivo a un escrito publicado.

A continuación se desglosan los usos genéricos de signos de puntuación que recomienda el Manual de estilo de APA.

Punto se emplea al final de un enunciado (frase u oración) completo, al final de un párrafo y al final del escrito.

La **coma** se emplea entre enunciados, para resaltar una cláusula explicativa, para separar dos enunciados independientes unidos por una conjunción y para resaltar el año en fechas exactas, aun dentro de paréntesis (sobre todo en inglés).

El **punto y coma** separa dos enunciados independientes no relacionados mediante conjunción; también separa enunciados en un párrafo que ya tiene más de tres comas.

Los **dos puntos** se colocan: antes de mencionar una serie de sustantivos, adjetivos u orden de ideas, entre una idea introductoria gramaticalmente completa y la frase final que ilustra, extiende o amplifica la idea precedente. También deben usarse los dos puntos en razones y proporciones (la proporción sodio:cloro fue 1:1), y en las referencias entre el lugar de publicación y la casa editorial. En castellano, la palabra que sigue a los dos puntos, es minúscula a menos que se trate de nombre propio.

Uso **de guiones** si bien existe la tendencia a colocar guiones entre adjetivos relacionados como socio-económico y físico-químico, esto no es correcto; debe escribirse socioeconómico y fisicoquímico. En general emplee los guiones para yuxtaponer palabras sólo cuando sea absolutamente necesario, como en la frase: *vuelo México-Madrid.*

Uso de abreviaturas. Hay un abuso generalizado, producto de malas traducciones del inglés en el uso de abreviaturas. El lenguaje se vuelve críptico si aparecen siglas que el lector no sabe qué significan y, por tanto, se trunca la comunicación. En general, utilice una abreviatura sólo si a) es ampliamente conocida y el lector está más familiarizado con la abreviatura que con el nombre completo, como DNA o ADN (ácido desoxirribonucleico) o en psicología MMPI (Inventario Multifásico de la Personalidad Minnesota); o b) si se ahorra un espacio considerable y se evita una repetición engorrosa. Use sólo abreviaturas que le ayuden a comunicarse con sus lectores. Si finalmente se ve obligado a utilizar alguna abreviatura no común, mencione el término y enseguida las siglas entre paréntesis y a continuación sólo escriba la forma abreviada.

Unidades de medida. Utilice la nomenclatura del Sistema Internacional de Medidas, cuyas unidades básicas pueden verse en el cuadro siguiente. Observe que el símbolo no requiere punto; así la forma correcta de poner 18 m es así, sin punto, a menos que esté al final del párrafo.

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Escriba los nombres completos de las abreviaturas para unidades métricas y no métricas que no estén acompañadas por valores numéricos, ejemplo: “Las unidades de longitud utilizadas fueron centímetros”.

Para el resto de signos de puntuación (raya, comillas, paréntesis, corchetes, diagonal) que puede resultar necesario emplear en un texto científico, se sugiere consultar un diccionario como el de la Real Academia de la Lengua Española o alguna de las publicaciones que la APA o el CIDRM tienen al respecto.

Lo mismo se propone para la **ortografía**, si bien la rápida proliferación del vocabulario con la Internet y la World Wide Web, hace que los diccionarios no resulten tan efectivos. De cualquier manera, resulta imprescindible disponer de diccionarios y acceso a libros que despejen dudas, en tanto se adquiere la suficiente experiencia para un uso fluido del idioma.

Jerarquización. Es la organización de un manuscrito con encabezados y tiene como fundamento orientar al lector respecto de la importancia de los temas y su relación entre sí. Ejemplo:

EL AMBIENTE SOCIAL
Espacio y territorio humanos
Dominio territorial

Organización de la vida cotidiana
Identidad personal y de grupo.
El espacio personal: dimensiones psicológica, social y cultural
    La dimensión psicológica
        Teorías prevalecientes.

La APA recomienda este estilo de encabezado que consiste hasta en cinco posibles arreglos de formato, que pueden ser:

Encabezado en mayúsculas centrado.	nivel 5
Encabezado en mayúsculas y minúsculas centrado.	nivel 1
Encabezado en mayúsculas y minúsculas centrado y en cursiva.	nivel 2
Encabezado secundario en mayúsculas y minúsculas, en cursiva y alineado a la izquierda.	nivel 3
Encabezado de párrafo con sangría, en minúsculas, en cursivas, alineado a la izquierda y que finaliza con punto.	nivel 4

Puede ser que su escrito no requiera los cinco niveles sino sólo dos o tres. Usted es la persona que más sabe acerca de lo que escribe y conoce las relaciones que deben guardar las distintas secciones. Procure consultar las normas editoriales de la revista donde desea publicar o comuníquese con el editor de la misma a fin de plantear sus dudas. La recomendación es: no ponga números ni letras a los encabezados.

Números. Utilice guarismos en el número 10 y mayores, así como palabras para los números del cero al nueve. De igual manera emplee palabras cuando un número inicie el enunciado. En caso de decimales, coloque un cero antes del punto cuando los números sean menores al uno. No requiere el cero cuando el número no pueda ser mayor que uno (como en las correlaciones, proporciones y niveles de significación estadística).

Cuadros denominados también y aceptados por la APA como *tablas,* si bien este término es poco afortunado porque deriva de una mala traducción del inglés *table,* es un excelente recurso para presentar gran cantidad de datos en un espacio reducido. Las tablas de datos cualitativos pueden ser de análisis de varianza, regresión, de relaciones estructurales lineales, entre otros. Las de enunciados son muy útiles para agrupar datos cualitativos.

Errores frecuentes: colocar exceso de tablas y repetir datos en el texto.

Sugerencias: numérelas todas en orden consecutivo, con números arábigos y ubíquelas en el texto, ponga a cada una la cabeza (título) breve, claro y explicativo y quizá una anotación (o varias) al pie, que puede ser: nota general (se refiere a toda la tabla y se inicia con la palabra Nota), nota específica (se refieren a una columna o fila en particular y se señalizan mediante índices exponenciales en letras minúsculas, como $^{a,\ b,\ c}$...) y notas de probabilidad (indican los resultados de pruebas de significación y se señalizan con asteriscos*). Cualquiera de ellas se incluirá sólo si es pertinente.

Figuras. Cualquier tipo de ilustración que no sea cuadro (tabla) se denomina figura, y puede ser diagrama, gráfica, fotografía, dibujo, esquemas, radiografía o mapa, entre otras. Este recurso visual es poderoso para comunicar de manera eficiente la información, sin embargo, pregúntese si realmente es necesaria una figura y qué tipo es mejor. Los estándares que prácticamente todas las revistas piden para considerar como buenas a las figuras, son sencillez, claridad y continuidad. Una buena figura enriquece al texto, no lo duplica; comunica sólo hechos esenciales; omite referencias entre el lugar de publicación y la casa editorial.

Problemas éticos de un reporte de investigación

Estos problemas pueden referirse a la información contenida en el artículo que se envía para edición o al derecho a la privacidad de los pacientes.

En el primer caso, la publicación redundante o duplicada consiste en la publicación de un artículo que coincide sustancialmente con otro ya publicado.

Los lectores de las revistas biomédicas deben tener la garantía de que aquello que están leyendo es original, a menos que se informe inequívocamente de que el artículo es reedición, decidida por el autor o director de la revista. Esta decisión debe hallarse en consonancia con las leyes internacionales sobre los derechos de autor, con la conducta ética y con el uso eficiente de los recursos.

Cuando se envíe un original, el autor deberá informar al director de la revista acerca de cualquier presentación del documento a otras revistas, o cualquier trabajo anterior que pudiera considerarse publicación previa o duplicada de un trabajo idéntico o muy similar. El autor, también, debe advertir al director de si el trabajo incluye cuestiones abordadas en trabajos ya publicados. Estos trabajos previos deben ser citados en el nuevo original y se incluirán copias, que junto con el manuscrito, se remitirán al director para ayudarle en la manera de abordar este asunto.

Protección del derecho a la intimidad de los pacientes

No debe infringirse el derecho a la intimidad de los pacientes sin su consentimiento informado. Por ello, no se publicará información que pueda identificar a alguna persona en textos, fotografías e historiales clínicos, a menos que dicha información sea esencial desde el punto de vista científico y el paciente (familiares o tutor) haya dado su consentimiento por escrito para su publicación. Dicho consentimiento se refiere a que el paciente tenga acceso al documento original que pretende publicarse.

Se omitirán los datos que permitan identificación alguna si no son esenciales, pero no deben alterarse o falsearse datos del paciente para lograr el anonimato. El total anonimato resulta difícil de lograr, y ante la duda se obtendrá el consentimiento informado. Por ejemplo, el hecho de ocultar los ojos en fotografías de pacientes no garantiza una adecuada protección del anonimato.

La obtención del consentimiento informado debe incluirse como requisito para la admisión de artículos y su obtención ha de mencionarse en el texto del artículo.

Organización de un manuscrito para su envío al editor

Algunas sugerencias generales que debe tener en mente antes incluso de escribir sus artículos, son: las características que sean, consúltelas en la revista que desea publicar desde antes de iniciar su trabajo de investigación, de manera que al recopilar la información y las referencias bibliohemerográficas, ya sepa los requerimientos que debe cubrir.

Algunas sugerencias como “receta” para organizar su manuscrito y enviarlo al editor de una revista:

1. De las consultas a las fuentes de información que realice, haga resúmenes y organícelos en orden lógico o cronológico según su investigación, anote en la misma tarjeta la referencia de la fuente consultada. Recuerde que las fuentes de información para investigación se clasifican en primarias cuando son revistas que publican artículos de investigación, sobre todo en revistas con arbitraje y secundarias cuando son de libros. Numere sus tarjetas y transcríbalas armonizando la redacción a fin de que haya secuencia y continuidad en sus párrafos como se señaló al principio.
2. Haga archivos electrónicos y tenga SIEMPRE más de una copia en diversos medios (CD, *memory stick*, otra computadora) porque los accidentes, sobre todo cuando se está bajo estrés, no son raros.
3. Siga los lineamientos de la revista en donde desea publicar y obtenga todos los consentimientos relativos al trabajo (por ejemplo si utilizó cuadros o figuras de otro autor, o si hay coautores). En general los editores le solicitarán el consentimiento informado mediante escrito y firma.

Una vez que tenga su artículo completo:

4. Imprima el texto, marcando los lugares donde es más adecuado que vayan los cuadros y figuras ya numeradas en orden consecutivo.
5. Haga una buena impresión de sus cuadros (tablas) o figuras, numerándolas en orden consecutivo (Tabla 1, 2, 3... y Fig. 1, 2, 3...) y acomódelas al final del manuscrito impreso. Si envía fotografías, que sean de buena calidad, y en el reverso, con lápiz suave, coloque una flecha cuya punta señale la parte superior de la fotografía y añada el número de figura que le corresponda.

   Las figuras se numerarán consecutivamente según su primera mención en el texto. Si la figura ya fue anteriormente publicada, cite la fuente original y presente el permiso escrito del titular de los derechos de autor para la reproducción del material. Dicha autorización es necesaria, independientemente de quién sea el autor o la editorial; la única excepción se da en los documentos de dominio público.
6. Añada una hoja con el encabezado "pies de figura" y póngalos todos con su número consecutivo correspondiente.
7. Añada otra hoja con el encabezado "Cabezas de cuadro o tabla" y póngalos todos con su número consecutivo correspondiente.
8. Si envía algún "anexo" (carta de consentimiento informado, formato de encuesta, tablas estadísticas) imprímalo y añádalo al final de todo lo anterior.
9. Adjunte la hoja frontal con el título del artículo, el nombre completo de los autores, sus instituciones de procedencia, instituciones financiadoras y datos donde el editor pueda ponerse en contacto con el o los autores.
10. Indique al editor de la revista a la cual envía su artículo, que el tratamiento a los participantes, sean humanos o animales, estuvo de acuerdo con las normas éticas de la APA ("Ethical Principles of Psychologists and Code of Conduct", APA, 1992a); o en su caso, las que recomienda el Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas (CIDRM), que son las normas éticas del comité (institucional o regional) encargado de supervisar los ensayos en seres humanos y la declaración de Helsinki de 1975 modificada en 1983.
11. Coloque todo en un sobre de papel Manila al cual previamente se le escribió la editorial (si le es posible, el nombre del editor, que puede averiguar por teléfono o correo electrónico) y la dirección de la editorial, así como la dirección y nombre del remitente.
12. Envíelo por correo certificado o entréguelo en mano. Comuníquese lo antes posible con el editor para saber en qué tiempo puede tener una respuesta. Las posibles respuestas pueden ser: a) aceptado tal como está (ideal y prácticamente imposible); b) aceptado con la reserva de realizar los cambios sugeridos por los revisores y el editor (si sigue las sugerencias proporcionadas en este capítulo, será lo más frecuente), y c) rechazado.

Referencias. Son importantes para sustentar las afirmaciones realizadas respecto de lo que dijeron otros autores. Todas las citas del manuscrito deben aparecer en la lista de referencias, y todas las referencias deben ir citadas en el texto. La lista de referencias al final de un artículo en una revista científica proporciona a los lectores la información necesaria para identificar y localizar cada fuente. Es asunto ético incluir sólo aquellas fuentes que en realidad se utilizaron en la investigación y en la preparación del manuscrito. Cabe señalar la diferencia entre lista de referencias y bibliografía.

Lista de referencias. Cita trabajos que apoyan específicamente a un artículo en particular y a veces las revistas mencionan un número mínimo de referencias para apoyar un artículo. Los artículos de que trata este texto, requieren lista de referencias.

Bibliografía. Es más exhaustiva, cita trabajos que sirvieron de fundamento o son útiles para una lectura posterior. Puede incluir notas descriptivas y lecturas recomendadas.

Recuerde que los autores son responsables de su lista de referencias e incluya datos correctos y completos en cada entrada que sirvan para la busca de información en bibliotecas. En general, cada referencia debe contener los siguientes elementos: autor(es), año de publicación, título y datos de publicación. A continuación ejemplos de referencias con más detalle.

Artículo de revista:

King, J., Beals, J., Manson, S. M., & Trimble, J. E. (1992). A structural equation model of factors related to substance abuse among. American Indian adolescents. *Drugs and Society, 6(3-4),* 253-268.

Libro completo:

Griffen, C. W., M. J., & Wirth, A. G. (1986). Beyond acceptance: Parents of lesbians and gays talk about their experiences. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Recuerde, no ponga referencias incompletas ni mal redactadas, sea cuidadoso al escribir los nombres de los autores, vale la pena tomarse el tiempo de redactar correctamente las referencias y seguir al pie de la letra las sugerencias de la revista donde desea publicar. De uno a seis autores menciónelos todos, de siete en adelante escriba: et al., (sin cursivas y con punto después de “al”).

Cualquier duda, se sugiere consultar: American Psychological Association (2002). Manual de estilo de publicaciones (adaptado para el español por Editorial El Manual Moderno), 2a. ed., México.

Requisitos para publicaciones del área de ciencias biomédicas

A continuación se expone lo que el Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas expone como requisitos para publicar en este tipo de revistas. Se expresa sólo lo más frecuente y lo que difiere en cuanto a lo normado por la APA, a fin de que el texto sea realmente útil a nuestros lectores. Para información más detallada, se sugiere visitar la página: *http://www.icmje.org*.

Antecedentes. En 1978 el Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas se reunió informalmente en Vancouver, Columbia Británica, para establecer las directrices que en cuanto a formato debían incluir los manuscritos enviados a sus revistas. El grupo se conoce como Grupo Vancouver. Sus requisitos para manuscritos, que incluían formatos para las referencias bibliográficas desarrollados por la National Library of Medicine (NLM) de Estados Unidos, se publicaron por primera vez en 1979. El Grupo Vancouver creció y se convirtió en el Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas (CIDRM).

Los requisitos uniformes son instrucciones para los autores sobre cómo preparar sus manuscritos y los directores de las revistas que aceptan dichos requisitos, se comprometen a no devolver los manuscritos para que se realicen cambios de estilo. Sin embargo, en el proceso editorial las revistas pueden modificar los manuscritos aceptados para adecuarlos a su estilo de publicación.

De igual manera, los autores que remitan sus manuscritos a una revista que participe de esta normativa, no deben preparar los mismos según el estilo de la revista en concreto sino que debe seguir los requisitos uniformes.

Los autores seguirán también las instrucciones de cada revista respecto de qué temas son pertinentes y el tipo de artículos que admite: por ejemplo, originales, revisiones o notas clínicas. Además, es probable, que en dichas instrucciones figuren otros requisitos específicos de la publicación que deban seguirse, como el número de copias del manuscrito, idiomas aceptados, extensión del artículo y abreviaturas admitidas.

Requisitos para el envío de manuscritos

Resumen de los requisitos técnicos.

Doble espacio en todo el artículo.

Inicie cada sección o componente del artículo en una página.

Revise la ordenación: página del título, resumen y palabras clave, texto, agradecimientos, referencias bibliográficas, cuadros o tablas (en páginas por separado) y leyendas.

El tamaño de las ilustraciones, positivo sin montar, no debe superar los 203 × 254 mm (8 × 10 pulgadas).

Incluya las autorizaciones para la reproducción de material anteriormente publicado o para la utilización de ilustraciones que puedan identificar a personas.

Adjunte la cesión de los derechos de autor y formularios pertinentes.

Anexe el número de copias en papel que pida la revista en particular a la cual envía su trabajo.

Conserve una copia de todo el material enviado.

Preparación del original

Artículos en soporte electrónico.

Algunas revistas solicitan de los autores una copia en soporte electrónico (en disquete memoria); pudiendo aceptar diversos formatos de procesadores o ficheros de textos (ASCII).

Al presentar los disquetes, los autores deben cerciorarse de que se ha incluido una versión del manuscrito en el disquete.

Incluir en el disquete solamente la versión última del manuscrito.

Especificar claramente el nombre del archivo.

Etiquetar el disquete con el formato y nombre del fichero.

Facilitar la información sobre el software y hardware utilizado.

Los autores deberán consultar en la sección de normas para los autores de la revista, las instrucciones en lo que se refiere a qué formatos se aceptan, las convenciones para denominar los archivos y disquetes, el número de copias que ha de enviarse y otros detalles.

Autoría

Todas las personas que figuren como autores habrán de cumplir con ciertos requisitos para recibir tal denominación. Cada autor deberá haber participado en grado suficiente para asumir la responsabilidad pública del contenido del trabajo. Uno o varios autores deberán responsabilizarse o encargarse de la totalidad del trabajo, desde el inicio hasta que el artículo haya sido publicado.

Para concederle a alguien el crédito de autor, hay que basarse únicamente en su contribución esencial en lo que se refiere a: a) la concepción y el diseño del estudio, acopio de los datos o el análisis y la interpretación de los mismos; b) la redacción del artículo o la revisión crítica de una parte sustancial de su contenido intelectual, y c) la aprobación final de la versión que será publicada. Los requisitos a), b) y c) tendrán que cumplirse simultáneamente. La participación exclusivamente en la obtención de fondos o en la recopilación de datos o la supervisión general del grupo de investigación no justifica la autoría.

Los directores de las revistas podrán solicitar a los autores que describan la participación de cada uno de ellos y esta información puede ser publicada. El resto de personas que contribuyan al trabajo y que no sean los autores deben citarse en la sección de agradecimientos.

Cada vez con mayor frecuencia, se realizan ensayos multicéntricos que se atribuyen a un autor corporativo. En estos casos, todos los miembros del grupo que figuren como autores deben satisfacer totalmente los criterios de autoría anteriormente citados. Los miembros del grupo que no satisfagan estos criterios deben ser mencionados, con su autorización, en la sección de agradecimientos o en apéndice (véase Agradecimientos). El orden de los autores dependerá de la decisión que de forma conjunta adopten los coautores. En todo caso, los autores deben ser capaces de explicar el mismo.

Palabras clave

Tras el resumen los autores deberán presentar e identificar como tales, de tres a 10 palabras clave que faciliten a los documentalistas el análisis del artículo y que se publicarán junto con el resumen. Utilice para este fin los términos del tesauro Medical Subject Headings (MeSH) del Index Medicus; en el caso de que se trate de términos de reciente aparición que aún no figuren en el MeSH pueden usarse los nuevos términos.

Nota: puede consultar una edición en español del MeSH elaborado por BIREME: “Descriptores de Ciencias de la Salud” [DeSC].

Estadística

Describa los métodos estadísticos con el suficiente detalle para permitir, que un lector versado en el tema con acceso a los datos originales, pueda verificar los resultados publicados. En la medida de lo posible, cuantifique los hallazgos y presente los mismos con los indicadores apropiados de error o de incertidumbre de la medición (como los intervalos de confianza). Se evitará la dependencia exclusiva de las pruebas estadísticas de verificación de hipótesis, tal como el uso de los valores *P*, que no aportan ninguna información cuantitativa importante. Analice los criterios de inclusión de los sujetos experimentales. Proporcione detalles sobre el proceso que se ha seguido en la distribución aleatoria. Describa los métodos de enmascaramiento utilizados. Haga constar las complicaciones del tratamiento. Especifique el número de observaciones realizadas. Indique las pérdidas de sujetos de observación (como los abandonos en un ensayo clínico). Siempre que sea posible, las referencias sobre el diseño del estudio y métodos estadísticos serán de trabajos vigentes (indicando el número de las páginas) en lugar de los artículos originales donde se describieron por vez primera.

Especifique cualquier programa de computadora, de uso común, que se haya empleado.

Agradecimientos

Incluya la relación de todas aquellas personas que han colaborado pero que no cumplan los criterios de autoría, tales como, ayuda técnica recibida, ayuda en la escritura del manuscrito o apoyo general prestado por el jefe del departamento. También se incluirá en los agradecimientos el apoyo financiero y los medios materiales recibidos.

Las personas que hayan colaborado en la preparación del original, pero cuyas contribuciones no justifiquen su acreditación como autores podrán ser citadas bajo la denominación de “investigadores clínicos” o “investigadores participantes” y su función o tipo de contribución debería especificarse, por ejemplo, “asesor científico”, “revisión crítica de la propuesta de estudio”, “recogida de datos” o “participación en el ensayo clínico”.

Dado que los lectores pueden deducir que las personas citadas en los agradecimientos de alguna manera avalan los datos y las conclusiones del estudio, se obtendrá la autorización por escrito de las personas citadas en dicha sección.

Referencias bibliográficas

Numere las referencias consecutivamente, según el orden en que se mencionen por primera vez en el texto. En éste, en las tablas y leyendas, las referencias se identificarán mediante números arábigos entre paréntesis. Las referencias citadas únicamente en las tablas o ilustraciones se numerarán siguiendo la secuencia establecida por la primera mención que se haga en el texto de la tabla o figura en concreto.

Se utilizará el estilo de los ejemplos que a continuación se ofrecen, que se basan en el estilo que utiliza la NLM en el Index Medicus. Abrevie los títulos de las revistas según el estilo que utiliza el Index Medicus. Consulte la List of Journals Indexed in Index Medicus (relación de revistas indizadas en el Index Medicus), que la NLM publica anualmente como parte del número de enero del Index Medicus, y como separata. Esta relación también puede obtenerse en la dirección Web de la NLM.

Evite citar resúmenes. Las referencias que se realicen de originales aceptados pero aún no publicados se indicará con expresiones del tipo “en prensa” o “próxima publicación”; los autores deberán obtener autorización escrita y tener constancia que su publicación está aceptada. La información sobre manuscritos presentados a una revista pero no aceptados cítela en el texto como “observaciones no publicadas”, previa autorización por escrito de la fuente.

Tampoco cite una “comunicación personal”, salvo cuando en la misma se facilite información esencial que no se halla disponible en fuentes públicamente accesibles, en estos casos se incluirán, entre paréntesis en el texto, el nombre de la persona y la fecha de la comunicación. En los artículos científicos, los autores que citen una comunicación personal deberán obtener la autorización por escrito.

Envío del manuscrito a la revista

Los manuscritos se acompañarán de una carta de presentación firmada por todos los autores. Esta carta debe incluir:

1. Información acerca de la publicación previa o duplicada o el envío de cualquier parte del trabajo a otras revistas, como se ha indicado anteriormente.
2. Una declaración de que el manuscrito ha sido leído y aprobado por todos los autores, que se ha cumplido con los requisitos de autoría expuestos y que cada autor cree que el artículo constituye un trabajo honesto.
3. Nombre, dirección y número de teléfono del autor encargado de la coordinación con los coautores en lo concerniente a las revisiones y aprobación final de las pruebas de imprenta del artículo en cuestión.

Ejemplos de las referencias bibliográficas

Nota: Los Requisitos de Uniformidad (actualización octubre 2005) contienen 41 ejemplos de diferentes documentos que pueden utilizarse como referencias bibliográficas (ejemplos disponibles en la National Library of Medicine NLM). En el caso del "Material electrónico" (ej. ref. 35-41), los ejemplos no abarcan la enorme variedad de documentos disponibles en la Red. En el supuesto de que en los ejemplos disponibles no se incluya el tipo de documento que usted requiere citar o surja una duda, se recomienda consultar el documento publicado por NLM en el 2001 sobre las citas bibliográficas en Internet.

Artículos de revistas

(1) Artículo estándar

Autor(es). Título del artículo. Abreviatura internacional de la revista. Año; volumen (número): página inicial-final del artículo.

Medrano M J, Cerrato E, Boix R, Delgado-Rodríguez M. Factores de riesgo cardiovascular en la población española: metaanálisis de estudios transversales. Med Clin (Barc). 2005; 124(16): 606-12.

(2) Organización o equipo como autor

Grupo de Trabajo de la SEPAR. Normativa sobre el manejo de la hemoptisis amenazante. Arch Bronconeumol 1997; 33: 31-40.

(3) Autoría compartida entre autores y un equipo

Jiménez Hernández MD, Torrecillas Narváez MD, Friera Acebal G. Grupo Andaluz para el Estudio de Gabapentina y Profilaxis Migrañosa. Eficacia y seguridad de la gabapentina en el tratamiento preventivo de la migraña. Rev Neurol. 2002; 35: 603-6.

(4) No se indica autor

21st century heart solution may have a sting in the tail. BMJ. 2002; 325(7357): 184.

(5) Artículo en otro idioma distinto del inglés

Sartori CA, Dal Pozzo A, Balduino M, Franzato B. Exérèse laparoscopique de l´angle colique gauche. J Chir (Paris). 2004; 141: 94-105.

(6) Suplemento de un volumen

Plaza Moral V, Álvarez Gutiérrez FJ, Casan Clará P, Cobos Barroso N, López Viña A, Llauger Rosselló MA et al. Comité Ejecutivo de la GEMA. Guía Española para el Manejo del Asma (GEMA). Arch Bronconeumol. 2003; 39 Supl 5: 1-42.

(7) Suplemento de un número

Glauser TA. Integrating clinical trial data into clinical practice. Neurology. 2002; 58 (12 Suppl 7): S6-12.

(8) Parte de un volumen

Abend SM, Kulish N. The psychoanalytic method from an epistemological viewpoint. Int J Psychoanal. 2002; 83(Pt 2): 491-5.

(9) Parte de un número

Ahrar K, Madoff DC, Gupta S, Wallace MJ, Price RE, Wright KC. Development of a large animal model for lung tumors. J Vasc Interv Radiol. 2002; 13(9 Pt 1): 923-8.

(10) Número sin volumen

Fleta Zaragozano J, Lario Elboj A, García Soler S, Fleta Asín B, Bueno Lozano M, Ventura Faci P et al. Estreñimiento en la infancia: pauta de actuación. Enferm Cient. 2004; (262-263): 28-33.

(11) Sin número ni volumen
Outreach: bringing HIV-positive individuals into care. HRSA Careaction. 2002 Jun:1-6.

(12) Paginación en número romanos
Chadwick R, Schuklenk U. The politics of ethical consensus finding. Bioethics. 2002; 16(2): III-V.

(13) Artículo publicado electrónicamente antes que en versión impresa

Nota: Las citas Epub ahead of print, son referencias enviadas a PubMed por los editores de revistas que se publican en primera instancia on-line, adelantándose a la edición en papel. Posteriormente, cuando se publica en formato impreso, la referencia se modifica apareciendo los datos de la edición impresa, seguida de la electrónica Epub. Ejemplo de una referencia en PubMed publicada en edición electrónica y posteriormente cuando se publica impresa.

Sait KH, Ashour A, Rajabi M. Pregnancy outcome in non-gynecologic cancer. Arch Gynecol Obstet. 2004 Jun 2 [Epub ahead of print].

Sait KH, Ashour A, Rajabi M. Pregnancy outcome in non-gynecologic cancer. Arch Gynecol Obstet. 2005 Apr; 271(4): 346-9. Epub 2004 Jun 2.

Libros y otras monografías

(14) Autores individuales
Autor(es). Título del libro. Edición. Lugar de publicación: Editorial; año.
Jiménez Murillo L, Montero Pérez FJ. Compendio de Medicina de Urgencias: guía terapéutica. 2ª ed. Madrid: Elsevier; 2005.

Nota: La primera edición no es necesario consignarla. La edición siempre se pone en números arábigos y abreviatura: 2ª ed. Si la obra estuviera compuesta por más de un volumen, debe citarlo a continuación del título del libro Vol. 3.

(15) Director(es), compilador(es) como autor
Espinás Boquet J. coordinador. Guía de actuación en Atención Primaria. 2ª ed. Barcelona: Sociedad Española de Medicina; 2002.
Teresa E de, editor. Cardiología en Atención Primaria. Madrid: Biblioteca Aula Médica; 2003.

Nota: En la edición original figura "Editor" término inglés que se refiere al Editor Literario. En español este término debe traducirse como director (de una revista) o director, compilador o coordinador (de un libro). En español es frecuente que se utilice de manera incorrecta (anglicismo) el término inglés "Editor" como sinónimo de director o coordinador. Si figura ese término, debe conservarlo.

(16) Autor(es) y editor(es)
Breedlove GK. Schorfheide AM. Adolescent pregnancy. 2ª ed. Wieczorek RR, editor. White Plains (NY): March of Dimes Education Services; 2001.

(17) Organización como autor
Comunidad de Madrid. Plan de Salud Mental de la Comunidad de Madrid 2003-2008. Madrid: Comunidad de Madrid, Consejería de Sanidad; 2002.
American Psychiatric Association. Guías clínicas para el tratamiento de los trastornos psiquiátricos. Barcelona: Ars MEDICA; 2004.

(18) Capítulo de libro
Autor(es) del capítulo. Título del capítulo. En*: Director/Coordinador/Editor del libro. Título del libro. Edición. Lugar de publicación: Editorial; año. Página inicial-final del capítulo.

Mehta SJ. Dolor abdominal. En: Friedman HH, coordinador. Manual de Diagnóstico Médico. 5ª ed. Barcelona: Masson; 2004. p. 183-90.

(19) Actas de congresos

Segundo Encuentro Latinoamericano de Psicología Ambiental; Grupo Entorno Comportamiento. 11-15 de Septiembre 2002. Los Reyes Iztacala, Tlalnepantla, Estado de México: Facultad de Estudios Superiores Iztacala, UNAM; 2002.

(20) Comunicación presentada a un congreso

Autor(es) de la Comunicación/Ponencia. Título de la Comunicación/Ponencia. En: Título oficial del Congreso. Lugar de Publicación: Editorial; año. página inicial-final de la comunicación/ponencia.

Castro Beiras A, Escudero Pereira J. El Área del Corazón del Complejo Hospitalario “Juan Canalejo”. En: Libro de Ponencias: V Jornadas de Gestión y Evaluación de Costes Sanitarios. Bilbao; Ministerio de Sanidad y Consumo, Gobierno Vasco; 2000. p. 12-22.

Nota: Esta misma estructura se aplica a jornadas, simposios, reuniones científicas, etcétera.

(21) Informe científico o técnico

Autor(es). Título del informe. Lugar de publicación: Organismos/Agencia editora; año. Número o serie identificativa del informe.

Organización Mundial de la Salud. Factores de riesgo de enfermedades cardiovasculares: nuevas esferas de investigación. Informe de un Grupo Científico de la OMS. Ginebra: OMS; 1994. Serie de Informes Técnicos: 841.

Patrocinado por un organismo o institución:

Ahn N, Alonso Meseguer J, Herce San Miguel JA. Gasto sanitario y envejecimiento. Madrid: Fundación BBVA; 2003. Documentos de trabajo: 7.

(22) Tesis doctoral

Autor. Título de la tesis [tesis doctoral].† Lugar de publicación: Editorial; año.

Muñiz García J. Estudio transversal de los factores de riesgo cardiovascular en población infantil del medio rural gallego [tesis doctoral]. Santiago: Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, Universidad de Santiago; 1996.

Otros trabajos publicados

(23) Artículo de periódico

Autor del artículo†. Título del artículo. Nombre del periódico†† . Día mes año; Sección†††: página (columna)††††.

† Autor del artículo (si figurase).

†† Los nombres de periódicos no se facilitan abreviados.

††† Si existiera identificada como tal.

†††† Si aparece identificada.

Carrasco D. Avalado el plazo de cinco años para destruir parte de la HC. Diario Médico. Viernes 23 de julio de 2004; Normativa: 8.

Espiño I. ¿Le va mejor al paciente que participa en un ensayo clínico? El Mundo sábado 31 de enero de 2004. Salud: S6 (Oncología).

(24) Material audiovisual

Autor(es). Título de la videocinta [videocinta]. Lugar de edición: Editorial; año. Aplicable a todos los soportes audiovisuales.

Borrel F. La entrevista clínica. Escuchar y preguntar. [video] Barcelona: Doyma; 1997.

(25) Documentos legales: Leyes/Decretos/Órdenes.

Título de la ley/decreto/orden. (Nombre del Boletín Oficial, número, fecha de publicación)

Estatuto Marco del personal estatutario de los servicios de salud. Ley 55/2003 de 16 de diciembre. Boletín Oficial del Estado, nº 301 (17-12-2003).

(26) Diccionarios y obras de consulta

Dorland Diccionario Enciclopédico Ilustrado de Medicina. 28ª ed. Madrid: McGraw-Hill, Interamericana; 1999. Afasia; p. 51.

Material no publicado

(27) En prensa

Nota: NLM prefiere "de próxima aparición" (en inglés: forthcoming) debido a que no todos los temas serán publicados.

Leshner AI. Molecular mechanisms of cocaine addiction. N Engl J Med. En prensa 1997.

Material electrónico

Autor(es). Título [CD-ROM, DVD, Disquete]. Edición. Lugar: Editorial; año.

Best CH. Bases fisiológicas de la práctica médica [CD-ROM]. 13ª ed. Madrid: Editorial Médica Panamericana; 2003.

(28) Artículo de revista en Internet

Autor(es) del artículo. Título del artículo. Nombre de la revista [revista en Internet, revista en línea o revista on-line] año [fecha de consulta]; volumen (número): [Extensión/páginas*]. Dirección electrónica.

Francés I, Barandiarán M, Marcellán T, Moreno L. Estimulación psicocognoscitiva en las demencias. An Sist Sanit Navar [revista en Internet]* 2003 septiembre-diciembre. [Acceso 19 de octubre de 2005]; 26(3). Disponible en: http://www.cfnavarra.es/salud/anales/textos/vol26/n3/revis2a.html

* Si constasen.

Recomendaciones para escribir referencias bibliográficas

Las referencias o citas bibliográficas constituyen una sección destacada en un trabajo científico. La selección cuidadosa de documentos relevantes, es un elemento que da solidez a la exposición teórica del texto, a la vez que constituye una importante fuente de información para el lector. Se facilita una serie de indicaciones para elaborar las referencias bibliográficas basadas en los requisitos de uniformidad (estilo Vancouver).

Deben numerarse consecutivamente según el orden en que se mencionen por primera vez en el texto. Algunas revistas en sus instrucciones para autores recomiendan que se utilicen números arábigos en superíndice y sin paréntesis.

Cuando hay más de una cita, éstas deben separarse mediante comas, pero si fueran correlativas, se menciona la primera y la última separadas por un guión.

Cuando en el texto se menciona un autor, el número de la referencia se pone tras el nombre del autor. Si se tratase de un trabajo realizado por más de dos autores, se cita el primero de ellos seguido de la abreviatura "et al." y su número de referencia.

Los documentos que se citen deben ser actuales. Algunas revistas señalan que no deben tener más de cinco años y preferiblemente que sean de los dos últimos.

Se recurre a citar documentos que tengan más años, por motivos históricos o si no se encuentran referencias actualizadas como alternativa.

Para citar adecuadamente los documentos electrónicos, es recomendable consultar el documento sobre las citas bibliográficas en Internet publicado por la National Library of Medicine de Estados Unidos, o la norma de la International Standards Organization (ISO 690-2) para documentos electrónicos.

Respecto del número de citas a incluir en cada trabajo, las revistas suelen recomendar que los trabajos originales incluyan entre 20-30 referencias; los originales breves y notas clínicas, entre 10 y 20 referencias; las cartas al director un máximo de 10. Para otras secciones: revisiones, editoriales, se recomienda consultarlo en las instrucciones para autores o al comité de redacción.

Los títulos de las revistas deben abreviarse según el estilo que utiliza la National Library of Medicine (NLM). Puede consultarse el Journals Database de PubMed. Para comprobar las abreviatura de revistas españolas, puede consultarse el catálogo C17 (Catálogo colectivo de publicaciones periódicas de las Bibliotecas de Ciencias de la Salud Españolas). En el supuesto de no localizar una abreviatura, puede consultarse la "List of Serial Title Word Abbreviations Internacional" conforme a la norma ISO 4, o bien el "The List of Title Word Abbreviations" de la agencia ISSN.

Una vez finalizada la lista de fuentes consultadas, tiene que asegurarse de la correspondencia de las citas en el texto y el número asignado en la referencia.

Nuestra sugerencia final es no darse por vencido, practicar, preparar los manuscritos, consultar en libros o a los editores cuando haya dudas y... publicar. Suerte.

Referencias

Popper K.R. (1974). Conocimiento objetivo. Madrid: Tecnos.

American Psychological Association (APA). (2002). *Manual de estilo de publicaciones* (adaptado para el español) 2a. edición. México: Editorial El Manual Moderno.

American Psychological Association (APA). (1994). *Publication Manual of the American Psychological Association* (4a. ed.), Washington, D.C., Author.

Bobenrieth Astete MA. *El artículo científico original. Estructura, estilo y lectura crítica*. Granada: Juan de Andalucía, Escuela Andaluza de Salud Pública, 1994.

International Committee of Medical Journal Editors. Uniform Requirements for Manuscripts Submitted to Biomedical Journals: Writing and Editing for Biomedical Publication. Updated October 2005 [Internet]. CMJE; 2005 [acceso 15 de julio de 2006]. Disponible en: http://www.icmje.org/

Luna Castillo, Antonio (2002). *Metodología de la tesis*. México: Trillas.

National Library of Medicine Recommended Formats for Bibliographic Citation [Internet]. Bethesda: National Library of Medicine, diciembre 2003 [acceso 17 de diciembre de 2005]. Disponible en: http://www.nlm.nih.gov/pubs/formats/recommendedformats.html

Ramos, M.M., Catena, A. y Trujillo, H. M. (2004). *Manual de métodos y técnicas de investigación en ciencias del comportamiento*. Madrid, Biblioteca Nueva.

Real Academia Española (1992). *Diccionario de la Lengua Española* (vigésima primera edición, vol. 2). Madrid: Espasa.

Rodríguez Bonache MJ. Cómo se debe citar un artículo científico? Rehabilitación (Madrid). 2002; 36:67-69.

Tamayo y Tamayo Mario (2004). *El proceso de la investigación científica*. México: Limusa, Noriega Editores.

Glosario

Alfa (α). 1. En las pruebas de significancia estadística, el nivel que designa la probabilidad de cometer el error tipo I; es también conocido como valor *p*. 2. En las estimaciones de uniformidad u homogeneidad interna, un coeficiente de confiabilidad, como en el alfa de Cronbach.

Alfa de Cronbach. Media de fiabilidad o índice de confiabilidad, utilizada respecto de un conjunto de dos o más indicadores de un constructo. Los valores van de 0 a 1. Los valores de 0.60 a 0.70 se consideran el límite inferior de aceptabilidad.

Algoritmo. Conjunto de reglas o procedimientos; parecido a una ecuación.

Análisis cluster. Técnica multivariante cuyo objetivo es agrupar a los encuestados o los casos con perfiles similares sobre una serie de características definidas. Similar al del análisis factorial *Q*.

Análisis confirmatorio. Uso de una técnica multivariable para contrastar (confirmar) una relación preestablecida. Por ejemplo, suponga la hipótesis de que sólo dos variables deberían ser las predictoras de una variable dependiente. Si contrasta empíricamente la significancia de esos dos predictores y la no significancia del resto, este contraste es un análisis confirmatorio. Es el opuesto a un análisis exploratorio.

Análisis cualitativo. Organización e interpretación de información no numérica con el propósito de descubrir dimensiones subyacentes y esquemas de relación importantes.

Análisis cuantitativo. La manipulación de datos numéricos por medio de procedimientos estadísticos con el fin de describir fenómenos o estimar la magnitud y confiabilidad de las relaciones entre ellos.

Análisis de contenido. Técnica para describir en forma sistemática y objetiva la forma y el contenido de materiales escritos, verbales o visuales; se usa con frecuencia en estudios cuantitativos de medios masivos de comunicación.

Análisis de correspondencias. Aproximación de composición a la elaboración de mapas conceptuales que relacionan categorías de una tabla de contingencia. La mayoría de las aplicaciones contienen un conjunto de objetos y atributos.

Análisis de costo/beneficio. 1. En la investigación evaluadora, comparación de los costos financieros de un programa o intervención, con los retornos financieros atribuibles a éste. 2. En un proyecto de uso o aplicación, estimación de los costos o riesgos de una nueva práctica o procedimiento en comparación con sus beneficios.

Análisis de covarianza (ANCOVA). Procedimiento estadístico utilizado para evaluar las diferencias medias entre grupos, que se cree que pueden afectar la acción de la(s) variable(s) independiente(s) en lo referente a una variable dependiente, al mismo tiempo que se controlan una o más variables ajenas (covariantes o covariables).

Análisis de función discriminatorio. Procedimiento estadístico usado para predecir la pertenencia a un grupo o el estado de una variable categórica (nivel nominal) con base en dos o más variables independientes.

Análisis de potencia. Procedimiento para estimar la probabilidad de cometer un error tipo II o los requisitos de tamaño de la muestra.

Análisis de reactivos. Muestra el grado de consistencia de varios reactivos.

Análisis de varianza (ANOVA). Técnica estadística empleada para determinar si las muestras provienen de poblaciones con medias iguales o corroborar el efecto de uno o más tratamientos, comparando la variabilidad entre grupos con la variabilidad dentro de los mismos. El análisis univariante de la varianza utiliza una variable dependiente, mientras que el análisis multivariante de la varianza compara muestras basadas en dos o más variables dependientes.

Análisis de varianza multivariada (MANOVA). Procedimiento estadístico usado para evaluar la significancia de las diferencias entre las medias de dos o más grupos en dos o más variables dependientes consideradas en forma simultánea.

Análisis del contenido. Procedimiento para analizar comunicaciones verbales o escritas en forma sistemática y objetiva, generalmente con el fin de estimar cuantitativamente las variables.

Análisis en función discriminativa. Técnica estadística utilizada para predecir la pertenencia a un grupo o el nivel dentro de una variable categórica (nominal), con base en dos o más variables independientes.

Análisis estadístico. 1. Organización y análisis de datos cuantitativos mediante procedimientos estadísticos, incluyendo estadísticas descriptivas e inferenciales. 2. Método para recopilar, organizar, concentrar, reducir, presentar, analizar, generalizar y contrastar los resultados (datos) de las observaciones directas o indirectas de un estudio, investigación o experimento; de tal manera que puedan responderse las interrogantes planteadas de antemano.

Análisis exploratorio. Análisis que establece posibles relaciones sólo de la forma más general y a continuación deja a las técnicas multivariantes la estimación de la(s) relación(es). Opuesto al análisis confirmatorio, el investigador no busca “confirmar” cualquier estimación especificada antes del análisis, sino que deja al método y a los datos definir la naturaleza de las relaciones. Un ejemplo de este tipo de análisis es la regresión múltiple por etapas, en la que el método consiste en añadir variables pronosticadoras hasta que se cumpla algún criterio.

Análisis factorial. Analiza relaciones entre las variables para identificar grupos de variables que forman dimensiones latentes (factores). Procedimiento estadístico que permite reducir un gran número de variables a un conjunto más pequeño de variables con características o dimensiones subyacentes en común.

Análisis factorial común. Modelo factorial en el que los factores se basan en una matriz de correlación reducida.

Análisis multivariante. Análisis de varias variables en una única relación o un conjunto de relaciones.

Análisis por clasificación múltiple. Variante de la regresión múltiple y del análisis de varianza (ANCOVA) que produce medias sobre la variable dependiente, ajustadas según los efectos de las covariantes.

Análisis secundario. Formas de investigación de los datos reunidos por un investigador, que son analizados de nuevo por otro, regularmente para corroborar nuevas hipótesis.

Anonimato. Protección del participante en un estudio, al grado que el mismo investigador no puede vincularlo con la información generada.

Asignación aleatoria. Asignación de sujetos a condiciones de estudio o control, por azar, es decir en un procedimiento regido únicamente por el azar o la casualidad.

Autocomunicado. Todo método para reunir datos que entraña el comunicado directo de información por la persona que es estudiada (como sería en una entrevista o cuestionario).

Autorización con conocimiento informado. Principio ético que obliga a los investigadores a solicitar la participación voluntaria de los sujetos, después de informarles de los posibles riesgos y beneficios.

Bimodal. Distribución de frecuencias que tiene dos modas.

Cálculo de la probabilidad máxima. Método de cálculo (usado a veces en lugar del método de los mínimos cuadrados) en el que los factores de evaluación son aquellos que estiman los parámetros que tienen las mayores probabilidades de haber generado los resultados observados.

Cálculo de los mínimos cuadrados. Método de estimación estadística de uso común en que la solución minimiza las sumas de los cuadrados del valor de los errores; también se le llama prueba de los mínimos cuadrados ordinarios.

Calificación estándar o *Z*. Modalidad de calificación expresada en unidades de desviación estándar.

Capacidad de generalizar. Grado en el cual las técnicas de investigación justifican la inferencia de que los hallazgos representan algo que va más allá de las observaciones específicas en que se basaron; en particular, la inferencia o deducción de que es posible generalizar los hallazgos a toda la población partiendo de la muestra.

Catálogo de códigos. Documentación utilizada en el procesamiento de datos que indica el sitio y valores de todas las variables archivadas.

Celda. 1. La intersección de una hilera y una columna en una tabla con dos o mas dimensiones. 2. En un diseño experimental, la representación de una condición experimental dentro de un diagrama.

Censo. Estudio que abarca a una población completa.

Codificación. El proceso de transformar datos en bruto en otros estandarizados (por lo regular, numéricos) para el procesamiento y análisis estadístico.

Coeficiente beta (β_n). Coeficiente de regresión tipificado (estandarizado) que permite una comparación directa entre coeficientes de correlación con su capacidad explicativa relativa de la variable de criterio. Mientras los coeficientes de regresión se expresan en términos de unidades de la variable asociada, realizando por tanto comparaciones inapropiadas, los coeficientes beta utilizan datos tipificados y pueden ser comparados directamente.

Coeficiente de confiabilidad. Índice cuantitativo cuyo valor varía generalmente de 0.0 a 1.00 y que proporciona una idea de confiabilidad de un instrumento; se calcula mediante procedimientos como la técnica del Alfa de Cronbach, la técnica de dos mitades, el método de test-retest, etcétera.

Coeficiente de correlación (*Rxy*). Indica la magnitud de la asociación entre la variable independiente y la variable criterio o dependiente. El signo (+/–) indica la dirección de la relación. El coeficiente de correlación va desde +1.00 (para una relación directamente proporcional perfecta, a través de 0.00, es decir ausencia de relación hasta –1.00, para una relación inversamente proporcional perfecta.

Coeficiente de correlación múltiple. Índice que resume el grado de relación entre dos o más variables independientes y una dependiente; se representa con el símbolo ***R***.

Coeficiente de correlación parcial. Medidas de la fuerza de la relación entre la variable criterio y una variable predictora simple, donde los efectos de las otras variables que intervienen en el modelo se mantienen constantes. Por ejemplo, r_{xy}, x_2, x_1, miden la variación en Y asociada con x_2 cuando el efecto de x_1 sobre x_2 e Y es constante. Usado en la estimación del modelo en el método de regresión para la selección secuencial de una variable con el fin de identificar la variable independiente con mayor poder de pronóstico, incrementado al de las variables de pronóstico ya presentes en el modelo.

Coeficiente de correlación producto-momento (*r*). El coeficiente de correlación más ampliamente utilizado, el cual designa la magnitud de la relación entre dos variables medidas por lo menos en una escala de intervalos; también se denomina r de Pearson.

Coeficiente de determinación (R^2). Medida de la proporción de la varianza de la variable criterio sobre su media aritmética, es explicada por las variables independientes o de pronóstico. El coeficiente puede variar entre cero y uno si el modelo de regresión es estimado y aplicado apropiadamente; el investigador puede asumir que cuanto mayor sea el valor de R^2, mayor será el poder explicativo de la ecuación de regresión y, por tanto, mejor pronóstico de la variable criterio.

Coeficiente de regresión (b_n). Valor numérico del parámetro estimado directamente asociado con las variables independientes. Por ejemplo, en el modelo $Y = b_0 + b_1 X_1$, el valor b_1 es el coeficiente de regresión de la variable X_1. En el modelo de regresión múltiple (es decir, $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$), los coeficientes de regresión son parciales porque cada uno tiene en cuenta no sólo las relaciones entre Y y X_1 y entre Y y X_2, sino también entre X_1 y X_2. El coeficiente no está limitado en su rango, ya que se basa tanto en el grado de asociación como en las unidades de escala de la variable de pronóstico. Por ejemplo, dos variables con la misma asociación a Y tendrían diferentes coeficientes si una variable de pronóstico se midió en escala sobre 7 puntos y otra basada en una escala de 100 puntos.

Coeficiente de validez. Índice cuantitativo que generalmente va de 0.0 a 1.00, con el cual se estima qué tan valido es un instrumento. Por lo general se calcula junto al método de validación de instrumentos por medio de criterios.

Coeficiente phi (π). Índice que describe la magnitud de la relación entre dos variables dicotómicas.

Comparaciones por pares. Contrastes en que se presentan dos elementos y se pide a un experto que los compare.

Concepto. Abstracción basada en observaciones de algunas conductas o características, como serían “estrés” o muerte.

Confiabilidad. Consistencia de las mediciones: posibilidad de repetir o replicar los hallazgos, estabilidad de la medición en el tiempo. Grado de congruencia o fidelidad con la que un instrumento cuantifica el atributo que pretende medir.

Confiabilidad de los calificadores (u observadores). Grado en que los dos calificadores u observadores, que trabajan independientemente, asignan a las mismas calificaciones o valores al atributo que están cuantificando. Tales calificaciones ocurren normalmente dentro del contexto de la investigación u observación.

Confiabilidad de test-retest. Evaluación de la estabilidad de un instrumento mediante la correlación de los resultados obtenidos en aplicaciones reiterativas. Tambien se aplica a una misma persona la prueba en dos ocasiones y se comparan los resultados.

Confiabilidad por mitades. Método consistente en dividir una escala o una prueba en dos mitades que se comparan estadísticamente.

Confianza, intervalo de. Límites de dos valores, máximo y mínimo, dentro de los cuales se considera que un parámetro de la población está incluido con cierta confianza o probabilidad.

Consentimiento informado. Principio ético que exige a los investigadores obtener la participación voluntaria de los sujetos después de haberles informado acerca de los posibles riesgos y beneficios del estudio. Los participantes lo otorgan libremente.

Constructo. Noción que el investigador puede definir en términos conceptuales, pero que no puede ser directamente medido (es decir, el encuestado no puede articular una respuesta única que proporcionaría total y perfectamente una medida del concepto) o medido sin error. Los constructos son las bases para formar las relaciones causales, en la medida que son las representaciones más “puras” posibles de un concepto. Es inventado (construido) por los investigadores para una finalidad específica. Sin embargo, cualquiera que sea su nivel de especificidad, un constructo no puede ser medido directa y perfectamente aunque sí debe hacerlo aproximadamente por indicadores.

Contraste *post hoc*. Contraste de las diferencias de medias, realizado después de que la hipótesis nula sea rechazada al aplicar un análisis de varianza. Por lo general, los contrastes *post hoc* no utilizan un único contraste, sino que prueban las diferencias entre todas las combinaciones posibles de los grupos. Aunque proporcionan una información diagnóstica abundante, inflan el error tipo I con el empleo de contrastes estadísticos múltiples y, por tanto, tienen que utilizar niveles de confianza muy estrictos.

Contraste (prueba) *t* de Student. Estadístico que valora la significancia estadística de las diferencias entre dos medias muestrales para una sola variable dependiente. Es un caso especial del ANOVA para dos grupos o niveles de la variable de tratamiento.

Control. El proceso de conservar constantes las posibles influencias en la variable dependiente bajo estudio.

Correlación. Asociación entre dos conjuntos de puntuaciones; con frecuencia se expresa en términos de un coeficiente de correlación. Tendencia de la fluctuación (variación) en una variable a relacionarse con la fluctuación (variación) en otra variable.

Correlación biserial. Medida de correlación utilizada para remplazar la correlación de momento-producto cuando una variable medida métricamente esta asociada con una medida binaria (cero, uno) no métrica.

Correlación canónica. Procedimiento estadístico que permite examinar la relación entre dos o más variables independientes y dos o más variables dependientes.

Correlación negativa o relación inversa. Estado en el que, a medida que crece una variable, la otra decrece.

Correlación parcial bivariante. Correlación simple (dos variables) entre dos series de residuos (variación no explicada) que queda tras eliminar la influencia de otras variables independientes.

Correlación positiva. Situación en que un incremento de variable se acompaña por uno de la otra.

Correlación tetracórica. Medida de asociación utilizada para relacionar dos medidas binarias.

Covariante. Variable que se controla estadísticamente (mantenida constante) en el análisis de la covarianza. La covariante suele deberse a una influencia ajena que introduce confusión en la variable dependiente.

Covarianza o análisis de covarianza. Empleo de procedimientos similares a la regresión, para eliminar la variación extraña (ajena) de las variables dependientes debida a una o más variables independientes no-controladas (covariaciones o covariantes). Se supone que las covariaciones están linealmente asociadas con las variables dependientes. Después del ajuste debido a la influencia de las covariaciones, se realiza un ANOVA (o MANOVA) estándar. Este proceso de ajuste (conocido como ANCOVA y MANCOVA) permite generalmente el uso de contrastes más sensibles de los efectos de tratamiento.

Cuantificación basal. Cuantificación de la variable dependiente antes de introducir una intervención experimental.

Cuantificación nominal. El nivel más bajo de cuantificación, que consiste en asignar categorías a las características (por ejemplo, hombres = 1; mujeres = 2).

Cuantificación ordinal. Nivel de cuantificación que produce un ordenamiento jerárquico de la variable a lo largo de alguna dimensión.

Cuantificación proporcional. Nivel de cuantificación en el que hay distancias iguales entre las unidades de medida y que tienen un punto cero significativo (por ejemplo, el peso corporal es el nivel de cuantificación más alto).

Cuasi-experimento o experimento natural. Técnica de asignación no aleatoria de sujetos a condiciones. En ella, el investigador carece de control directo sobre la variable independiente.

Cuestionario. Serie de preguntas escritas sobre un tema respecto del cual se buscan las opiniones personales.

Curtosis. Medida del apuntamiento o llanura de una distribución cuando se compara con una distribución normal.

Curva normal. Curva simétrica en forma de campana que suele aproximarse a la frecuencia de ocurrencia de los eventos de la naturaleza.

Definición operacional. Definición de una variable por la forma en que se mide, la inteligencia se define operacionalmente como la calificación de una prueba de C*I*.

Desviación estándar (*DE, s* o σ). El concepto estadístico más utilizado para estimar el grado de variabilidad de un conjunto de resultados.

Diagrama de dispersión. Gráfica de una correlación o relación lineal entre dos variables.

Diagrama de Gantt. Diagrama que representa la programación de las actividades (tareas) de una investigación, estudio o experimento, y en el cual se destacan el orden secuencial y las interrelaciones de las actividades.

Diagrama de tallo y hojas. Una variante del histograma que proporciona una representación visual de la distribución de la variable, así como una enumeración de los valores efectivos de los datos.

Diferencial semántico. Técnica usada para cuantificar actitudes, en la cual se pide a los respondientes que califiquen un concepto de interés situándolo en una serie de escalas bipolares de siete puntos. Desarrollado por C. Osgood, para medir el significado de los conceptos.

Diseño antes-después. Diseño experimental en el cual se obtienen datos de los sujetos de la investigación antes y después de introducir las condiciones experimentales, también se conoce como diseño de test-retest.

Diseño de experimentos. Plan de investigación en el cual el investigador manipula o controla directamente una o más variables de pronóstico y valora sus efectos sobre las variables dependientes. Ya habitual en la ciencia física, está ganando popularidad en las ciencias económicas y sociales. Por ejemplo, a los encuestados se les muestran anuncios publicitarios distintos que varían temáticamente en una característica, tales como diferentes pretensiones (emocional frente a racional).

Diseño de la investigación. Plan global para obtener y analizar datos, el cual incluye especificaciones para dar mayor validez interna y externa al estudio o experimento.

Diseño de medidas repetidas. Diseño experimental o estudio en el que el mismo grupo de sujetos se expone a más de una condición o tratamiento.

Diseño de muestreo proporcional. Estrategia de muestreo en la que el investigador toma muestras de los diferentes estratos de la población, en proporción directa a su representatividad dentro de dicha población.

Diseño factorial. Diseño experimental en el que se manipulan simultáneamente dos o más variables independientes. Este diseño permite analizar por separado los efectos principales de las variables independientes más los efectos de interacción de dichas variables.

Diseño multivariado. Enfoque donde participa más de una variable dependiente.

Diseño por series temporales. Diseño cuasi-experimental que consiste en obtener información a través de un periodo prolongado, durante el cual se establecen muchos puntos de recolección de datos antes y después de la introducción de un tratamiento.

Diseño pre-experimental. Diseño de investigación que no incluye controles o testigos para compensar la ausencia de la asignación aleatoria o de un grupo control (testigo).

Distribución asimétrica. Distribución de valores sesgada (sus dos mitades no son simétricas o especulares mutuas).

Distribución bimodal. Distribución de valores con dos picos modas (frecuencias altas).

Distribución de frecuencia. Conjunto sistematizado de valores numéricos, desde los más bajos hasta los más altos, junto al número de veces (frecuencia) en que se obtuvo tal valor.

Distribución de muestreo. Distribución teórica de un estadístico que utiliza un número infinito de muestras como base y los valores del estadístico calculado a partir de tales muestras como los puntos de la distribución.

Distribución multimodal. Distribución de valores con más de dos picos (frecuencia alta).

Distribución normal. Distribución teórica, simétrica y con forma de campana. También se llama curva normal o de Gauss. El eje horizontal representa todos los posibles valores de una variable y el eje vertical la probabilidad de que ocurran dichos valores. Aquéllos están agrupados alrededor de su media aritmética en forma simétrica y unimodal.

Distribución unimodal. Distribución de valores con una sola moda (un pico, frecuencia más alta).

Efecto de Hawthorne. Efecto de la variable dependiente debido a que los sujetos están conscientes de que están sometidos a estudio.

Efecto de interacción. Efecto que tienen sobre una variable dependiente dos o más variables independientes que actúan en combinación (en forma interactiva), al contrario de hacerlo como factores independientes entre sí.

Efectos principales. En un estudio con múltiples variables independientes, los efectos de cada variable independiente sobre la variable dependiente.

Empirismo. Proceso en el cual los datos provenientes de la realidad, y que se reúnen a través de los sentidos, se utilizan como base para generar conocimientos.

Encuesta. Tipo de investigación no experimental que se orienta a tener información respecto del "estado real" de alguna situación por medio de interrogatorio directo de una muestra de respondientes.

Entrevista. Método de reunión de datos en la cual una persona (entrevistador) formula preguntas a otra (entrevistado); se hace en forma directa o por teléfono.

Entrevista semi-estructurada. Técnica en que se formulan las mismas preguntas a todos los consultados, pero el orden de éstas puede diferir.

Error de medición. El grado de desviación entre los resultados verdaderos y los obtenidos al cuantificar o evaluar una característica.

Error de muestreo. Variación debida al azar entre muestras elegidas de una sola población.

Error de predicción. Diferencia entre los valores reales y de predicción de la variable criterio para cada observación en la muestra.

Error de selección. Peligro para la validez interna del estudio, que es resultado de las transferencias previas en tratamiento entre los grupos experimental y control.

Error estándar de la media. Medida de la dispersión de las medias o de las frecuencias de las medias esperadas debido a la variación muestral. Denota la gama esperada del coeficiente a través de las muestras múltiples de los datos. Resulta útil en pruebas estadísticas para ver si el coeficiente es sustancialmente diferente de cero (es decir, si la gama esperada del coeficiente contiene el valor cero a un nivel de confianza específico). El valor *t* de un coeficiente de regresión es el coeficiente dividido por su error estándar.

Error tipo I. Probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta, es decir, concluir que dos medias son significativamente diferentes cuando de hecho son iguales. Valores de alfa (por ejemplo, 0.05 o 0.01) llevan a que el rechazo de la hipótesis nula sea insostenible, y el no rechazo de la hipótesis alternativa, de que las medias poblacionales son distintas.

Error tipo II. Probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, es decir, concluir que las dos medias no son significativamente diferentes cuando de hecho lo son. También conocido como beta (β). En términos más sencillos, la probabilidad de no encontrar correlación o diferencia de medias cuando existen. Está inversamente relacionado con el error tipo I. El valor 1 menos el error tipo II se define como la potencia o poder de la prueba estadística.

Escala de Likert. Tipo de cuantificación mixta de las actitudes, el cual implica sumar los resultados de un conjunto de reactivos (enunciados) a los que los respondientes deben asignar su grado de acuerdo o desacuerdo.

Escala ordinal. Las características a evaluar pueden ordenarse en una dimensión subyacente, pero no se brinda información respecto de la distancia entre los puntos, sino sólo a la magnitud o a la dirección en orden creciente o decreciente.

Estadística bivariable. Estadísticas derivadas del análisis de dos variables simultáneamente, con el fin de evaluar la relación empírica que priva entre ellas.

Estadística de prueba. Estadísticas usadas para evaluar la significancia estadística de las relaciones entre variables. Sus distribuciones de muestreo se conocen por las circunstancias en las que la hipótesis nula es verdadera; como ejemplos pueden citarse la *ji*-cuadrada, la razón F, el valor t y la r de Pearson.

Estadística descriptiva. Técnicas utilizadas para describir y resumir el conjunto de datos obtenidos por el investigador; por ejemplo, media aritmética, mediana, moda, desviación estándar, varianza, porcentaje de las frecuencias, gráficas, etcétera.

Estadística inferencial (o deductiva). Estadística que permite al investigador deducir si las relaciones, diferencias en una o varias muestras, pueden ocurrir en una población, de donde fue extraída la o las muestras.

Estadística multivariable. Técnica estadística que analiza relaciones entre tres o más variables. Dentro de las estadísticas multivariables más usadas están: regresión múltiple, análisis de función discriminativa y análisis factorial.

Estadística no paramétrica. Clase general de estadística inferencial sin suposiciones rigurosas sobre la distribución normal de las variables; suele utilizarse en muestras pequeñas o también cuando los datos se miden en escalas nominal u ordinal.

Estadística paramétrica. Una clase de estadística inferencial que consta de: 1. suposiciones acerca de la distribución de las variables; 2. estimación de un parámetro, y 3. el uso de cuantificaciones intervalares o proporcionales.

Estadística univariada. Técnica para analizar una sola variable con fines descriptivos.

Estadísticas multivariadas. Procedimientos estadísticos diseñados para analizar las relaciones entre tres o más variables. Dentro de las estadísticas multivariadas en uso cabe mencionar la regresión múltiple, el análisis de covarianza y el análisis de factores.

Estadístico. Utilizado para corroborar la significancia estadística de relaciones entre variables. Las distribuciones muestrales de los estadísticos de prueba se conocen para circunstancias en que la hipótesis nula es verdadera; entre los ejemplos están *ji*-cuadrada, pruebas *F*, *t* y *r* de Pearson.

Estimación de máxima verosimilitud (MLE). Método de estimación habitualmente empleado en modelos de ecuaciones estructurales, incluyendo LISRELL y EQS.

Estimación por intervalos. Método de estimación estadística en el que el investigador establece límites para los valores que con mayor probabilidad, dentro de cierto nivel de confianza, representarán el verdadero parámetro de la población.

Estimación puntual. Procedimiento de estimación estadística en que el investigador utiliza la información de una muestra para calcular el valor aislado (estadístico) que mejor represente el valor del parámetro de la población.

Estrato. Subdivisión de la población con arreglo a alguna característica (por ejemplo, varones y mujeres).

Estructura muestral. Lista de todos los elementos en la población a partir de la cual se extrae la muestra.

Estructura o esquema conceptual. Conceptos o abstracciones interrelacionados, que están ensamblados en algún esquema racional por su importancia con el tema común (véase también teoría).

Estudio de campo. Estudio en el que los datos se toman en el campo, a partir de individuos en sus actividades cotidianas y no en una situación artificial, esto con el objeto de comprender las costumbres, formas de comportamiento y creencias que tienen los individuos o grupos mientras están inmersos en la vida real.

Estudio de caso. Investigación profunda de una sola instancia. La unidad puede ser tan pequeña como un individuo o tan grande como toda una comunidad.

Estudio de casos y controles. Diseño de investigación, típico de las investigaciones retrospectivas efectuadas después de ocurridos los hechos, que consiste en comparar un "caso" (es decir, un sujeto con el trastorno en escrutinio, por ejemplo, cáncer pulmonar) y un control o testigo equivalente (es decir, una persona sin dicho trastorno).

Estudio de casos. Método de investigación que comprende el análisis minucioso de un individuo, grupo, comunidad o institución, considerándola como una unidad social.

Estudio de cohorte. Estudio de tendencias que se orienta a una muestra específica (a menudo un subgrupo catalogado por edades), a partir de las cuales se escogen muestras diferentes en puntos cronológicos sucesivos (como serían estudiantes universitarios graduados en el periodo determinado).

Estudio de panel. Técnica usada con frecuencia en la investigación de opinión pública: se entrevista en repetidas ocasiones a la misma muestra de personas.

Estudio de tendencia. Tipo de estudio longitudinal en el que se analizan diferentes muestras de una población en relación con el tiempo y algún fenómeno (como sería la serie de encuestas de preferencias políticas y electorales).

Estudio descriptivo univariado. Estudio en el que se obtiene información sobre la ocurrencia, su frecuencia o el valor promedio de las variables de interés, considerándolas una por una.

Estudio en el panel. Tipo de estudio longitudinal en el que participan los mismos sujetos para obtener datos en dos o más puntos del tiempo.

Estudio exploratorio. Estudio que comienza con un análisis de las causas supuestas (por ejemplo, el tabaquismo) y luego avanza para observar los efectos, también supuestos (por ejemplo, cáncer pulmonar).

Estudio longitudinal. Investigación sobre un individuo o grupo durante un periodo prolongado, a diferencia del estudio transversal.

Estudio piloto. Método de uso preliminar a pequeña escala de un procedimiento, diseñado para identificar problemas y omisiones antes de conducir el estudio real.

Estudio prospectivo. Investigación que comienza con el examen de las supuestas causas, como serían, por ejemplo, las del tabaquismo, y sigue adelante cronológicamente para observar los efectos supuestos (como sería el cáncer del pulmón).

Estudio retrospectivo. Estudio que comienza con la manifestación de la variable dependiente en el presente (por ejemplo, cáncer pulmonar) y donde luego se relaciona este efecto con alguna causa presunta en el pasado (por ejemplo, fumar tabaco).

Estudio transversal. Comparación de diferentes grupos en un solo momento particular.

Ética. La calidad de técnicas de investigación en lo que respecta a su cumplimiento de obligaciones profesionales, legales y sociales, para los sujetos del estudio.

Evaluación de necesidades. Estudio en el cual un investigador reúne datos para calcular las necesidades de un grupo, comunidad u organización; a menudo se emplea como guía para asignación de recursos.

Evaluación de programas. Conjunto de procedimientos sistemáticos para determinar la eficacia de un plan.

Evaluación formativa. Valoración dinámica de un producto o programa en su fase de desarrollo, con el fin de optimizar la calidad definitiva del mismo.

Evaluación psicométrica. Evaluación de la calidad de un instrumento, basada principalmente en las evidencias de su confiabilidad y validez.

Evaluación retrospectiva. Investigación diseñada para examinar la utilidad o el valor de un programa o práctica después de que ya está en operación.

Evaluación sumativa. Investigación que tiene como fin examinar la utilidad o valía de un programa o la práctica, después de que está ya en operación.

Experimento. Estudio de investigación en el que el investigador controla (manipula) la variable independiente y asigna sujetos en forma aleatoria a cada condición diferente.

Experimento doble ciego. Experimento en el que ni a los sujetos ni quienes administran el tratamiento saben cuál es el grupo experimental y cuál es el grupo control.

Factor (análisis factorial). Combinación lineal (valor teórico) de las variables originales. Los factores también representan las dimensiones subyacentes (construcciones) que resumen o justifican la serie original de variables en observación.

Fórmula de Kuder-Richardson (KR-20). Método para calcular un coeficiente de confiabilidad de la uniformidad interna del conjunto de reactivos de una escala; se usa cuando los reactivos son dicotómicos.

Frecuencia. Número de veces que ocurre una puntuación, dato o nivel de una categoría.

Frecuencia esperada (*fe*). Repeticiones que representan la hipótesis nula o lo que se esperaría.

Frecuencia observada (*fo*). Datos en bruto (frecuencia, no porcentajes).

Grados de libertad (*gl*). Concepto usado en la pruebas de significancia estadística que se refiere al número de valores de la muestra que no pueden ser calculados a partir del conocimiento de otros valores y una característica determinada (por ejemplo, si se conoce la media de una muestra, todos los valores, excepto uno, pueden variar libremente). Aunque por lo común el número de grados de libertad es igual a $N - 1$, existen diferentes fórmulas para las distintas pruebas.

Gráfica de barras. Figura construida con barras.

Gráfico de cajas y bigotes (box plot). Método de representación de la distribución de la variable. Una caja representa la mayor parte de la distribución, mientras que las extensiones, llamadas bigotes, llegan al final de la distribución. Es muy útil para realizar comparaciones de su media aritmética o mediana, de una o varias variables, considerando también uno o varios grupos.

Gráfico de dispersión. Representación de las relaciones entre dos variables métricas que muestran los valores conjuntos de cada observación en un gráfico de dos dimensiones.

Gráfico de distribución normal. Comparación gráfica de la forma de la distribución respecto de la distribución normal. Ésta se representa por una línea recta con un ángulo de 45 grados. La distribución efectiva se dibuja contra esa línea, de tal forma que cualquier diferencia se muestra como desviación de la línea recta, haciendo muy obvia e interpretable la identificación de estas diferencias.

Grupo control. Conjunto de sujetos homogéneos y parecidos al grupo experimental en todos los aspectos, excepto en que no recibe el tratamiento y no está expuesto a la variable independiente. Se usa para controlar los efectos de variables extrañas en la dependiente; constituye una base con la cual se medirán los efectos del tratamiento; también es llamado grupo testigo.

Grupo de comparación (control o testigo). Grupo de sujetos cuyos resultados respecto de una variable dependiente sirven como base para evaluar los resultados del grupo experimental o de interés primordial. En general, el término grupo de comparación se utiliza en vez de grupo control o testigo cuando en la investigación no se usa un diseño verdaderamente experimental.

Grupo de tratamiento o experimental. Conjunto de sujetos expuestos a los niveles de la variable independiente, de intervención o tratamiento.

Guttman, escala de. Método para medir actitudes, que utiliza un conjunto de puntos acumulativos (de un solo tono) respecto de los cuales se pide a los participantes que estén de acuerdo o en desacuerdo.

Hawthome, efecto. Efecto de una variable dependiente, causado por el conocimiento, por parte de los sujetos, de que son participantes experimentales “especiales” en el estudio.

Hipótesis. Afirmación comprobable derivada lógicamente de la teoría o de la observación, puede confirmarse (no rechazarse) o rechazarse. Se somete a comprobación.

Hipótesis nula (H_0). Suposición de que las diferencias producidas por la manipulación de la investigación se deben a fluctuaciones al azar y que la variable independiente no tiene efecto en la dependiente.

Hipótesis alternativa. Hipótesis de trabajo o de investigación, alternativa a la hipótesis nula. Es una proposición escrita en terminos afirmativos (es decir, que habrá un efecto).

Hipótesis direccional. Hipótesis que hace una predicción específica sobre la dirección y la naturaleza de la reacción entre dos variables.

Hipótesis no direccional. Hipótesis de investigación que no estipula por adelantado la dirección y naturaleza de la relación entre las variables.

Histograma. Representación gráfica de la distribución de una variable. Al formar la distribución de frecuencias en categorías, puede verse el perfil de la distribución de la variable. Se utiliza para realizar una comparación visual con la distribución normal.

Homogeneidad. 1. En términos de la confiabilidad de un instrumento, el grado con el cual sus partes integrantes (subpartes) muestran congruencia interna, esto es, miden el mismo atributo crítico. 2. En términos más generales, el grado de semejanza de los objetos, es decir, el caracterizarse por su poca variabilidad.

Homoscedasticidad. Descripción de datos en los que la varianza del término de error aparece constante sobre un rango de variables independientes. El supuesto de igual varianza del error de la población *E* (estimado) es decisivo para la apropiada aplicación de la regresión lineal y de las pruebas paramétricas. Cuando el término de error tiene una varianza en aumento u ondulante, se dice que los datos son heteroscedásticos. La discusión de los residuos ilustra mejor este punto.

Igualamiento o ajuste. El “emparejamiento” de sujetos en un grupo con otros de otro grupo, basado en su semejanza en una o más dimensiones hechas para mejorar la susceptibilidad global de los grupos a ser comparados. Cuando se hace el igualamiento en el marco de un experimento, el método genera un diseño “aleatorizado” en bloques.

Investigación clínica. Investigación diseñada para generar conocimientos que guíen la práctica de la medicina o la psicología.

Investigación con encuestas. Recolección sistemática de información sobre creencias, actitudes, valores y comportamiento personales.

Investigación correlativa. Estudios en los que se exploran las interrelaciones de las variables de interés sin que haya ninguna intervención activa por parte del investigador.

Investigación descriptiva. Estudios que tienen como principal objetivo la representación precisa de las características de individuos, situaciones o grupos, y expresar la frecuencia con que determinados fenómenos ocurren.

Investigación empírica. Análisis que implica la medición de eventos observables.

Investigación evaluativa. Investigación cuyo objetivo es indagar qué tan bien funciona un programa, una práctica o una política.

Investigación *ex post facto* (después de los hechos). Investigación efectuada después de que ocurrieron los cambios en la variable independiente durante el curso natural de los eventos. Es una forma de investigación no experimental en que las aplicaciones causales son inferidas “después de los hechos”.

Investigación exploratoria. Tipo de investigación no experimental enfocada en obtener información relacionada con el *statu quo* de determinada situación. A menudo, se da por medio de la interrogación directa de una muestra, sirve para establecer hipótesis.

Investigación histórica. Estudios sistemáticos diseñados con el fin de establecer hechos y relaciones concernientes a ciertos acontecimientos pasados.

Investigación instrumental. Estudio realizado como requisito académico, vocacional o profesional cuyo objetivo es demostrar la competencia para la investigación.

Investigación metodológica. Investigación diseñada para crear o refinar procedimientos de obtención, organización o análisis de datos.

Investigación no experimental. Estudio en el que el investigador recaba sus datos sin introducir tratamiento o cambio alguno.

Investigación observacional. Estudios en que se reúnen datos por medio de observación y registro de conductas o actividades de interés.

Investigación secundaria. Estudio realizado en archivos con el uso de datos primarios existentes.

***Ji*-cuadrada (X^2).** 1. Prueba estadística utilizada con datos categóricos para probar si una distribución de puntuaciones obtenida difiere confiablemente de lo que se esperaría debido al azar. 2. Método de estandarización de datos en una tabla de contingencia comparando la frecuencia observada con la esperada en cada una de las casilla (ésta se obtiene mediante el producto de las probabilidades marginales de su fila o renglón con las de su columna, dividiendo dicho producto entre la frecuencia total).

Lambda de Wilk. Índice usado en el análisis de funciones discriminatorias para indicar la proporción de la varianza de la variable dependiente que *no* es explicada por los predictores; $(\lambda) = 1 - R_2$.

Likert, escala de. Medición compuesta de actitudes que comprende la suma de puntuaciones obtenidas con un conjunto de proposiciones respecto a las cuales se pide a los respondientes indicar su grado de aprobación o desaprobación.

Literatura, revisión de la. Resumen crítico de investigación sobre un tema de interés, que se prepara, en forma general, para colocar al problema estudiado en el debido contexto o identificar deficiencias y faltas en estudios anteriores, para así justificar la nueva investigación.

Maduración. Amenaza para la validez interna de un estudio. Aparece cuando los factores influyen en la medición de la culminación (variable dependiente), como resultado del transcurso del tiempo.

Manipulación. Intervención o tratamiento introducido por el investigador en un estudio experimental o cuasi experimental. Él manipula la variable independiente para variar su impacto en la investigación.

Media (aritmética) o promedio. Estadística descriptiva que mide la tendencia central considerada como el punto de equilibrio o centro de gravedad de un conjunto de datos. Se calcula sumando todos los resultados y dividiendo el resultado entre el número de casos o sujetos.

Mediana (*Me*). Punto medio de una distribución cuando todas las calificaciones están acomodadas de mayor a menor. La mitad de las calificaciones (50%) se halla por encima de la mediana y el resto por debajo de ella.

Medición de la razón. Nivel de medición en el cual existen igual distancia entre las unidades cuantitativas y un cero significativo real. Es el máximo nivel de medición (como sería la edad).

Medida de intervalo. Nivel de medición donde un atributo de una variable se ordena por jerarquías o rangos, en una escala que tiene iguales distancias entre los puntos de la misma (como serían los grados Fahrenheit, por ejemplo).

Medida nominal. El nivel menor de medición que comprende la asignación de características a categorías (como sería asignar a los varones la categoría 1 y a las mujeres la categoría 2).

Medida ordinal. Nivel de medición que genera ordenamiento por jerarquías (rangos) de una variable, siguiendo alguna dimensión.

Medidas nominales. Características asignadas a las categorías; no hay una dimensión continua subyacente.

Métodos de investigación. Son las fases técnicas y estrategias para reunir y analizar los datos en una investigación.

Mínimos cuadrados. Procedimiento de estimación utilizados en la regresión simple y múltiple por el que se estiman los coeficientes de regresión para aminorar la suma total de los residuos cuadrados.

Moda. Calificación que ocurre con mayor frecuencia en una distribución unimodal, si hay dos, la distribución se denomina bimodal.

Modelo. Conjunto especificado de relaciones de dependencia que puede ser contrastado empíricamente por medio de la operacionalización de una teoría. El propósito de un modelo es proporcionar concisamente una representación amplia de las relaciones a examinar. El modelo puede ser formalizado en un diagrama de secuencias o en un conjunto de relaciones estructurales.

Mortalidad. Amenaza de la validez interna de un estudio que se refiere a la pérdida diferencial de sujetos (atrición), de diferentes grupos.

Muestra. Subconjunto de una población seleccionado para participar en un estudio de investigación.

Muestra aleatoria. Tipo de muestra probabilística en que todos los individuos de la población estudiada tienen la misma probabilidad de ser seleccionados.

Muestra con propósito. Muestra no probabilística en que se elige para su inclusión a los individuos considerados de mayor relevancia para lo estudiado.

Muestra de bola de nieve. Tipo de muestra con propósito (no probabilística) en la que el investigador pregunta a sus entrevistadores a quién más debería considerar.

Muestra estratificada. Muestra probabilística donde se seleccionan sus características para que sean proporcionales a las presentes en la población total.

Muestra probabilística. Es la extraída de tal forma que pueda estimarse la probabilidad de inclusión de cualquier individuo determinado. Existen dos tipos generales: la aleatoria y la estratificada.

Muestras no probabilísticas. Son aquellas en las que el investigador desconoce la probabilidad de selección. Los tres tipos generales de éstas son: por cuotas, intencional y accidental.

Muestras por cuotas. Tipo de muestras no probabilísticas en que el investigador establece deliberadamente proporciones de una muestra distinta de las existentes en la población.

Muestreo. Proceso encaminado a la selección de un fragmento de la población que represente a la población entera.

Muestreo accidental. Selección de los individuos (o unidades) más fácilmente accesibles para un estudio; también se conoce como muestreo por conveniencia.

Muestreo aleatorio. Selección de una muestra de manera que todo miembro de una población (o subpoblación) tenga las mismas probabilidades de ser elegido.

Muestreo aleatorio estratificado. Selección aleatoria de sujetos en dos o más estratos independientes de la misma población.

Muestreo aleatorio simple. Tipo más sencillo de muestreo probabilístico en el que se crea un marco de muestreo enumerando a todos los miembros de una población de interés y seleccionando después una muestra, dentro de este marco, a través de procedimientos completamente aleatorios.

Muestreo cronológico. En la investigación por observación, la selección de periodos durante las cuales se harán las observaciones.

Muestreo desproporcionado. Estrategia de muestreo mediante la cual el investigador muestrea diferentes proporciones de sujetos, en distintos estratos de la población, con el fin de asegurar una representación adecuada de los estratos comparativamente menores.

Muestreo en el tiempo. En investigación observatoria, la elección de intervalos temporales durante los cuales se efectuarán las observaciones.

Muestreo intencionado (intencional). Método no probabilístico de muestreo donde el investigador escoge sujetos para el estudio; con base en su criterio personal, respecto de aquellos que tendrán mayor representatividad o productividad. También se le conoce como muestreo por criterio.

Muestreo multifásico. Estrategia de muestreo que se realiza a través de una serie de fases que van de unidades de muestreo grandes a pequeñas (por ejemplo, de las entidades federativas a las escuelas de enfermería y luego a los miembros del profesorado).

Muestreo no probabilístico. La selección de sujetos o unidades muestrales de una población por medio de técnicas no aleatorias; entre los ejemplos están los muestreos accidental, voluntario y por cuota.

Muestreo por cuotas. Selección no aleatoria de sujetos en la que el investigador especifica de antemano las características de la muestra con el propósito de incrementar su representatividad.

Muestreo por eventos. En los estudios por observación, plan de muestreo consistente en la selección de formas de comportamiento o eventos integrales.

Muestreo conglomerados. Forma de muestreo en varias etapas, en la que primero se seleccionan grandes conjuntos (por ejemplo, escuelas de enfermería) y luego se toman submuestras sucesivas de menor tamaño (por ejemplo, estudiantes de enfermería).

Muestreo por recomendación. Muestreo de sujetos con base en las referencias proporcionadas por otros sujetos que ya están en la muestra; también se llama muestreo en cascada.

Muestreo probabilístico. Selección de sujetos o unidades muestrales de una población por empleo de técnicas aleatorias; entre los ejemplos están muestreo aleatorio simple, en cúmulos y sistemático.

Muestreo sistemático. Selección de sujetos de tal forma que se escoja un individuo u objeto de cada determinado número de personas u objetos (cada décima persona, o elemento en una estructura muestral o lista).

Muestreo teórico. En estudios cualitativos, la selección de miembros de la muestra con base en descubrimientos que van surgiendo según avanza el estudio, con el fin de asegurar una representación adecuada de los temas importantes.

Muestreo, error en el. Fluctuación del valor de una estadística entre distintas muestras tomadas de la misma población.

Muestreo, marco de. La lista de todos los elementos de la población de la cual se toma la muestra.

Muestreo, vicio sistemático (error) de. Distorsiones que provienen de la selección de una muestra pero que ésta no es representativa de la población de la cual se extrajo.

Nivel de confianza. La probabilidad estimada de que un parámetro de la población esté dentro de un intervalo de confianza dado.

Nivel de significancia. La probabilidad de que una relación observada puede ser causada por el azar, esto es, por error muestral. Significancia al nivel de 0.05 (5%) que indica la probabilidad de que alguna relación de la magnitud observada aparezca por azar cinco veces de cada 100. También se conoce como la probabilidad de cometer el error tipo I.

Normas. Estándares de rendimiento de una prueba, basados en la obtención de información sobre los resultados de la prueba a partir de una muestra grande y representativa.

Observación participante. Método de reunir datos por observación de un grupo; organización en la cual el investigador participa como miembro.

Paradigma. Una manera de ver los fenómenos naturales que abarca un conjunto de suposiciones filosóficas y sirve como guía para abordar la indagación.

Parámetro. Una característica de la población (por ejemplo, la talla promedio de los ciudadanos mexicanos).

Población. El conjunto completo de individuos u objetos que tienen alguna característica en común (como serían todas las enfermeras en un estado o país). A veces se le conoce como universo.

Población accesible. La población de sujetos disponibles para un estudio particular; a menudo, un subgrupo no aleatorio de la población blanco.

Población blanco. Toda la población en la que el investigador está interesado y a la cual intenta generalizar los resultados de un estudio.

Población de interés o de estudio. La población entera en la que el investigador está interesado y en la cual quisiera generalizar los resultados de su estudio.

Predicción. Uno de los objetivos del método científico. Es el uso de la evidencia empírica para hacer predicciones en cuanto a cómo se comportarán las variables de interés en un escenario nuevo y con sujetos diferentes.

Pregunta o planteamiento abierto. Pregunta o planteamiento en una entrevista o cuestionario que no restringe las respuestas de los participantes a alternativas preestablecidas.

Pregunta o planteamiento cerrado. Pregunta que brinda a los participantes un conjunto de respuestas alternativas que son mutuamente excluyentes y exhaustivas, de las cuales hay que escoger la que más se acerque a la respuesta “verdadera”.

Procedimiento de comparación múltiple. Pruebas estadísticas, normalmente aplicadas después de que los resultados del análisis de varianza (ANOVA) indican diferencias de grupos estadísticamente significativas, que permiten comparar distintos pares de grupos.

Procedimiento de muestreo por tiempo. Método en que se seleccionan momentos específicos conforme a un plan de muestreo para registrar actividades observadas.

Protocolo. Documento que especifica lo que se propone estudiar el investigador; comunica el problema en estudio, su importancia, las técnicas planeadas para resolver la interrogante y, cuando se busca apoyo económico, los costos de la investigación.

Prueba. Procedimiento sistemático para comparar rendimiento, sentimientos, actitudes o valores personales.

Prueba clínica. Experimento destinado a probar la eficacia de un tratamiento clínico y que, por lo general, se efectúa con una muestra grande y heterogénea de sujetos.

Prueba de Friedman. Análogo no paramétrico del análisis de varianza (ANOVA para muestras repetidas) que se emplea cuando el investigador esta trabajando con un solo grupo medido varias veces.

Prueba de Kruskal-Wallis. Prueba no paramétrica (análoga al ANOVA para muestras independientes) que se usa para estimar la diferencia en tres o más grupos independientes con base en sus resultados jerarquizados.

Prueba de la mediana. Prueba no paramétrica que consiste en comparar las medianas de dos grupos independientes para averiguar si éstos provienen de poblaciones con medianas distintas.

Prueba de McNemar. Análisis estadístico que permite comparar las diferencias en proporciones cuando los valores se obtuvieron a partir de grupos emparejados (no independientes).

Prueba de signos. Es la prueba estadística no paramétrica que permite comparar dos grupos emparejados; usa como base la calificación relativa de valores efectuada por uno y otro grupo.

Prueba de una cola. Método de significación también estadística en el cual se consideran solamente valores en un extremo o cola de la distribución, para precisar la significación. Se usa cuando el investigador ha conocido anticipadamente la dirección de una relación; véase direccional, hipótesis.

Prueba de Wilcoxon. Prueba de estadística no paramétrica que permite comparar dos grupos pareados, usando para ello la calificación relativa asignada a ciertos valores por uno y otro grupo.

Prueba estadística. Procedimiento analítico que permite al investigador determinar las probabilidades de que los resultados obtenidos de una muestra reflejen los verdaderos resultados de la población, conforme a las leyes de la probabilidad.

Prueba estandarizada. Tipo de prueba publicada con datos normativos y que se aplica a la forma preestablecida.

Prueba exacta de Fisher. Procedimiento estadístico utilizado para evaluar la significancia de la diferencia en proporciones; se usa cuando el tamaño de la muestra es muy pequeño o cuando las celdas de la tabla de contingencia no tienen observaciones.

Prueba sesgada. Prueba de significancia estadística en la cual los valores en un extremo (cola) de una distribución son considerados al determinar la significancia; se usan cuando el investigador ha predicho la dirección de una relación (véase hipótesis direccional).

Prueba *t* de Student. Prueba estadística paramétrica utilizada para analizar la diferencia entre dos medias.

Prueba *U* de Mann-Whitney. Prueba no paramétrica que se usa para evaluar la diferencia entre dos grupos independientes con base en resultados jerarquizados.

Pruebas de dos colas. Prueba de significación estadística en la cual se consideran los valores en ambos extremos de la distribución (colas), para precisar la significación. Utilizada cuando el investigador no ha predicho la dirección de una relación (véase hipótesis no direccional).

Psicometría. Teoría en la cual se basan los principios de cuantificación mental y la aplicación de esta teoría para la creación de instrumentos cuantificacionales. Puede tomar valores entre –1 y +1, con +1 indicando una relación positiva perfecta, 0 indicando la ausencia de relación y –1 indicando una relación inversa o negativa perfecta (a medida que una crece, otra disminuye).

Puntos de indagación, planteamientos o reactivos. Términos para denotar alguna pregunta de un cuestionario o prueba, o alguna proposición sobre actitud u otra escala (como sería, por ejemplo, el examen final, que consistió en 100 puntos).

Puntuación verdadera. Puntuación o valor hipotético que se obtendría si una medida fuera infalible; es la parte del valor observado que no depende del error aleatorio ni de errores o vicios de medición.

Puntuaciones estándar (puntuación *Z*). Puntuaciones típicas o normalizadas; valores expresados en términos de desviaciones estándar con respecto de la media aritmética. Los valores en bruto son transformados en otros con una media de cero y desviación estándar de uno.

***R*.** Símbolo usado para designar el coeficiente de correlación múltiple, el cual indica la magnitud (pero no la dirección) de la relación entre la variable dependiente y múltiples variables independientes, tomadas a la vez.

***R* de Pearson.** Coeficiente de correlación más extensamente utilizado que representa la magnitud de la relación entre dos variables cuantificadas por lo menos en el nivel de intervalos; también se conoce como correlación producto-momento.

***Rxy* (*r*).** Símbolo usado típicamente para designar un coeficiente de correlación o la relación lineal simple bivariada, el cual resume la magnitud y dirección de una relación entre dos variables (independiente y dependiente).

R^2 (cuadrado del coeficiente de correlación lineal simple o múltiple). Indica la proporción de la varianza en la variable dependiente, que es explicada o justificada por un grupo de variables independientes. También se conoce como coeficiente de determinación.

Rango (o intervalo). Medida de dispersión o variabilidad, para calcularla se resta la menor calificación de la mayor. Medición de variabilidad que comprende la diferencia entre las cifras máxima y mínima en una distribución cuantitativa.

Razonamiento deductivo. Proceso de hacer predicciones específicas partiendo de principios generales (véase también razonamiento inductivo).

Razonamiento inductivo. El proceso de razonamiento que va de observaciones específicas hasta reglas más generales (véase también razonamiento deductivo).

Reactividad. Distorsión cuantitativa que nace del conocimiento que tiene el sujeto de ser observado o, en forma general, del efecto del propio método de medición.

Regresión. 1. Correlación, representa las relaciones entre conjuntos de calificaciones. 2. Procedimiento estadístico que permite predecir los valores de una variable dependiente con base en los valores de una o más variables independientes.

Regresión logística. Forma especial de regresión en la que la variable dependiente es una variable dicotómica (binaria) no métrica. Aunque existen algunas diferencias, la forma general de interpretación es bastante similar a la de la regresión lineal.

Regresión múltiple. Procedimiento estadístico que permite analizar los efectos simultáneos de dos o más variables independientes (o ajenas) sobre una variable dependiente; ésta debe ser medida sobre una escala de intervalos o de razón.

Regresión simple. Modelo de regresión con variable independiente única.

Relación causal. Relación entre dos variables, de tal forma que la presencia o ausencia de una (causa) rige la presencia o ausencia (el valor) de la otra (efecto).

Relación *F*. Valor obtenido en diversas pruebas estadísticas (por ejemplo, el análisis de varianza paramétrico), con el cual se compara la variación atribuible a diferentes fuentes (entre grupos y dentro de ellos).

Relación funcional. Relación o asociación entre dos variables en la que no puede presuponerse que una variable sea causa de la otra; sin embargo, cabe decir que la variable X cambia de valor en función de las alteraciones de la variable Y.

Relación negativa (inversamente proporcional). Relación entre dos variables en las que existe tendencia a que los valores altos de una se relacionen con valores bajos de la otra (por ejemplo, conforme la temperatura aumenta, la productividad de la gente disminuye). También se denomina relación inversa.

Relación positiva (directamente proporcional). Relación entre dos variables en la que hay tendencia a que los valores altos en una estén asociados con valores altos en la otra (por ejemplo, conforme la actividad física aumenta, el ritmo cardiaco se eleva).

Relación riesgo/beneficio. Riesgos y beneficios relativos, para el sujeto individual o para la sociedad en pleno, como consecuencia de su participación en un estudio científico.

Replicación. Duplicación de los procedimientos de investigación en un segundo estudio, con el fin de averiguar si los resultados previos se repiten.

Revista de arbitraje. Revista en la que se decide la aceptación o rechazo de artículos originales con fundamento en las recomendaciones de colegas revisores.

Sesgo de la muestra. Error introducido por un proceso de muestreo que favorece ciertas características sobre otras.

Significancia estadística. Término indicador de que es poco probable que los resultados obtenidos mediante un análisis de datos de una muestra se deban al azar, esto dentro de un nivel de probabilidad especificado.

Solomon, diseño de cuatro grupos. Diseño experimental en el que se usa la técnica previa y posterior para un par de grupos experimental y control, y la técnica de sólo retest para un segundo par.

Sondeo. Obtención de información más útil o detallada de un respondiente, en comparación con la que ha expresado voluntariamente durante la primera indagación.

Spearman, *rho* de. Coeficiente de correlación que indica la magnitud de una relación entre variables cuantificadas en la escala ordinal.

Spearman-Brown, fórmula de profecía de. Ecuación para hacer correcciones en un estimado de confiabilidad que se calculó por un método de “dos mitades”.

Sujeto. Persona que participa y aporta datos para un estudio.

Supuestos. Principios básicos aceptados como verdaderos, con arreglo a la lógica o razón, sin prueba o verificación.

Tabla de contingencia. Tabla bidimensional que permite tabular en forma cruzada las frecuencias observadas de dos variables cuantificadas en los niveles nominal u ordinal.

Tabla de números aleatorios. Tabla que contiene centenares de dígitos (de 0 a 9) dispuestos de tal manera que cada uno tenga la misma probabilidad de ir después de cualquier otro; se usa para el muestreo o asignación al azar.

Tabulación cruzada. Cuantificación de los casos que se presentan al considerar en forma simultánea los valores de dos o más variables (por ejemplo, genero masculino/femenino, tabulado en forma cruzada con el grado de tabaquismo fumador/no fumador). Típicamente, los resultados se presentan como una tabla cuyas hileras y columnas dependen de los valores de las variables.

Tasa de respuesta. Tasa de participación en una encuesta, calculada al dividir el número de participantes reales entre el número de personas de la muestra.

***Tau* de Kendall.** Coeficiente de correlación que se usa para indicar la magnitud de la relación entre datos de nivel ordinal.

Técnica de Delphi. Método para obtener las opiniones de un panel de expertos. Se interroga en forma individual a los expertos y se circula entre todos ellos un resumen de las opiniones. Luego se vuelve a interrogar a los expertos, proceso que se repite tantas veces como sea necesario hasta lograr determinado consenso.

Técnica de grupos conocidos. Método para estimar la validez de cierto constructo de un instrumento por medio del análisis del grado con el cual el dispositivo separa los grupos que, con base en la predicción, difieren con arreglo a alguna teoría o característica conocida.

Técnicas de “dos mitades”. Método para estimar la congruencia interna (confiabilidad) de un instrumento al correlacionar los valores de una mitad con la otra.

Técnicas de proyección. Métodos para medir atributos psicológicos (valores, aptitudes, personalidad) al dar a los respondientes estímulos no estructurados a los cuales reaccionen.

Tendencia central. Índice estadístico que representa lo más típico de un conjunto de resultados y que surge del punto central de la distribución de dichos resultados. Los tres índices más comunes de tendencia central son moda, mediana y media.

Teoría. Generalización abstracta que ofrece una explicación sistemática acerca de las relaciones entre fenómenos.

Thurstone, escala de. Tipo de escala actitudinal en la que un conjunto de "jueces", en primer lugar, califica el grado de favorabilidad de un grupo de proposiciones respecto de algún objeto actitudinal (como sería el aborto) y, después, los sujetos identifican las proposiciones con que concuerdan más.

Tratamiento. Término que denota una intervención o manipulación experimental.

Tratamientos. Niveles de la variable independiente.

***V* de Cramer.** Índice que describe la magnitud de la relación entre datos de nivel nominal y que se utiliza cuando la tabla de contingencia a la cual es aplicado es mayor que 2 × 2.

Validez. Grado en que un test mide lo que pretende medir. Correlación entre puntuaciones verdaderas y observadas de la prueba o instrumento de medición y del criterio externo.

Validez concomitante. Grado en que los resultados de un instrumento se correlacionan con determinado criterio externo que fue cuantificado en forma simultánea.

Validez concurrente. Correlación de una prueba con el comportamiento presente o con otras pruebas o medidas existentes. Es un tipo de validez de criterio y predictiva.

Validez convergente. Método de validación de ideas que consiste en evaluar en qué grado son similares (es decir, qué tanto convergen) dos métodos para cuantificar la misma idea.

Validez de constructo. Vinculación de la medición de la prueba con constructos teóricos específicos. Relación de la prueba con la teoría. La naturaleza de los datos a recoger depende de la concepción teórica del constructo. Es un concepto unificador de validez que integra consideraciones de contenido y de criterio, en un marco general para probar hipótesis racionales acerca de relaciones teóricamente relevantes.

Validez de contenido. Grado en que los reactivos de una prueba evalúan el dominio que ésta pretende cubrir. Relevancia de los reactivos en la conducta por medir.

Validez de criterio. Relación de las calificaciones de la prueba con otras medidas de la misma característica.

Validez externa. Grado en el que los resultados de un estudio o experimento pueden ser generalizados para abarcar escenarios o muestras distintas de las estudiadas.

Validez interna. El grado con el cual puede deducirse que el tratamiento experimental o estudio (variable independiente) y no los factores extraños no controlados, es la causa de los efectos observados.

Validez intrínseca. Postula la existencia de constructos alternativos y se examinan los datos de varias medidas, considerando sus covarianzas.

Validez predictiva o de predicción. 1. Grado en el que un instrumento puede predecir determinado criterio observado en un futuro. 2. Capacidad de una medida para vaticinar una conducta, las dos mediciones se realizan simultáneamente. Tipo secundario de validez de criterio.

Valor *p*. En pruebas estadísticas, la probabilidad de que los resultados obtenidos se deban exclusivamente al azar, la probabilidad de cometer un error tipo I.

Variabilidad. Grado con el cual los valores de un conjunto de puntuaciones difieren extensamente o están "dispersos", por ejemplo, cabría esperar mayor variabilidad de la edad dentro de un hospital que dentro de un asilo.

Variable. Cualquier característica o atributo susceptible de medirse, es decir, adopta valores diferentes, dentro de la población en estudio (por ejemplo, la temperatura del cuerpo, la edad o el ritmo cardiaco).

Variable activa. Variable que el investigador crea o manipula.

Variable ajena o extraña. Variable que vuelve confusa la relación entre las variables independiente y dependiente y que debe ser controlada, ya sea a través del diseño de la investigación o mediante procedimientos estadísticos.

Variable categórica. Variable cuyos valores son escalonados y definidos (por ejemplo, el estado civil de una persona) en vez de ubicarse en cualquier punto de un continuo.

Variable continua. Variable que puede tomar cualquier valor dentro de los límites de una escala continua (por ejemplo, la estatura).

Variable de criterio (media del criterio). La cualidad o atributo usado para medir el efecto de una variable independiente; se usa a veces como un sinónimo de variable dependiente.

Variable dependiente. Variable de interés resultante. Es la que, según la hipótesis, depende de otra variable o es causada por ésta (llamada variable independiente). También se le denomina variable de criterio.

Variable dicotómica. Variable que tiene sólo dos valores o categorías (como sería el caso del sexo).

Variable endógena. En análisis de trayectorias, variable cuya fluctuación depende de otras variables en el modelo.

Variable exógena. En el análisis de trayectorias, variable cuyos determinantes se encuentran fuera del modelo.

Variable extraña. Variable que confunde la relación entre las variables independiente y dependiente, y que es necesario controlar por el diseño de la investigación o por medio de técnicas estadísticas (por ejemplo, en un estudio del efecto de la edad de la mujer en el número de partos prematuros, la clase social y el origen cultural serían variables extrañas).

Variable independiente. Variable que, según el investigador, causa o influye en la variable dependiente; en investigación, esta variable es la que se somete a manipulación.

Variable mediadora. Variable que media o actúa como “corre ve y dile” en una cadena que relaciona a otras dos variables (por ejemplo, cabe decir que la capacidad de adaptación media la relación entre los acontecimientos estresantes y la angustia).

Variable simulada. Variables dicotómicas creadas para muchos análisis estadísticos multivariados; utilizan típicamente los códigos 0 y 1 (por ejemplo, mujer = 1 y varón = 0).

Variables de atributo. Características preexistentes de la entidad en investigación, las cuales son simplemente observadas y cuantificadas por quien investiga.

Varianza. Medida de variabilidad o dispersión que es igual al cuadrado de la desviación estándar. “Vicio” (tendenciosidad, error o parcialidad). Cualquier influencia que distorsiona los resultados de un estudio.

Bibliografía

1. Johnson R., Kuby P., *Estadística elemental, lo esencial*, 2008, Thomson.
2. Wackery D., Mendenhall W., *Estadística matemática con aplicaciones*, 2002, Thomson.
3. Mendenhall W., Beaver, *et al.*, *Introducción a la probabilidad y estadística*, 2002, Thomson.
4. Martín Pliego J., Montero J., *Problemas de Inferencia Estadística*, 2005, Thomson-Paraninfo.
5. Pagano Marcello, *Bioestadística*, Thomson, 2003.
6. Riuz Díaz, Barón López, *Bioestadística*, 2006, Thomson-Paraninfo.
7. Losada J.L., López-Fral., *Métodos de investigación en ciencias humanas y sociales*, 2003, Thomson-Paraninfo.
8. Pérez López C., *Métodos Estadísticos Avanzados con SPSS*, 2005, Thomson-Paraninfo.
9. Sierra Bravo R., *Tesis doctorales y trabajos de investigación científica*, 1999, Thomson-Paraninfo.
10. Kaplan Robert, Sacuzzo D., *Pruebas psicológicas principios, aplicaciones y temas*, 2006, Thomson.
11. Lizasoain L. Joaristi L., *Gestión y análisis de datos con SPSS* V.11, 2003, Thomson-Paraninfo.
12. Uriel Jiménez E., *Análisis multivariante aplicado*, 2006, Thomson-Paraninfo.
13. Mendenhall, Scheaffer, Ott, *Elementos de muestreo*, 2007, Thomson-Paraninfo.

Anexo 1

Tablas

Probabilidades acumuladas de la distribución de Poisson

	λ									
c	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	λ									
c	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0034	0.0023	0.0016	0.0011	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001
4	0.0151	0.0107	0.0076	0.0053	0.0037	0.0026	0.0018	0.0012	0.0009	0.0006
5	0.0375	0.0277	0.0203	0.0148	0.0107	0.0077	0.0055	0.0039	0.0028	0.0020
6	0.0786	0.0603	0.0458	0.0346	0.0259	0.0193	0.0142	0.0105	0.0076	0.0055
7	0.1432	0.1137	0.0895	0.0698	0.0540	0.0415	0.0316	0.0239	0.0180	0.0135
8	0.2320	0.1906	0.1550	0.1249	0.0998	0.0790	0.0621	0.0484	0.0374	0.0288
9	0.3405	0.2888	0.2424	0.2014	0.1658	0.1353	0.1094	0.0878	0.0699	0.0552
10	0.4599	0.4017	0.3472	0.2971	0.2517	0.2112	0.1757	0.1449	0.1185	0.0961
11	0.5793	0.5198	0.4616	0.4058	0.3532	0.3045	0.2600	0.2201	0.1848	0.1538
12	0.6887	0.6329	0.5760	0.5190	0.4631	0.4093	0.3585	0.3111	0.2676	0.2283
13	0.7813	0.7330	0.6815	0.6278	0.5730	0.5182	0.4644	0.4125	0.3632	0.3171
14	0.8540	0.8153	0.7720	0.7250	0.6751	0.6233	0.5704	0.5176	0.4657	0.4154
15	0.9074	0.8783	0.8444	0.8060	0.7636	0.7178	0.6694	0.6192	0.5681	0.5170
16	0.9441	0.9236	0.8987	0.8693	0.8355	0.7975	0.7559	0.7112	0.6641	0.6154
17	0.9678	0.9542	0.9370	0.9158	0.8905	0.8609	0.8272	0.7897	0.7489	0.7052
18	0.9823	0.9738	0.9626	0.9481	0.9302	0.9084	0.8826	0.8530	0.8195	0.7825
19	0.9907	0.9857	0.9787	0.9694	0.9573	0.9421	0.9235	0.9012	0.8752	0.8455
20	0.9953	0.9925	0.9884	0.9827	0.9750	0.9649	0.9521	0.9362	0.9170	0.8944

* Si $X \sim P(\lambda)$, la tabla de valores de $P(X \leq c)$, $c = 0, 1, \ldots, 20$. $P(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$.

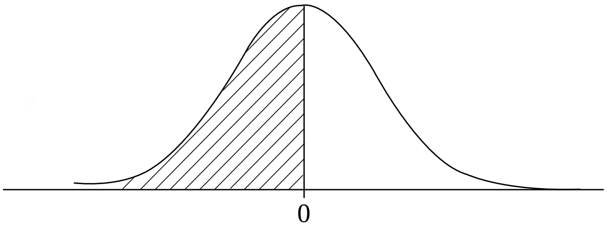
Probabilidades acumuladas de la distribución de Poisson (*Continuación*)

	λ									
c	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5
0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0018
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0071
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0211
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0504
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.1016
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1785
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2794
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3971
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.5207
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.6387
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.7420
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.8253
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8879
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9317
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9604
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9781
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9885
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9942
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9972

	λ								
c	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0014	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
6	0.0040	0.0029	0.0021	0.0015	0.0010	0.0007	0.0005	0.0004	0.0003
7	0.0100	0.0074	0.0054	0.0040	0.0029	0.0021	0.0015	0.0011	0.0008
8	0.0220	0.0167	0.0126	0.0095	0.0071	0.0052	0.0039	0.0028	0.0021
9	0.0433	0.0337	0.0261	0.0201	0.0154	0.0117	0.0089	0.0067	0.0050
10	0.0774	0.0619	0.0491	0.0387	0.0304	0.0237	0.0183	0.0141	0.0108
11	0.1270	0.1041	0.0847	0.0684	0.0549	0.0438	0.0347	0.0273	0.0214
12	0.1931	0.1621	0.1350	0.1116	0.0917	0.0748	0.0606	0.0488	0.0390
13	0.2745	0.2357	0.2009	0.1699	0.1426	0.1189	0.0984	0.0809	0.0661
14	0.3675	0.3225	0.2808	0.2426	0.2081	0.1771	0.1497	0.1257	0.1049
15	0.4667	0.4180	0.3715	0.3275	0.2867	0.2490	0.2148	0.1840	0.1565
16	0.5660	0.5165	0.4677	0.4204	0.3751	0.3321	0.2920	0.2550	0.2211
17	0.6593	0.6120	0.5640	0.5160	0.4686	0.4226	0.3784	0.3364	0.2970
18	0.7423	0.6996	0.6550	0.6089	0.5622	0.5156	0.4695	0.4246	0.3814
19	0.8122	0.7757	0.7363	0.6945	0.6509	0.6061	0.5606	0.5151	0.4703
20	0.8682	0.8385	0.8055	0.7694	0.7307	0.6898	0.6472	0.6034	0.5591

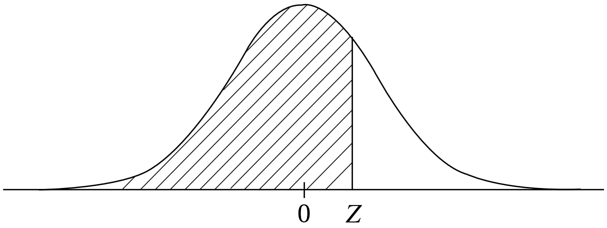
Probabilidades acumuladas de la distribución normal estándar

La tabla da el área a la izquierda de un valor de Z o sea $\int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.



Z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

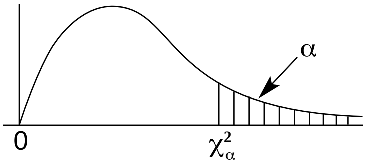
Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed. 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.



Z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed. 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de $\chi^2_\alpha\ (v)$



En la distribución *Ji*-cuadrada con ν grados de libertad la tabla proporciona el valor χ^2_α (ν) tal que $P(X^2_\alpha \geq \chi^2_\alpha(\nu)) = \alpha$.

ν \ α	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.8276	7.8794	6.6349	5.0239	3.8415	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000
2	13.8155	10.5966	9.2103	7.3778	5.9915	0.1026	0.0506	0.0201	0.0100	0.0020
3	16.2662	12.8382	11.3449	9.3484	7.8147	0.3518	0.2158	0.1148	0.0717	0.0243
4	18.4668	14.8603	13.2767	11.1433	9.4877	0.7107	0.4844	0.2971	0.2070	0.0908
5	20.5150	16.7496	15.0863	12.8325	11.0705	1.1455	0.8312	0.5543	0.4117	0.2102
6	22.4577	18.5476	16.8119	14.4494	12.5916	1.6354	1.2373	0.8721	0.6757	0.3811
7	24.3219	20.2777	18.4753	16.0128	14.0671	2.1673	1.6899	1.2390	0.9893	0.5985
8	26.1244	21.9550	20.0902	17.5345	15.5073	2.7326	2.1797	1.6465	1.3444	0.8571
9	27.8771	23.5893	21.6660	19.0228	16.9190	3.3251	2.7004	2.0879	1.7349	1.1519
10	29.5883	25.1882	23.2092	20.4832	18.3070	3.9403	3.2470	2.5582	2.1559	1.4787
11	31.2641	26.7568	24.7250	21.9200	19.6751	4.5748	3.8157	3.0535	2.6032	1.8339
12	32.9095	28.2995	26.2170	23.3367	21.0261	5.2260	4.4038	3.5706	3.0738	2.2142
13	34.5282	29.8195	27.6882	24.7356	22.3620	5.8919	5.0088	4.1069	3.5650	2.6172
14	36.1233	31.3193	29.1412	26.1189	23.6848	6.5706	5.6287	4.6604	4.0747	3.0407
15	37.6973	32.8013	30.5779	27.4884	24.9958	7.2609	6.2621	5.2293	4.6009	3.4827
16	39.2523	34.2672	31.9999	28.8453	26.2962	7.9616	6.9077	5.8122	5.1422	3.9416
17	40.7902	35.7185	33.4087	30.1910	27.5871	8.6718	7.5642	6.4078	5.6972	4.4161
18	42.3124	37.1564	34.8053	31.5264	28.8693	9.3905	8.2307	7.0149	6.2648	4.9048
19	43.8202	38.5823	36.1909	32.8523	30.1435	10.1170	8.9065	7.6327	6.8440	5.4068
20	45.3147	39.9968	37.5662	34.1696	31.4104	10.8508	9.5908	8.2604	7.4338	5.9210
21	46.7970	41.4011	38.9322	35.4789	32.6706	11.5913	10.2829	8.8972	8.0337	6.4467
22	48.2679	42.7956	40.2894	36.7807	33.9244	12.3380	10.9823	9.5425	8.6427	6.9830
23	49.7282	44.1813	41.6384	38.0756	35.1725	13.0905	11.6886	10.1957	9.2604	7.5292
24	51.1786	45.5585	42.9798	39.3641	36.4150	13.8484	12.4012	10.8564	9.8862	8.0849
25	52.6196	46.9279	44.3141	40.6465	37.6525	14.6114	13.1197	11.5240	10.5197	8.6493
26	54.0519	48.2899	45.6417	41.9232	38.8851	15.3792	13.8439	12.1981	11.1602	9.2221
27	55.4760	49.6449	46.9629	43.1945	40.1133	16.1514	14.5734	12.8785	11.8076	9.8028
28	56.8922	50.9934	48.2782	44.4608	41.3371	16.9279	15.3079	13.5647	12.4613	10.3909
29	58.3011	52.3356	49.5879	45.7223	42.5570	17.7084	16.0471	14.2565	13.1211	10.9861
30	59.7030	53.6720	50.8922	46.9792	43.7730	18.4927	16.7908	14.9535	13.7867	11.5880
31	61.0983	55.0027	52.1914	48.2319	44.9853	19.2806	17.5387	15.6555	14.4578	12.1963
32	62.4872	56.3281	53.4858	49.4804	46.1943	20.0719	18.2908	16.3622	15.1340	12.8107
33	63.8701	57.6484	54.7755	50.7251	47.3999	20.8665	19.0467	17.0735	15.8153	13.4309
34	65.2472	58.9639	56.0609	51.9660	48.6024	21.6643	19.8063	17.7891	16.5013	14.0567
35	66.6188	60.2748	57.3421	53.2033	49.8018	22.4650	20.5694	18.5089	17.1918	14.6878
36	67.9851	61.5812	58.6192	54.4373	50.9985	23.2686	21.3359	19.2327	17.8867	15.3241
37	69.3464	62.8833	59.8925	55.6680	52.1923	24.0749	22.1056	19.9602	18.5858	15.9653
38	70.7028	64.1814	61.1621	56.8955	53.3835	24.8839	22.8785	20.6914	19.2889	16.6112
39	72.0546	65.4756	62.4281	58.1201	54.5722	25.6954	23.6543	21.4262	19.9959	17.2616
40	73.4019	66.7660	63.6907	59.3417	55.7585	26.5093	24.4330	22.1643	20.7065	17.9164
41	74.7449	68.0527	64.9501	60.5606	56.9424	27.3256	25.2145	22.9056	21.4208	18.5754
42	76.0837	69.3360	66.2062	61.7768	58.1240	28.1440	25.9987	23.6501	22.1385	19.2385
43	77.4186	70.6159	67.4593	62.9904	59.3035	28.9647	26.7854	24.3976	22.8595	19.9055
44	78.7495	71.8925	68.7095	64.2015	60.4809	29.7875	27.5746	25.1480	23.5837	20.5763
45	80.0767	73.1661	69.9568	65.4102	61.6562	30.6123	28.3662	25.9013	24.3110	21.2507
46	81.4003	74.4365	71.2014	66.6165	62.8296	31.4390	29.1601	26.6572	25.0413	21.9287
47	82.7204	75.7041	72.4433	67.8206	64.0011	32.2676	29.9562	27.4158	25.7746	22.6101
48	84.0371	76.9688	73.6826	69.0226	65.1708	33.0981	30.7545	28.1770	26.5106	23.2949
49	85.3505	78.2307	74.9195	70.2224	66.3386	33.9303	31.5549	28.9406	27.2493	23.9828
50	86.6608	79.4900	76.1539	71.4202	67.5048	34.7643	32.3574	29.7067	27.9907	24.6739

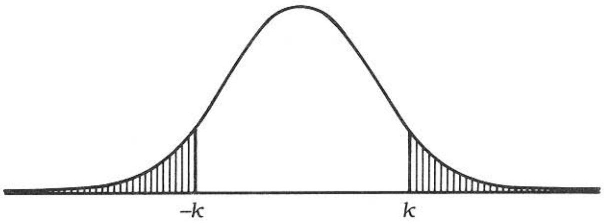
Valores seleccionados de *ji*-cuadrada (*Continuación*)

60	99.6072	91.9517	88.3794	83.2977	79.0819	43.1880	40.4817	37.4849	35.5345	31.7383
70	112.3169	104.2149	100.4252	95.0232	90.5312	51.7393	48.7576	45.4417	43.2752	39.0364
80	124.8392	116.3211	112.3288	106.6286	101.8795	60.3915	57.1532	53.5401	51.1719	46.5199
90	137.2084	128.2989	124.1163	118.1359	113.1453	69.1260	65.6466	61.7541	59.1963	54.1552
100	149.4493	140.1695	135.8067	129.5612	124.3421	77.9295	74.2219	70.0649	67.3276	61.9179

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed. 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.

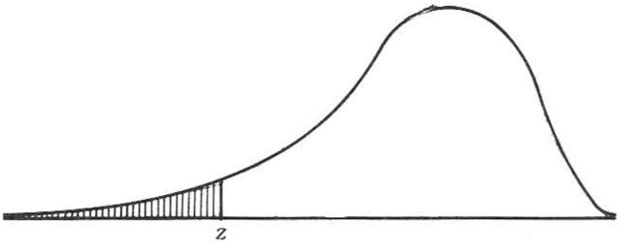
Porcentiles de la distribución normal estandarizada

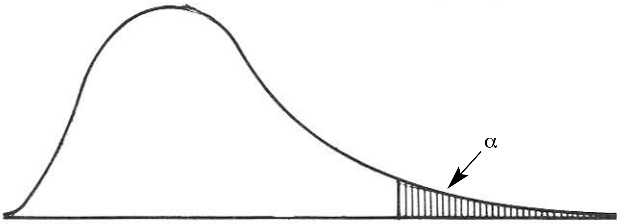
$P(Z \leq z)$	z
0.001	−3.0902
0.005	−2.5758
0.01	−2.3263
0.02	−2.0537
0.03	−1.8808
0.04	−1.7507
0.05	−1.6449
0.10	−1.2816
0.15	−1.0364
0.20	−0.8416
0.30	−0.5244
0.40	−0.2533
0.50	0
0.60	0.2533
0.70	0.5244
0.80	0.8414
0.85	1.0364
0.90	1.2816
0.95	1.6449
0.96	1.7507
0.97	1.8808
0.98	2.0537
0.99	2.3263
0.995	2.5758
0.999	3.0902



Valores críticos correspondientes a los niveles α, de ambos extremos, de la distribución normal estandarizada

$P(\lvert Z \rvert > K)$	K
0.001	3.2905
0.002	3.0902
0.005	2.80703
0.01	2.5758
0.02	2.3263
0.03	2.1701
0.04	2.0537
0.05	1.9600
0.06	1.8808
0.08	1.7507
0.10	1.6449
0.15	1.4395
0.20	1.2816
0.30	1.0364





Valores seleccionados de $t_\alpha(\nu)$.
En la distribución t de Student con ν grados de libertad la tabla proporciona el valor t_α(gl) tal que $P(t_\nu \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$.

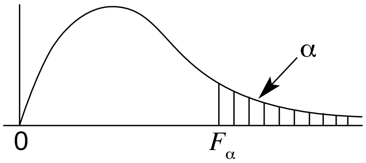
$\nu \backslash \alpha$	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005	0.00025
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	127.3213	318.3088	636.6192	1273.2393
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	14.0890	22.3271	31.5991	44.7046
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	7.4533	10.2145	12.9240	16.3263
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	5.5976	7.1732	8.6103	10.3063
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	5.8934	6.8688	7.9757
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.2076	5.9588	6.7883
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.0293	4.7853	5.4079	6.0818
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	3.8325	4.5008	5.0413	5.6174
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.7809	5.2907
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869	5.0490
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	3.4966	4.0247	4.4370	4.8633
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.4285	3.9296	4.3178	4.7165
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	3.8520	4.2208	4.5975
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	3.7874	4.1405	4.4992
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7329	4.0728	4.4166
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.2520	3.6862	4.0150	4.3463
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2225	3.6458	3.9652	4.2858
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.6105	3.9217	4.2332
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834	4.1870
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495	4.1461

Valores seleccionados de $t_\alpha(v)$ (*Continuación*)

$\nu \backslash \alpha$	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005	0.00025
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.5272	3.8193	4.1096
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3 1188	3.5050	3.7922	4.0770
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850	3.7677	4.0475
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4668	3.7454	4.0208
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502	3.7252	3.9965
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.4350	3.7066	3.9743
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210	3.6896	3.9539
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739	3.9351
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0380	3.3963	3.6594	3.9178
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852	3.6460	3.9017
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440	3.0221	3.3749	3.6335	3.8868
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.0150	3.3653	3.6218	3.8728
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.0082	3.3563	3.6109	3.8598
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.0020	3.3479	3.6007	3.8477
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	2.9960	3.3401	3.5912	3.8363
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	2.9905	3.3326	3.5822	3.8255
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154	2.9852	3.3256	3.5737	3.8155
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	2.9803	3.3190	3.5657	3.8059
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079	2.9756	3.3128	3.5581	3.7969
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	2.9712	3.3069	3.5510	3.7884
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012	2.9670	3.3013	3.5442	3.7804
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981	2.9630	3.2960	3.5378	3.7727
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951	2.9592	3.2909	3.5316	3.7654
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	2.9555	3.2861	3.5258	3.7585
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	2.9521	3.2815	3.5203	3.7519
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870	2.9488	3.2771	3.5150	3.7456
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846	2.9456	3.2729	3.5099	3.7397
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822	2.9426	3.2689	3.5051	3.7339
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800	2.9397	3.2651	3.5005	3.7284
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	2.9370	3.2614	3.4960	3.7232
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	2.9146	3.2317	3.4602	3.6807
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	2.8987	3.2108	3.4350	3.6509
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	2.8870	3.1953	3.4163	3.6289
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	2.8779	3.1833	3.4019	3.6119
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737	3.3905	3.5984
∞	0.6740	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291	3.480

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed., 3a, reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de $F^{m}_{n,\,0.01}$.



En la distribución de F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, la tabla da el valor $F^{m}_{n,\,0.01}$, tal que $P(F^{m}_{n} \geq F^{m}_{n,\,0.01}) = 0.01$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847	6083.317
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.408
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.133
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.452
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.963
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.790
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.538
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.734
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.178
10	10.044	7 559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.772
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.462
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.220
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	4.025
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.864
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.730
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.616
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.519
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.434
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.360
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.294
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.236
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.184
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.137
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.094
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	3.056
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	3.021
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.988
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.959
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.931
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.305	3.173	3.067	2.979	2.906
31	7.530	5.362	4.484	3.993	3.675	3.449	3.281	3.149	3.043	2.955	2.882
32	7.499	5.336	4.459	3.969	3.652	3.427	3.258	3.127	3.021	2.934	2.860
33	7.471	5.312	4.437	3.948	3.630	3.406	3.238	3.106	3.000	2.913	2.840
34	7.444	5.289	4.416	3.927	3.611	3.386	3.218	3.087	2.981	2.894	2.821
35	7.419	5.268	4.396	3.908	3.592	3.368	3.200	3.069	2.963	2.876	2.803
36	7.396	5.248	4.377	3.890	3.574	3.351	3.183	3.052	2.946	2.859	2.786
37	7.373	5.229	4.360	3.873	3.558	3.334	3.167	3.036	2.930	2.843	2.770
38	7.353	5.211	4.343	3.858	3.542	3.319	3.152	3.021	2.915	2.828	2.755
39	7.333	5.194	4.327	3.843	3.528	3.305	3.137	3.006	2.901	2.814	2.741
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.727
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698	2.625
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.559
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585	2.512
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551	2.478
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.845	2.715	2.611	2.524	2.451
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503	2.430
110	6.871	4.803	3.965	3.495	3.188	2.970	2.806	2.677	2.573	2.486	2.413
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.399
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.497	2.411	2.338
500	6.686	4.648	3.821	3.357	3.054	2.838	2.675	2.547	2.443	2.356	2.283

$n \backslash m$	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500
1	6106.321	6125.865	6142.674	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6359.501
2	99.416	99.422	99.428	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.497
3	27.052	26.983	26.924	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.148
4	14.374	14.307	14.249	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.486
5	9.888	9.825	9.770	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.042
6	7.718	7.657	7.605	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.902
7	6.469	6.410	6.359	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.671
8	5.667	5.609	5.559	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.880
9	5.111	5.055	5.005	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.332
10	4.706	4.650	4.601	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.930
11	4.397	4.342	4.293	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.624
12	4.155	4.100	4.052	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.382
13	3.960	3.905	3.857	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.187
14	3.800	3.745	3.698	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.026
15	3.666	3.612	3.564	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.891
16	3.553	3.498	3.451	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.775
17	3.455	3.401	3.353	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.676
18	3.371	3.316	3.269	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.589
19	3.297	3.242	3.195	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.512
20	3.231	3.177	3.130	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.445
21	3.173	3.119	3.072	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.384
22	3.121	3.067	3.019	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.329
23	3.074	3.020	2.973	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.280
24	3.032	2.977	2.930	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.235
25	2.993	2.939	2.892	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.194
26	2.958	2.904	2.857	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.156
27	2.926	2.871	2.824	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.122
28	2.896	2.842	2.795	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.090
29	2.868	2.814	2.767	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.060
30	2.843	2.789	2.742	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.032
31	2.820	2.765	2.718	2.677	2.525	2.445	2.362	2.275	2.183	2.086	2.006
32	2.798	2.744	2.696	2.655	2.503	2.423	2.340	2.252	2.160	2.062	1.982
33	2.777	2.723	2.676	2.634	2.482	2.402	2.319	2.231	2.139	2.040	1.959
34	2.758	2.704	2.657	2.615	2.463	2.383	2.299	2.211	2.118	2.019	1.938
35	2.740	2.686	2.639	2.597	2.445	2.364	2.281	2.193	2.099	2.000	1.918
36	2.723	2.669	2.622	2.580	2.428	2.347	2.263	2.175	2.082	1.981	1.899
37	2.707	2.653	2.606	2.564	2.412	2.331	2.247	2.159	2.065	1.964	1.881
38	2.692	2.638	2.591	2.549	2.397	2.316	2.232	2.143	2.049	1.947	1.864
39	2.678	2.624	2.577	2.535	2.382	2.302	2.217	2.128	2.034	1.932	1.848
40	2.665	2.611	2.563	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.833
50	2.562	2.508	2.461	2.419	2.265	2.183	2.098	2.007	1.909	1.803	1.713
60	2.496	2.442	2.394	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.633
70	2.450	2.395	2.348	2.306	2.150	2.067	1.980	1.886	1.785	1.672	1.574
80	2.415	2.361	2.313	2.271	2.115	2.032	1.944	1.849	1.746	1.630	1.530
90	2.389	2.334	2.286	2.244	2.088	2.004	1.916	1.820	1.716	1.598	1.494
100	2.368	2.313	2.265	2.223	2.067	1.983	1.893	1.797	1.692	1.572	1.466
110	2.350	2.296	2.248	2.206	2.049	1.965	1.875	1.778	1.672	1.551	1.442
120	2.336	2.282	2.234	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.421
200	2.275	2.220	2.172	2.129	1.971	1.886	1.794	1.694	1.583	1.453	1.328
500	2.220	2.166	2.117	2.075	1.915	1.829	1.735	1.633	1.517	1.377	1.232

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario,* 2a. ed., 3a, reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de $F^{m}_{n,\,0.025}$.

En la distribución de F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, la tabla proporciona valores $F^{m}_{n,\,0.025}$, tales que $P(F^{m}_{n} \geq F^{m}_{n,\,0.025}) = 0.025$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.848	937.111	948.217	956.656	963.285	968.627	973.025
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.407
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419	14.374
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844	8.794
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.568
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461	5.410
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.709
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.243
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964	3.912
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.665
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.474
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.321
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250	3.197
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147	3.095
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	3.008
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.934
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.870
18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866	2.814
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817	2.765
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.721
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735	2.682
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700	2.647
23	5.750	4.349	3.750	3.408	3.183	3.023	2.902	2.808	2.731	2.668	2.615
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.640	2.586
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.560
26	5.659	4.265	3.670	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.590	2.536
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568	2.514
28	5.610	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547	2.494
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.669	2.592	2.529	2.475
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.458
31	5.549	4.165	3.573	3.234	3.010	2.851	2.730	2.635	2.558	2.495	2.442
32	5.531	4.149	3.557	3.218	2.995	2.836	2.715	2.620	2.543	2.480	2.426
33	5.515	4.134	3.543	3.204	2.981	2.822	2.701	2.606	2.529	2.466	2.412
34	5.499	4.120	3.529	3.191	2.968	2.808	2.688	2.593	2.516	2.453	2.399
35	5.485	4.106	3.517	3.179	2.956	2.796	2.676	2.581	2.504	2.440	2.387
36	5.471	4.094	3.505	3.167	2.944	2.785	2.664	2.569	2.492	2.429	2.375
37	5.458	4.082	3.493	3.156	2.933	2.774	2.653	2.558	2.481	2.418	2.364
38	5.446	4.071	3.483	3.145	2.923	2.763	2.643	2.548	2.471	2.407	2.353
39	5.435	4.061	3.473	3.135	2.913	2.754	2.633	2.538	2.461	2.397	2.344
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.334
50	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317	2.263
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.216
70	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237	2.183
80	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.450	2.355	2.277	2.213	2.158
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194	2.140
100	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179	2.124
110	5.164	3.815	3.237	2.904	2.684	2.525	2.405	2.309	2.232	2.167	2.112
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	2.102
200	5.100	3.758	3.182	2.850	2.630	2.472	2.351	2.256	2.178	2.113	2.058
500	5.054	3.716	3.142	2.811	2.592	2.434	2.313	2.217	2.139	2.074	2.019

Valores seleccionados de $F^{m}_{n,\,0.025}$ (*Continuación*)

$n \backslash m$	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500
1	976.708	979.837	982.528	984.867	993.103	997.249	1001.414	1005.598	1009.800	1014.020	1017.240
2	39.415	39.421	39.427	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.496
3	14.337	14.304	14.277	14.253	14.167	14.124	14.081	14.037	13.992	13.947	13.913
4	8.751	8.715	8.684	8.657	8.560	8.511	8.461	8.411	8.360	8.309	8.270
5	6.525	6.488	6.456	6.428	6.329	6.278	6.227	6.175	6.123	6.069	6.028
6	5.366	5.329	5.297	5.269	5.168	5.117	5.065	5.012	4.959	4.904	4.862
7	4.666	4.628	4.596	4.568	4.467	4.415	4.362	4.309	4.254	4.199	4.156
8	4.200	4.162	4.130	4.101	3.999	3.947	3.894	3.840	3.784	3.728	3.684
9	3.868	3.831	3.798	3.769	3.667	3.614	3.560	3.505	3.449	3.392	3.347
10	3.621	3.583	3.550	3.522	3.419	3.365	3.311	3.255	3.498	3.140	3.094
11	3.430	3.392	3.359	3.330	3.226	3.173	3.118	3.061	3.004	2.944	2.898
12	3.277	3.239	3.206	3.177	3.073	3.019	2.963	2.906	2.848	2.787	2.740
13	3.153	3.115	3.082	3.053	2.948	2.893	2.837	2.780	2.720	2.659	2.611
14	3.050	3.012	2.979	2.949	2.844	2.789	2.732	2.674	2.614	2.552	2.503
15	2.963	2.925	2.891	2.862	2.756	2.701	2.644	2.585	2.524	2.461	2.411
16	2.889	2.851	2.817	2.788	2.681	2.625	2.568	2.509	2.447	2.383	2.333
17	2.825	2.786	2.753	2.723	2.616	2.560	2.502	2.442	2.380	2.315	2.264
18	2.769	2.730	2.696	2.667	2.559	2.503	2.445	2.384	2.321	2.256	2.204
19	2.720	2.681	2.647	2.617	2.509	2.452	2.394	2.333	2.270	2.203	2.150
20	2.676	2.637	2.603	2.573	2.464	2.408	2.349	2.287	2.223	2.156	2.103
21	2.637	2.598	2.564	2.534	2.425	2.368	2.308	2.246	2.182	2.114	2.060
22	2.602	2.563	2.528	2.498	2.389	2.331	2.272	2.210	2.145	2.076	2.021
23	2.570	2.531	2.497	2.466	2.357	2.299	2.239	2.176	2.111	2.041	1.986
24	2.541	2.502	2.468	2.437	2.327	2.269	2.209	2.146	2.080	2.010	1.954
25	2.515	2.476	2.441	2.411	2.300	2.242	2.182	2.118	2.052	1.981	1.924
26	2.491	2.451	2.417	2.387	2.276	2.217	2.157	2.093	2.026	1.954	1.897
27	2.469	2.429	2.395	2.364	2.253	2.195	2.133	2.069	2.002	1.930	1.872
28	2.448	2.409	2.374	2.344	2.232	2.174	2.112	2.048	1.980	1.907	1.848
29	2.430	2.390	2.355	2.325	2.213	2.154	2.092	2.028	1.959	1.886	1.827
30	2.412	2.372	2.338	2.307	2.195	2.136	2.074	2.009	1.940	1.866	1.806
31	2.396	2.356	2.321	2.291	2.178	2.119	2.057	1.991	1.922	1.848	1.788
32	2.381	2.341	2.306	2.275	2.163	2.103	2.041	1.975	1.905	1.831	1.770
33	2.366	2.327	2.292	2.261	2.148	2.088	2.026	1.960	1.890	1.815	1.753
34	2.353	2.313	2.278	2.248	2.135	2.075	2.012	1.946	1.875	1.799	1.737
35	2.341	2.301	2.266	2.235	2.122	2.062	1.999	1.932	1.861	1.785	1.722
36	2.329	2.289	2.254	2.223	2.110	2.049	1.986	1.919	1.848	1.772	1.708
37	2.318	2.278	2.243	2.212	2.098	2.038	1.974	1.907	1.836	1.759	1.695
38	2.307	2.267	2.232	2.201	2.088	2.027	1.963	1.896	1.824	1.747	1.682
39	2.298	2.257	2.222	2.191	2.077	2.017	1.953	1.885	1.813	1.735	1.670
40	2.288	2.248	2.213	2.182	2.068	2.007	1.943	1.875	1.803	1.724	1.659
50	2.216	2.176	2.140	2.109	1.993	1.931	1.866	1.796	1.721	1.639	1.569
60	2.169	2.129	2.093	2.061	1.944	1.882	1.815	1.744	1.667	1.581	1.507
70	2.136	2.095	2.059	2.028	1.910	1.847	1.779	1.707	1.628	1.539	1.463
80	2.111	2.071	2.035	2.003	1.884	1.820	1.752	1.679	1.599	1.508	1.428
90	2.092	2.051	2.015	1.983	1.864	1.800	1.731	1.657	1.576	1.483	1.401
100	2.077	2.036	2.000	1.968	1.849	1.784	1.715	1.640	1.558	1.463	1.378
110	2.065	2.024	1.988	1.955	1.836	1.771	1.701	1.626	1.543	1.447	1.359
120	2.055	2.014	1.977	1.945	1.825	1.760	1.690	1.614	1.530	1.433	1.343
200	2.010	1.969	1.932	1.900	1.778	1.712	1.640	1.562	1.474	1.370	1.269
500	1.971	1.929	1.892	1.859	1.736	1.669	1.596	1.515	1.423	1.311	1.192

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed., 3a, reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de $F^m_{n,\,0.05}$.

Para la distribución de F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, la tabla da el valor $F^m_{n,\,0.05}$ tal que $P(F^m_n \geq F^m_{n,\,0.05}) = 0.05$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882	242.983
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.763
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.936
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.635
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.507
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.456
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.413
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.374
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.340
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.310
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.283
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.259
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.236
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.216
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.198
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220	2.181
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.166
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.151
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.138
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.126
31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.523	2.409	2.323	2.255	2.199	2.153	2.114
32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189	2.142	2.103
33	4.139	3.285	2.892	2.659	2.503	2.389	2.303	2.235	2.179	2.133	2.093
34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.494	2.380	2.294	2.225	2.170	2.123	2.084
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114	2.075
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153	2.106	2.067
37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.470	2.356	2.270	2.201	2.145	2.098	2.059
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138	2.091	2.051
39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.456	2.342	2.255	2.187	2.131	2.084	2.044
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	2.038
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.986
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.952
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.928
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.910
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938	1.897
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.886
110	3.927	3.079	2.687	2.454	2.297	2.182	2.094	2.024	1.966	1.918	1.877
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910	1.869
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878	1.837
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850	1.808

Valores seleccionados de $F^{m}_{n,\,0.05}$ (*Continuación*)

$n \backslash m$	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500
1	243.906	244.690	245.364	245.950	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.059
2	19.413	19.419	19.424	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.494
3	8.745	8.729	8.715	8.703	8.660	8.639	8.617	8.594	8.572	8.549	8.532
4	5.912	5.891	5.873	5.858	5.803	5.774	5.746	5.717	5.688	5.658	5.635
5	4.678	4.655	4.636	4.619	4.558	4.527	4.496	4.464	4.431	4.398	4.373
6	4.000	3.976	3.956	3.938	3.874	3.841	3.808	3.774	3.740	3.705	3.678
7	3.575	3.550	3.529	3.511	3.445	3.410	3.376	3.340	3.304	3.267	3.239
8	3.284	3.259	3.237	3.218	3.150	3.115	3.079	3.043	3.005	2.967	2.937
9	3.073	3.048	3.025	3.006	2.936	2.900	2.864	2.826	2.787	2.748	2.717
10	2.913	2.887	2.865	2.845	2.774	2.737	2.700	2.661	2.621	2.580	2.548
11	2.788	2.761	2.739	2.719	2.646	2.609	2.570	2.531	2.490	2.448	2.415
12	2.687	2.660	2.637	2.617	2.544	2.505	2.466	2.426	2.384	2.341	2.307
13	2.604	2.577	2.554	2.533	2.459	2.420	2.380	2.339	2.297	2.252	2.218
14	2.534	2.507	2.484	2.463	2.388	2.349	2.308	2.266	2.223	2.178	2.142
15	2.475	2.448	2.424	2.403	2.328	2.288	2.247	2.204	2.160	2.114	2.078
16	2.425	2.397	2.373	2.352	2.276	2.235	2.194	2.151	2.106	2.059	2.022
17	2.381	2.353	2.329	2.308	2.230	2.190	2.148	2.104	2.058	2.011	1.973
18	2.342	2.314	2.290	2.269	2.191	2.150	2.107	2.063	2.017	1.968	1.929
19	2.308	2.280	2.256	2.234	2.155	2.114	2.071	2.026	1.980	1.930	1.891
20	2.278	2.250	2.225	2.203	2.124	2.082	2.039	1.994	1.946	1.896	1.856
21	2.250	2.222	2.197	2.176	2.096	2.054	2.010	1.965	1.916	1.866	1.825
22	2.226	2.198	2.173	2.151	2.071	2.028	1.984	1.938	1.889	1.838	1.797
23	2.204	2.175	2.150	2.128	2.048	2.005	1.961	1.914	1.865	1.813	1.771
24	2.183	2.155	2.130	2.108	2.027	1.984	1.939	1.892	1.842	1.790	1.747
25	2.165	2.136	2.111	2.089	2.007	1.964	1.919	1.872	1.822	1.768	1.725
26	2.148	2.119	2.094	2.072	1.990	1.946	1.901	1.853	1.803	1.749	1.705
27	2.132	2.103	2.078	2.056	1.974	1.930	1.884	1.836	1.785	1.731	1.686
28	2.118	2.089	2.064	2.041	1.959	1.915	1.869	1.820	1.769	1.714	1.669
29	2.104	2.075	2.050	2.027	1.945	1.901	1.854	1.806	1.754	1.698	1.653
30	2.092	2.063	2.037	2.015	1.932	1.887	1.841	1.792	1.740	1.683	1.637
31	2.080	2.051	2.026	2.003	1.920	1.875	1.828	1.779	1.726	1.670	1.623
32	2.070	2.040	2.015	1.992	1.908	1.864	1.817	1.767	1.714	1.657	1.610
33	2.060	2.030	2.004	1.982	1.898	1.853	1.806	1.756	1.702	1.645	1.597
34	2.050	2.021	1.995	1.972	1.888	1.843	1.795	1.745	1.691	1.633	1.585
35	2.041	2.012	1.986	1.963	1.878	1.833	1.786	1.735	1.681	1.623	1.574
36	2.033	2.003	1.977	1.954	1.870	1.824	1.776	1.726	1.671	1.612	1.564
37	2.025	1.995	1.969	1.946	1.861	1.816	1.768	1.717	1.662	1.603	1.553
38	2.017	1.988	1.962	1.939	1.853	1.808	1.760	1.708	1.653	1.594	1.544
39	2.010	1.981	1.954	1.931	1.846	1.800	1.752	1.700	1.645	1.585	1.535
40	2.003	1.974	1.948	1.924	1.839	1.793	1.744	1.693	1.637	1.577	1.526
50	1.952	1.921	1.895	1.871	1.784	1.737	1.687	1.634	1.576	1.511	1.457
60	1.917	1.887	1.860	1.836	1.748	1.700	1.649	1.594	1.534	1.467	1.409
70	1.893	1.863	1.836	1.812	1.722	1.674	1.622	1.566	1.505	1.435	1.374
80	1.875	1.845	1.817	1.793	1.703	1.654	1.602	1.545	1.482	1.411	1.347
90	1.861	1.830	1.803	1.779	1.688	1.639	1.586	1.528	1.465	1.391	1.326
100	1.850	1.819	1.792	1.768	1.676	1.627	1.573	1.515	1.450	1.376	1.308
110	1.841	1.810	1.783	1.758	1.667	1.617	1.563	1.504	1.439	1.363	1.293
120	1.834	1.803	1.775	1.750	1.659	1.608	1.554	1.495	1.429	1.352	1.280
200	1.801	1.769	1.742	1.717	1.623	1.572	1.516	1.455	1.386	1.302	1.221
500	1.772	1.740	1.712	1.686	1.592	1.539	1.482	1.419	1.345	1.255	1.159

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed., 3a, reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de $F^{m}_{n,\,0.10}$.

En la distribución de F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, la tabla proporciona valores $F^{m}_{n,\,0.10}$, tales que $P(F^{m}_{n,} \geq F^{m}_{n,\,0.10}) = 0.10$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195	60.473
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.401
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230	5.222
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.907
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.282
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937	2.920
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.684
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	2.519
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416	2.396
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323	2.302
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	2.227
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	2.166
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	2.116
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	2.073
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059	2.037
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028	2.005
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001	1.978
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977	1.954
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956	1.932
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937	1.913
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920	1.896
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904	1.880
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.890	1.866
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.877	1.853
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866	1.841
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855	1.830
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.703	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845	1.820
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836	1.811
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827	1.802
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819	1.794
31	2.875	2.482	2.270	2.136	2.042	1.973	1.920	1.877	1.842	1.812	1.787
32	2.869	2.477	2.263	2.129	2.036	1.967	1.913	1.870	1.835	1.805	1.780
33	2.864	2.471	2.258	2.123	2.030	1.961	1.907	1.864	1.828	1.799	1.773
34	2.859	2.466	2.252	2.118	2.024	1.955	1.901	1.858	1.822	1.793	1.767
35	2.855	2.461	2.247	2.113	2.019	1.950	1.896	1.852	1.817	1.787	1.761
36	2.850	2.456	2.243	2.108	2.014	1.945	1.891	1.847	1.811	1.781	1.756
37	2.846	2.452	2.238	2.103	2.009	1.940	1.886	1.842	1.806	1.776	1.751
38	2.842	2.448	2.234	2.099	2.005	1.935	1.881	1.838	1.802	1.772	1.746
39	2.839	2.444	2.230	2.095	2.001	1.931	1.877	1.833	1.797	1.767	1.741
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763	1.737
50	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.796	1.760	1.729	1.703
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707	1.680
70	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.804	1.760	1.723	1.691	1.665
80	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680	1.653
90	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.785	1.739	1.702	1.670	1.643
100	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663	1.636
110	2.752	2.351	2.134	1.997	1.900	1.828	1.772	1.727	1.689	1.657	1.630
120	2.748	2.347	2.130	1.992	1.896	1.824	1.767	1.722	1.684	1.652	1.625
200	2.731	2.329	2.111	1.973	1.876	1.804	1.747	1.701	1.663	1.631	1.603
500	2.716	2.313	2.095	1.956	1.859	1.786	1.729	1.683	1.644	1.612	1.583

Valores seleccionados de $F^{m}_{n,\,0.10}$ (*Continuación*)

$n \backslash m$	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500
1	60.705	60.903	61.073	61.220	61.740	62.002	62.265	62.529	62.794	63.061	63.264
2	9.408	9.415	9.420	9.425	9.441	9.450	9.458	9.466	9.475	9.483	9.489
3	5.216	5.210	5.205	5.200	5.184	5.176	5.168	5.160	5.151	5.143	5.136
4	3.896	3.886	3.878	3.870	3.844	3.831	3.817	3.804	3.790	3.775	3.764
5	3.268	3.257	3.247	3.238	3.207	3.191	3.174	3.157	3.140	3.123	3.109
6	2.905	2.892	2.881	2.871	2.836	2.818	2.800	2.781	2.762	2.742	2.727
7	2.668	2.654	2.643	2.632	2.595	2.575	2.555	2.535	2.514	2.493	2.476
8	2.502	2.488	2.475	2.464	2.425	2.404	2.383	2.361	2.339	2.316	2.298
9	2.379	2.364	2.351	2.340	2.298	2.277	2.255	2.232	2.208	2.184	2.165
10	2.284	2.269	2.255	2.244	2.201	2.178	2.155	2.132	2.107	2.082	2.062
11	2.209	2.193	2.179	2.167	2.123	2.100	2.076	2.052	2.026	2.000	1.979
12	2.147	2.131	2.117	2.105	2.060	2.036	2.011	1.986	1.960	1.932	1.911
13	2.097	2.080	2.066	2.053	2.007	1.983	1.958	1.931	1.904	1.876	1.853
14	2.054	2.037	2.022	2.010	1.962	1.938	1.912	1.885	1.857	1.828	1.805
15	2.017	2.000	1.985	1.972	1.924	1.899	1.873	1.845	1.817	1.787	1.763
16	1.985	1.968	1.953	1.940	1.891	1.866	1.839	1.811	1.782	1.751	1.726
17	1.958	1.940	1.925	1.912	1.862	1.836	1.809	1.781	1.751	1.719	1.694
18	1.933	1.916	1.900	1.887	1.837	1.810	1.783	1.754	1.723	1.691	1.665
19	1.912	1.894	1.878	1.865	1.814	1.787	1.759	1.730	1.699	1.666	1.639
20	1.892	1.875	1.859	1.845	1.794	1.767	1.738	1.708	1.677	1.643	1.616
21	1.875	1.857	1.841	1.827	1.776	1.748	1.719	1.689	1.657	1.623	1.595
22	1.859	1.841	1.825	1.811	1.759	1.731	1.702	1.671	1.639	1.604	1.576
23	1.845	1.827	1.811	1.796	1.744	1.716	1.686	1.655	1.622	1.587	1.558
24	1.832	1.814	1.797	1.783	1.730	1.702	1.672	1.641	1.607	1.571	1.542
25	1.820	1.802	1.785	1.771	1.718	1.689	1.659	1.627	1.593	1.557	1.527
26	1.809	1.790	1.774	1.760	1.706	1.677	1.647	1.615	1.581	1.544	1.514
27	1.799	1.780	1.764	1.749	1.695	1.666	1.636	1.603	1.569	1.531	1.501
28	1.790	1.771	1.754	1.740	1.685	1.656	1.625	1.592	1.558	1.520	1.489
29	1.781	1.762	1.745	1.731	1.676	1.647	1.616	1.583	1.547	1.509	1.478
30	1.773	1.754	1.737	1.722	1.667	1.638	1.606	1.573	1.538	1.499	1.467
31	1.765	1.746	1.729	1.714	1.659	1.630	1.598	1.565	1.529	1.489	1.457
32	1.758	1.739	1.722	1.707	1.652	1.622	1.590	1.556	1.520	1.481	1.448
33	1.751	1.732	1.715	1.700	1.645	1.615	1.583	1.549	1.512	1.472	1.439
34	1.745	1.726	1.709	1.694	1.638	1.608	1.576	1.541	1.505	1.464	1.431
35	1.739	1.720	1.703	1.688	1.632	1.601	1.569	1.535	1.497	1.457	1.423
36	1.734	1.715	1.697	1.682	1.626	1.595	1.563	1.528	1.491	1.450	1.415
37	1.729	1.709	1.692	1.677	1.620	1.590	1.557	1.522	1.484	1.443	1.408
38	1.724	1.704	1.687	1.672	1.615	1.584	1.551	1.516	1.478	1.437	1.402
39	1.719	1.700	1.682	1.667	1.610	1.579	1.546	1.511	1.473	1.431	1.395
40	1.715	1.695	1.678	1.662	1.605	1.574	1.541	1.506	1.467	1.425	1.389
50	1.680	1.660	1.643	1.627	1.568	1.536	1.502	1.465	1.424	1.379	1.340
60	1.657	1.637	1.619	1.603	1.543	1.511	1.476	1.437	1.395	1.348	1.306
70	1.641	1.621	1.603	1.587	1.526	1.493	1.457	1.418	1.374	1.325	1.281
80	1.629	1.609	1.590	1.574	1.513	1.479	1.443	1.403	1.358	1.307	1.261
90	1.620	1.599	1.581	1.564	1.503	1.468	1.432	1.391	1.346	1.293	1.245
100	1.612	1.592	1.573	1.557	1.494	1.460	1.423	1.382	1.336	1.282	1.232
110	1.606	1.585	1.567	1.550	1.488	1.453	1.415	1.374	1.32i	1.272	1.221
120	1.601	1.580	1.562	1.545	1.482	1.447	1.409	1.368	1.320	1.265	1.212
200	1.579	1.558	1.539	1.522	1.458	1.422	1.383	1.339	1.289	1.228	1.168
500	1.559	1.537	1.518	1.501	1.435	1.399	1.358	1.313	1.260	1.194	1.122

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario,* 2a. ed., 3a, reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Mann Whitney.

Para $T_+ = \sum_{i=1}^{n} R(X_i) - \frac{n(n+1)}{2}$, la tabla de valores $T_\alpha(n, m)$ tales que: $P(T_+ > T_\alpha(n, m)) = \alpha$; ($\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.10$) para diferentes valores de n y m, los tamaños de las muestras. Para obtener valores en la cola izquierda use: $T_{1-\alpha}(n, m) = nm - T_\alpha(n, m)$

		m																		
n	*α*	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0.001	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
	0.005	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	37	39
	0.010	4	6	8	10	1 2	14	16	18	20	22	24	25	27	29	31	33	35	36	38
	0.025	4	6	8	10	12	14	15	17	19	21	22	24	26	28	30	31	33	35	37
	0.050	4	6	8	9	11	13	14	16	18	20	21	23	24	26	28	30	31	33	35
	0.100	4	5	7	8	10	12	13	15	16	18	19	21	23	24	26	27	29	30	32
3	0.001	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	50	53	56	59
	0.005	6	9	12	15	18	21	24	26	29	32	34	37	40	42	45	48	51	53	56
	0.010	6	9	12	15	18	20	23	25	28	31	33	36	39	41	44	46	49	52	54
	0.025	6	9	12	14	16	19	21	24	26	29	31	34	36	39	41	44	46	49	51
	0.050	6	8	11	13	15	18	20	22	25	27	30	32	34	37	39	41	44	46	48
	0.100	5	7	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	34	36	38	40	42	44
4	0.001	8	12	16	20	24	28	32	36	39	43	47	50	54	58	61	65	68	72	76
	0.005	8	12	16	20	23	27	30	34	37	41	44	48	51	54	58	61	65	68	71
	0.010	8	12	16	19	22	26	29	32	36	39	42	46	49	51	56	59	62	66	69
	0.025	8	12	15	18	21	24	27	31	34	37	40	43	46	49	52	56	59	62	65
	0.050	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	49	52	55	58	61
	0.100	7	10	12	15	18	21	24	26	29	32	35	38	40	43	46	49	51	54	57
5	0.001	10	15	20	25	30	35	39	43	48	52	57	61	66	70	74	79	83	87	92
	0.005	10	15	20	24	28	33	37	41	45	49	53	57	62	66	70	74	78	82	86
	0.010	10	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83
	0.025	10	14	18	22	26	29	33	37	41	45	48	52	56	60	64	67	71	75	79
	0.050	9	13	17	20	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60	64	67	71	74
	0.100	8	12	15	19	22	26	29	32	36	39	42	46	49	52	56	59	62	66	69

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate, *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed., 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Mann Whitney (*Continuación*)

6	0.001	12	18	24	30	36	42	46	51	56	61	67	72	77	82	87	92	97	102	107
	0.005	12	18	23	28	33	38	43	48	53	58	62	67	72	77	82	86	91	96	101
	0.010	12	18	22	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	74	79	83	88	93	97
	0.025	12	16	21	26	30	35	39	43	48	52	57	61	68	70	74	79	83	88	92
	0.050	11	15	20	24	28	33	37	41	45	49	54	58	62	66	70	75	79	83	87
	0.100	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	73	77	81
7	0.001	14	21	28	35	41	47	53	59	64	70	76	82	88	94	100	105	111	117	123
	0.005	14	21	27	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93	99	104	110	115
	0.010	14	20	26	31	37	42	48	53	58	64	69	74	80	85	90	95	101	106	111
	0.025	14	19	24	29	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
	0.050	13	18	23	28	33	37	42	47	52	57	62	66	71	76	81	85	90	95	100
	0.100	12	16	21	26	30	35	39	44	48	53	57	62	66	71	75	80	84	89	93
8	0.001	16	24	32	39	46	53	59	66	73	79	86	92	99	105	112	118	125	131	138
	0.005	16	24	30	37	43	49	56	62	68	74	80	86	93	99	105	111	117	123	129
	0.010	16	23	29	35	41	48	54	60	66	72	78	83	89	95	101	107	113	119	125
	0.025	15	21	27	33	39	45	50	56	62	68	73	79	85	90	96	101	107	113	118
	0.050	14	20	26	31	37	42	48	53	59	64	69	75	80	86	91	96	102	107	112
	0.100	13	18	24	29	34	39	44	49	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
9	0.001	18	27	36	43	51	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131	138	145	153
	0.005	18	26	34	41	48	55	62	69	76	82	89	96	103	110	116	123	130	137	143
	0.010	18	25	32	39	46	53	60	66	73	80	86	93	99	106	112	119	125	132	139
	0.025	17	24	31	37	43	50	56	63	69	75	81	88	94	100	106	113	119	125	131
	0.050	16	22	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125
	0.100	15	21	26	32	38	44	49	55	61	67	72	78	84	89	95	100	106	112	117
10	0.001	20	30	39	48	56	64	73	81	89	97	105	112	120	128	136	144	152	160	167
	0.005	20	29	37	45	53	60	68	76	83	91	98	105	113	120	128	135	142	150	157
	0.010	20	28	36	43	51	58	66	73	80	87	95	102	109	116	123	131	138	145	152
	0.025	19	26	34	41	48	55	62	69	76	83	90	96	103	110	117	124	131	137	144
	0.050	18	25	32	38	45	52	59	65	72	78	85	92	98	105	111	118	124	131	137
	0.100	16	23	29	36	42	48	55	61	67	73	80	86	92	98	105	111	117	123	129

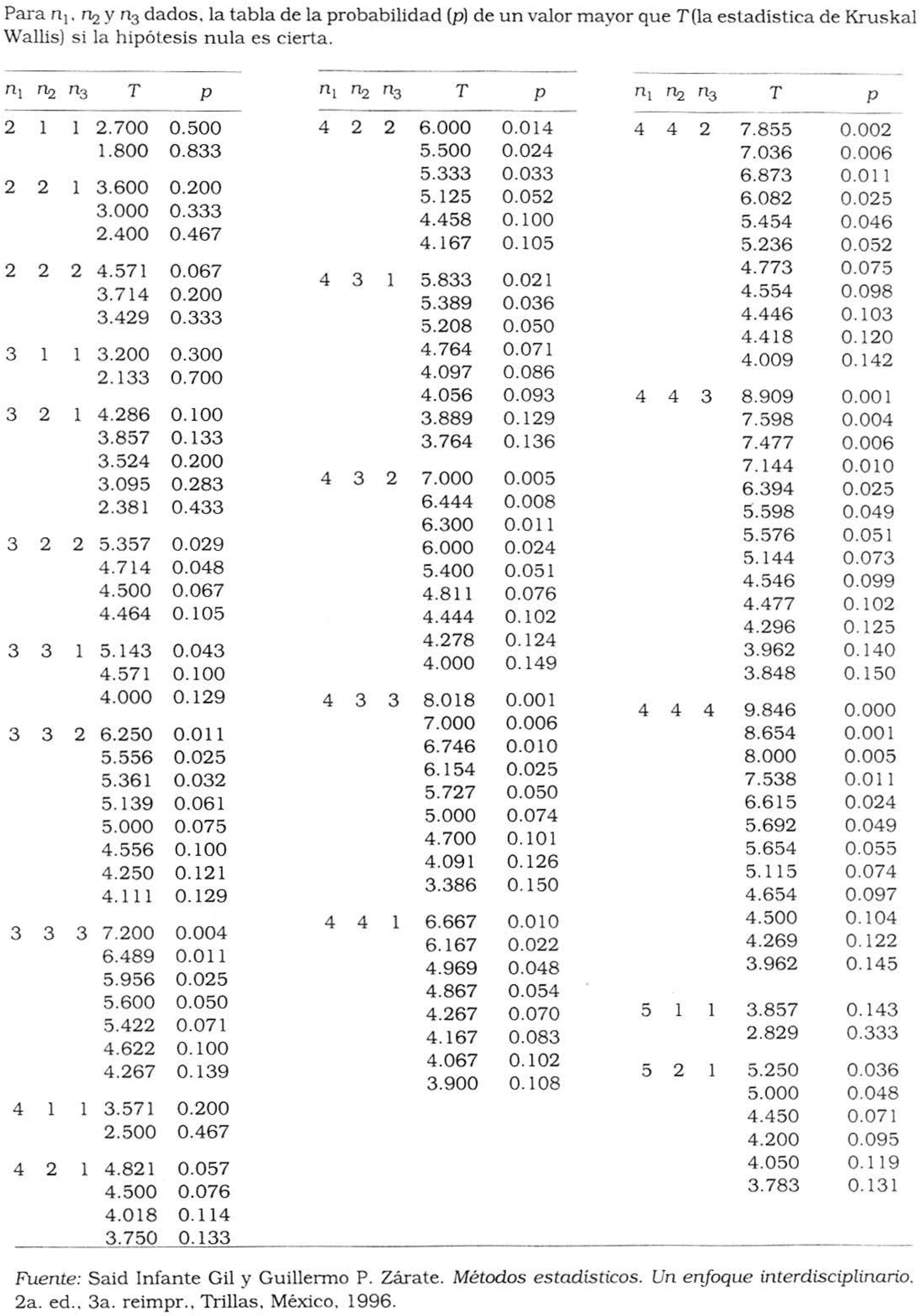
Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Mann Whitney (*Continuación*)

		m																		
n	α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	0.001	22	33	43	52	61	70	79	88	97	105	114	122	131	140	148	157	165	174	182
	0.005	22	32	41	49	58	66	74	82	91	99	107	115	123	131	139	147	155	163	171
	0.010	22	31	39	47	56	64	72	80	87	95	103	111	119	127	134	142	150	158	166
	0.025	21	29	37	45	52	60	68	75	83	90	98	105	113	120	128	135	142	150	157
	0.050	20	27	35	42	49	57	64	71	78	86	93	100	107	114	121	129	136	143	150
	0.100	18	25	32	39	46	53	60	67	73	80	87	94	101	107	114	121	128	135	141
12	0.001	24	36	47	57	67	76	86	95	105	114	123	132	142	151	160	169	178	187	197
	0.005	24	34	44	53	62	71	80	89	98	107	116	124	133	142	150	159	168	176	185
	0.010	24	33	42	51	60	69	78	86	95	103	112	120	129	137	145	154	162	171	179
	0.025	22	31	40	48	57	65	73	81	90	98	106	114	122	130	138	146	154	162	170
	0.050	21	30	38	46	54	62	69	77	85	93	101	108	116	124	131	139	147	155	162
	0.100	19	27	35	42	50	57	65	72	80	87	94	102	109	116	124	131	138	146	153
13	0.001	26	39	50	61	72	82	92	102	112	122	132	142	152	162	172	182	192	201	211
	0.005	26	37	48	57	67	77	86	96	105	115	124	134	143	152	162	171	180	189	199
	0.010	25	36	46	55	65	74	83	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192
	0.025	24	34	43	52	61	70	79	88	96	105	114	123	131	140	148	157	166	174	183
	0.050	23	32	41	49	58	66	75	83	92	100	108	117	125	133	142	150	158	166	175
	0.100	21	29	38	46	54	62	70	78	86	94	102	110	118	126	133	141	149	157	165
14	0.001	28	42	54	66	77	88	99	110	120	131	142	152	163	173	184	194	205	215	225
	0.005	28	40	51	62	72	82	93	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193	202	212
	0.010	27	39	49	59	70	80	89	99	109	119	129	138	148	158	167	177	186	196	206
	0.025	26	36	46	56	66	75	85	94	103	113	122	131	140	150	159	168	177	187	196
	0.050	24	34	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	160	169	178	187
	0.100	22	31	40	49	58	66	75	84	92	101	109	118	126	135	143	152	160	168	177
15	0.001	30	45	58	70	82	94	105	117	128	140	151	162	173	184	196	207	218	229	240
	0.005	30	42	54	66	77	88	99	110	120	131	142	152	163	173	184	194	205	215	226
	0.010	29	41	52	63	74	85	95	106	116	127	137	147	158	168	178	188	199	209	219
	0.025	28	39	49	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	169	179	189	199	209
	0.050	26	37	47	56	66	76	86	95	105	114	124	133	143	152	162	171	181	190	199
	0.100	24	34	43	52	62	71	80	89	98	107	116	126	135	144	153	162	171	180	189

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Mann Whitney (*Continuación*)

16	0.001	32	48	61	77	87	100	112	124	136	148	160	172	184	196	207	219	231	243	254
	0.005	32	45	58	74	82	93	105	116	128	139	150	162	173	184	195	206	217	229	240
	0.010	31	44	56	72	79	90	101	112	123	134	145	156	167	178	189	200	211	221	232
	0.025	30	41	52	68	74	85	96	106	117	128	138	148	159	169	180	190	201	211	221
	0.050	28	39	49	65	70	81	91	101	111	121	131	142	152	162	172	182	192	202	212
	0.100	26	36	46	62	66	75	85	95	105	114	124	133	143	153	162	172	181	191	200
17	0.001	34	50	65	79	92	105	118	131	144	157	169	182	194	207	219	231	244	256	269
	0.005	34	48	61	74	86	99	111	123	135	147	159	171	183	194	206	218	230	241	253
	0.010	33	46	59	71	83	95	107	119	131	142	154	165	177	188	200	211	223	234	246
	0.025	31	44	56	67	79	90	101	113	124	135	146	157	168	179	190	201	212	223	234
	0.050	30	41	52	64	75	85	96	107	118	129	139	150	160	171	182	192	203	213	224
	0.100	27	38	49	59	70	80	90	100	111	121	131	141	152	162	172	182	192	202	212
18	0.001	36	53	68	83	97	111	125	138	152	165	178	191	205	218	231	244	257	270	283
	0.005	36	51	65	78	91	104	117	130	142	155	168	180	193	205	217	230	242	254	267
	0.010	35	49	62	75	88	101	113	125	138	150	162	174	186	199	211	223	235	247	259
	0.025	33	46	59	71	83	95	107	119	131	142	154	166	177	189	201	212	224	235	247
	0.050	31	44	55	67	79	90	102	113	124	136	147	158	169	181	192	203	214	225	236
	0.100	29	40	51	62	73	84	95	106	117	128	138	149	160	171	181	192	203	213	224
19	0.001	38	56	72	87	102	117	131	145	160	174	187	201	215	229	243	256	270	283	297
	0.005	37	53	68	82	96	110	123	137	150	163	176	189	202	215	229	241	254	267	280
	0.010	36	52	66	79	93	106	119	132	145	158	171	183	196	209	221	234	247	259	272
	0.025	35	49	62	75	88	100	113	125	137	150	162	174	187	199	211	223	235	247	260
	0.050	33	46	58	71	83	95	107	119	131	143	155	166	178	190	202	213	225	237	249
	0.100	30	42	54	66	77	89	100	112	123	135	146	157	168	180	191	202	213	225	236
20	0.001	40	59	76	92	107	123	138	153	167	182	197	211	225	240	254	269	283	297	311
	0.005	39	56	71	86	101	115	129	143	157	171	185	199	212	226	240	253	267	280	294
	0.010	38	54	69	83	97	111	125	139	152	166	179	192	206	219	232	246	259	272	285
	0.025	37	51	65	79	92	105	118	131	144	157	170	183	196	209	221	234	247	260	272
	0.050	35	48	61	74	87	100	112	125	137	150	162	175	187	199	212	224	236	249	261
	0.100	32	44	57	69	81	93	105	117	129	141	153	165	177	189	200	212	224	236	248

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Kruskal Wallis para 3 tratamientos y tamaños de muestra o iguales que cinco.



Para n_1, n_2 y n_3 dados, la tabla de la probabilidad (*p*) de un valor mayor que *T* (la estadística de Kruskal Wallis) si la hipótesis nula es cierta.

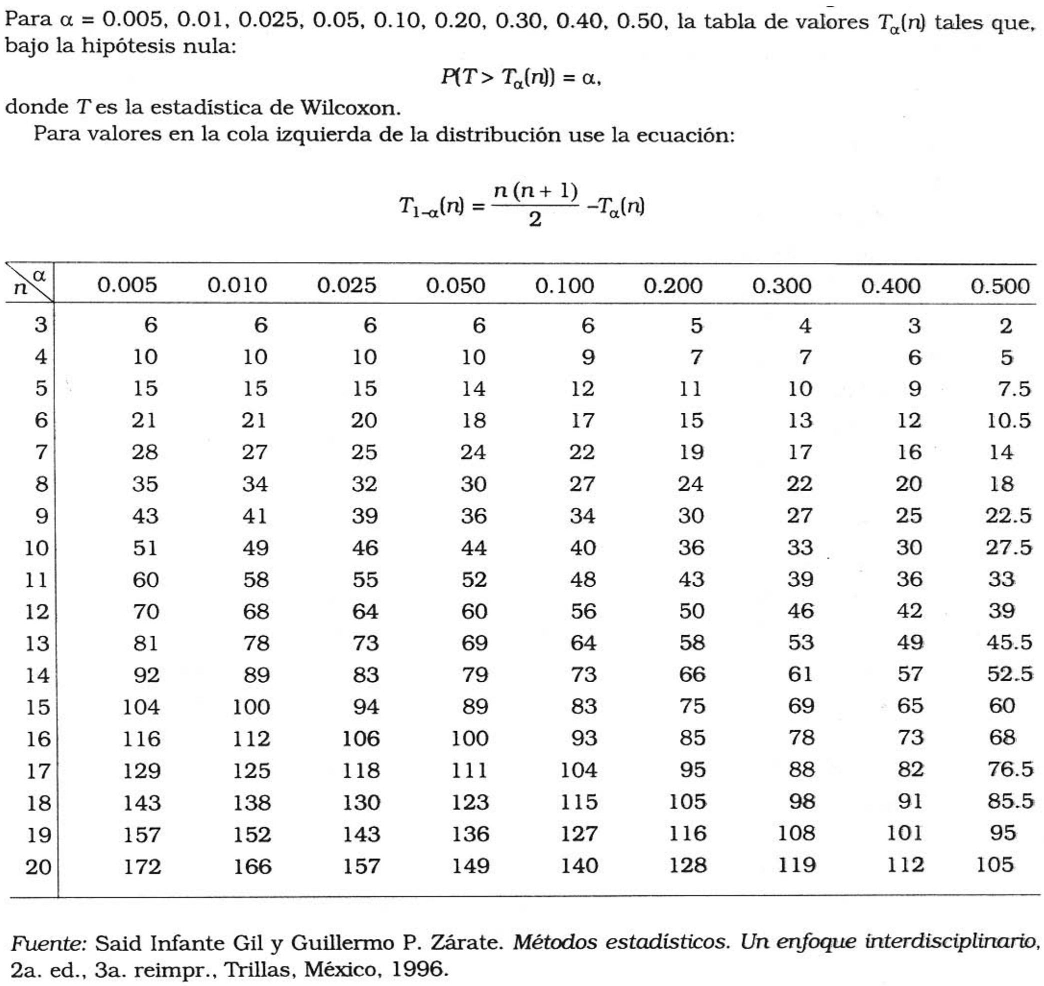
n_1	n_2	n_3	T	p
2	1	1	2.700	0.500
			1.800	0.833
2	2	1	3.600	0.200
			3.000	0.333
			2.400	0.467
2	2	2	4.571	0.067
			3.714	0.200
			3.429	0.333
3	1	1	3.200	0.300
			2.133	0.700
3	2	1	4.286	0.100
			3.857	0.133
			3.524	0.200
			3.095	0.283
			2.381	0.433
3	2	2	5.357	0.029
			4.714	0.048
			4.500	0.067
			4.464	0.105
3	3	1	5.143	0.043
			4.571	0.100
			4.000	0.129
3	3	2	6.250	0.011
			5.556	0.025
			5.361	0.032
			5.139	0.061
			5.000	0.075
			4.556	0.100
			4.250	0.121
			4.111	0.129
3	3	3	7.200	0.004
			6.489	0.011
			5.956	0.025
			5.600	0.050
			5.422	0.071
			4.622	0.100
			4.267	0.139
4	1	1	3.571	0.200
			2.500	0.467
4	2	1	4.821	0.057
			4.500	0.076
			4.018	0.114
			3.750	0.133
4	2	2	6.000	0.014
			5.500	0.024
			5.333	0.033
			5.125	0.052
			4.458	0.100
			4.167	0.105
4	3	1	5.833	0.021
			5.389	0.036
			5.208	0.050
			4.764	0.071
			4.097	0.086
			4.056	0.093
			3.889	0.129
			3.764	0.136
4	3	2	7.000	0.005
			6.444	0.008
			6.300	0.011
			6.000	0.024
			5.400	0.051
			4.811	0.076
			4.444	0.102
			4.278	0.124
			4.000	0.149
4	3	3	8.018	0.001
			7.000	0.006
			6.746	0.010
			6.154	0.025
			5.727	0.050
			5.000	0.074
			4.700	0.101
			4.091	0.126
			3.386	0.150
4	4	1	6.667	0.010
			6.167	0.022
			4.969	0.048
			4.867	0.054
			4.267	0.070
			4.167	0.083
			4.067	0.102
			3.900	0.108
4	4	2	7.855	0.002
			7.036	0.006
			6.873	0.011
			6.082	0.025
			5.454	0.046
			5.236	0.052
			4.773	0.075
			4.554	0.098
			4.446	0.103
			4.418	0.120
			4.009	0.142
4	4	3	8.909	0.001
			7.598	0.004
			7.477	0.006
			7.144	0.010
			6.394	0.025
			5.598	0.049
			5.576	0.051
			5.144	0.073
			4.546	0.099
			4.477	0.102
			4.296	0.125
			3.962	0.140
			3.848	0.150
4	4	4	9.846	0.000
			8.654	0.001
			8.000	0.005
			7.538	0.011
			6.615	0.024
			5.692	0.049
			5.654	0.055
			5.115	0.074
			4.654	0.097
			4.500	0.104
			4.269	0.122
			3.962	0.145
5	1	1	3.857	0.143
			2.829	0.333
5	2	1	5.250	0.036
			5.000	0.048
			4.450	0.071
			4.200	0.095
			4.050	0.119
			3.783	0.131

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate. *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario.* 2a. ed., 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Kruskal Wallis (*Continuación*)

n_1	n_2	n_3	T	p
5	2	2	6.533	0.008
			6.133	0.013
			6.000	0.019
			5.693	0.029
			5.160	0.034
			5.040	0.056
			4.373	0.090
			4.293	0.122
			4.093	0.148
5	3	1	6.400	0.012
			6.044	0.020
			5.760	0.028
			4.960	0.048
			4.871	0.052
			4.551	0.075
			4.018	0.095
			3.840	0.123
			3.804	0.131
			3.484	0.135
			3.378	0.143
5	3	2	7.636	0.002
			6.949	0.006
			6.822	0.010
			6.004	0.025
			5.251	0.049
			5.106	0.052
			4.727	0.085
			4.494	0.101
			3.942	0.146
5	3	3	8.727	0.001
			7.515	0.005
			7.079	0.009
			6.982	0.011
			6.303	0.026
			5.648	0.049
			5.515	0.051
			4.533	0.097
			4.412	0.109
			4.194	0.126
			3.927	0.149
5	4	1	7.364	0.005
			6.840	0.011
			5.776	0.025
			4.986	0.044
			4.860	0.055
			3.987	0.098
			3.960	0.102
			3.524	0.146
5	4	2	8.114	0.001
			7.573	0.005
			7.118	0.010
			6.041	0.025
			5.268	0.050
			4.541	0.098
			4.518	0.101
			3.818	0.148
5	4	3	8.503	0.001
			7.906	0.005
			7.445	0.010
			6.410	0.025
			5.631	0.050
			4.549	0.099
			4.523	0.103
			3.831	0.150
5	4	4	8.997	0.001
			8.140	0.005
			7.760	0.009
			7.714	0.011
			5.618	0.050
			4.619	0.100
			4.170	0.125
			3.910	0.146
5	5	1	8.182	0.002
			7.746	0.005
			7.309	0.009
			6.836	0.011
			5.127	0.046
			4.909	0.053
			4.109	0.086
			4.036	0.105
5	5	2	8.685	0.001
			8.131	0.005
			7.269	0.010
			5.338	0.047
			5.246	0.051
			4.508	0.100
			4.231	0.124
			3.862	0.150
5	5	3	9.055	0.001
			8.237	0.005
			7.543	0.010
			6.488	0.025
			5.706	0.046
			5.626	0.051
			4.545	0.100
			3.807	0.147
5	5	4	9.323	0.001
			8.371	0.005
			7.766	0.010
			6.671	0.025
			5.643	0.050
			5.023	0.075
			4.520	0.101
			3.883	0.148
5	5	5	9.680	0.001
			8.720	0.005
			7.980	0.011
			6.740	0.025
			5.780	0.049
			5.660	0.051
			4.560	0.100
			3.860	0.150

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de rangos con signo de Wilcoxon.



Para α = 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, la tabla de valores $T_\alpha(n)$ tales que, bajo la hipótesis nula:

$$P(T > T_\alpha(n)) = \alpha,$$

donde T es la estadística de Wilcoxon.

Para valores en la cola izquierda de la distribución use la ecuación:

$$T_{1-\alpha}(n) = \frac{n\,(n+1)}{2} - T_\alpha(n)$$

$n \backslash \alpha$	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500
3	6	6	6	6	6	5	4	3	2
4	10	10	10	10	9	7	7	6	5
5	15	15	15	14	12	11	10	9	7.5
6	21	21	20	18	17	15	13	12	10.5
7	28	27	25	24	22	19	17	16	14
8	35	34	32	30	27	24	22	20	18
9	43	41	39	36	34	30	27	25	22.5
10	51	49	46	44	40	36	33	30	27.5
11	60	58	55	52	48	43	39	36	33
12	70	68	64	60	56	50	46	42	39
13	81	78	73	69	64	58	53	49	45.5
14	92	89	83	79	73	66	61	57	52.5
15	104	100	94	89	83	75	69	65	60
16	116	112	106	100	93	85	78	73	68
17	129	125	118	111	104	95	88	82	76.5
18	143	138	130	123	115	105	98	91	85.5
19	157	152	143	136	127	116	108	101	95
20	172	166	157	149	140	128	119	112	105

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate. *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*, 2a. ed., 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.

Valores seleccionados de la distribución de la estadística de Friedman.

La tabla presenta, para *t* tratamientos y *b* bloques, la probabilidad (*p*) de un valor mayor o igual que *T* (la estadística de Friedman) si la hipótesis nula es cierta.

t	*b*	*T*	*p*
3	2	4.000	0.167
		3.000	0.500
3	3	6.000	0.028
		4.667	0.194
		2.667	0.361
3	4	8.000	0.005
		6.500	0.042
		6.000	0.069
		4.500	0.125
		3.500	0.273
3	5	10.000	0.001
		8.400	0.008
		7.600	0.024
		6.400	0.039
		5.200	0.093
		4.800	0.124
		3.600	0.182
		2.800	0.367
3	6	10.330	0.002
		9.000	0.008
		8.330	0.012
		7.000	0.029
		6.330	0.052
		5.330	0.072
		4.330	0.142
3	7	11.143	0.001
		10.286	0.004
		8.857	0.008
		8.000	0.016
		6.000	0.051
		4.571	0.112
3	8	12.000	0.001
		9.750	0.005
		9.000	0.010
		6.250	0.047
		5.250	0.079
		4.750	0.120
3	9	11.556	0.001
		9.556	0.006
		8.667	0.010
		6.222	0.048
		6.000	0.057
		5.556	0.069
		4.667	0.107
4	2	6.000	0.042
		5.400	0.167
		4.800	0.208
4	3	9.000	0.002
		8.200	0.017
		7.000	0.054
		6.600	0.075
		5.800	0.148
4	4	11.100	0.001
		9.900	0.006
		9.300	0.012
		7.500	0.052
		6.300	0.094
		6.000	0.105
		5.700	0.141

Fuente: Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate. *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario,* 2a. ed., 3a. reimpr., Trillas, México, 1996.

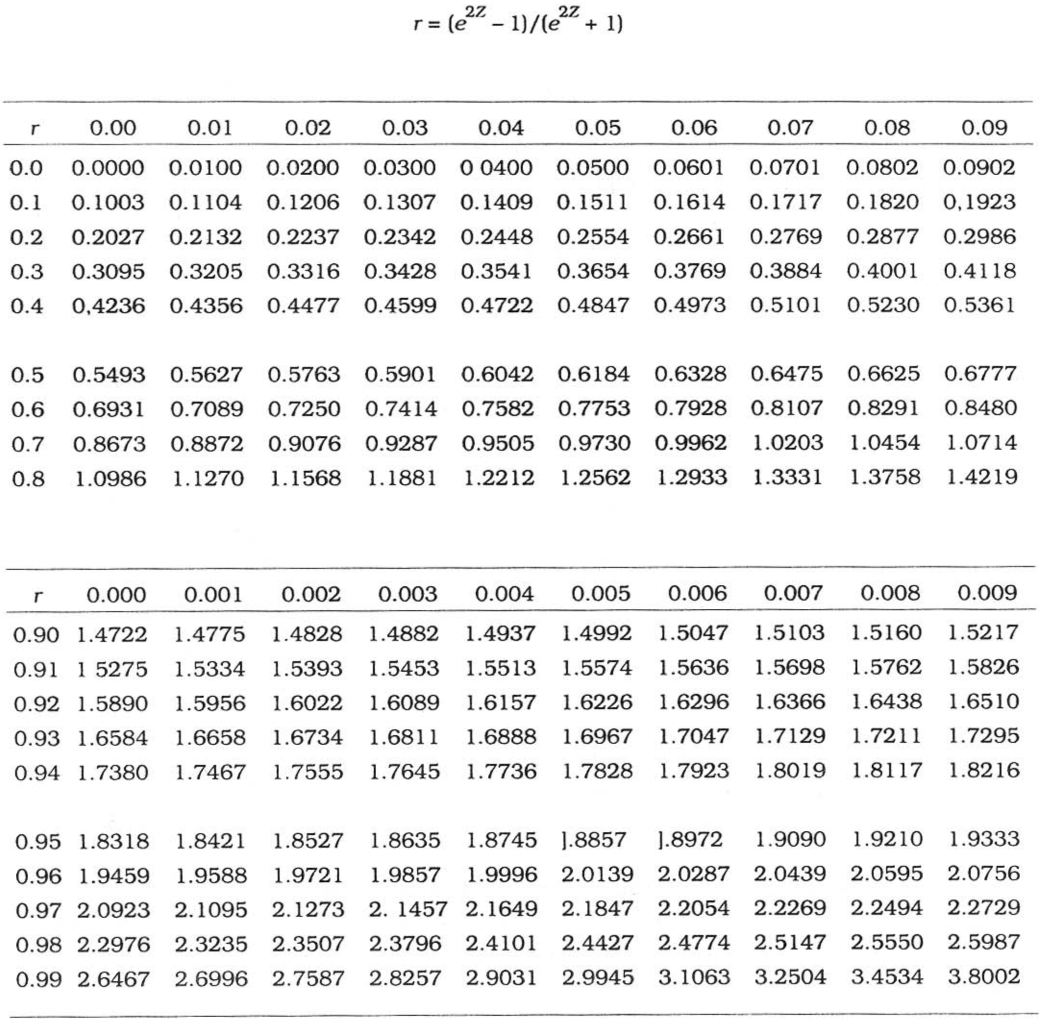
Valores de *Z* en términos de *r* coeficiente de correlación

$$Z = \frac{1}{2}\left(L_n\left(\frac{1+r}{1+r}\right)\right)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0 0599	0.0699	0.0798	0.0898
0.1	0.0997	0.1096	0.1194	0.1293	0.1391	0.1489	0.1586	0.1684	0.1781	0.1877
0.2	0.1974	0.2070	0.2165	0.2260	0.2355	0.2449	0.2543	0.2636	0.2729	0.2821
0.3	0.2913	0.3004	0.3095	0.3185	0.3275	0.3364	0.3452	0.3540	0.3627	0.3714
0.4	0.3799	0.3885	0.3969	0.4053	0.4136	0.4219	0.4301	0.4382	0.4462	0.4542
0.5	0.4621	0.4699	0.4777	0.4854	0.4930	0.5005	0.5080	0.5154	0.5227	0.5299
0.6	0.5370	0.5441	0.5511	0.5581	0.5649	0.5717	0.5784	0.5850	0.5915	0.5980
0.7	0.6044	0.6107	0.6169	0.6231	0.6291	0.6351	0.6411	0.6469	0.6527	0.6584
0.8	0.6640	0.6696	0.6751	0.6805	0.6858	0.6911	0.6963	0.7014	0.7064	0.7114
0.9	0.7163	0.7211	0.7259	0.7306	0.7352	0.7398	0.7443	0.7487	0.7531	0.7574
1.0	0.7616	0.7658	0.7699	0.7739	0.7779	0.7818	0.7857	0.7895	0.7932	0.7969
1.1	0.8005	0.8041	0.8076	0.8110	0.8144	0.8178	0.8210	0.8243	0.8275	0.8306
1.2	0.8337	0.8367	0.8397	0.8426	0.8455	0.8483	0.8511	0.8538	0.8565	0.8591
1.3	0.8617	0.8643	0.8668	0.8692	0.87]7	0.8741	0.8764	0.8787	0.8810	0.8832
1.4	0.8854	0.8875	0.8896	0.8917	0.8937	0.8957	0.8977	0.8996	0.9015	0.9033
1.5	0.9051	0.9069	0.9087	0.9104	0.9121	0.9138	0.9154	0.9170	0.9186	0.9201
1.6	0.9217	0.9232	0.9246	0.9261	0.9275	0.9289	0.9302	0.9316	0.9329	0.9341
1.7	0.9354	().9366	0.9379	0.9391	0.9402	0.9414	0.9425	0.9436	0.9447	0.9458
1.8	0.9468	0.9478	0.9488	0.9498	0.9508	0.9517	0.9527	0.9536	0.9545	0.9554
1.9	0.9562	0.9571	0.9579	0.9587	0.9595	0.9603	0.9611	0.9618	0.9626	0.9633
2.0	0.9640	0.9647	0.9654	0.9661	0.9667	0.9674	0.9680	0.9687	0.9693	0.9699
2.1	0.9705	0.9710	0.9716	0.9721	0.9727	0.9732	0.9737	0.9743	0.9748	0.9753
2.2	0.9757	0.9762	0.9767	0.9771	0.9776	0.9780	0.9785	0.9789	0.9793	0.9797
2.3	0.9801	0.9805	0.9809	0.9812	0.98 i 6	0.9820	0.9823	0.9827	0.9830	0.9833
2.4	0.9837	0.9840	0.9843	0.9846	0.9849	0.9852	0.9855	0 9858	0.9861	0.9863
2.5	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0.9876	0.9879	0.9881	0.9884	0.9886	0.9888
2.6	0.9890	0.9892	0.9895	0 9897	0.9899	0.9901	0.9903	0.9905	0.9906	0.9908
2.7	0.9910	0.9912	0.9914	0.9915	0.9917	0.9919	0.9920	0.9922	0.9923	0.9925
2.8	0.9926	0.9928	0.9929	0.9931	0.9932	0.9933	0.9935	0.9936	0.9937	0.9938
2.9	0.9940	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9945	0.9946	0.9947	0.9949	0.9950

Tabla generada por J. Carlos Medina (MacStat)

Valores de *r* en términos de *Z*.



$$r = (e^{2Z} - 1)/(e^{2Z} + 1)$$

r	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0 0400	0.0500	0.0601	0.0701	0.0802	0.0902
0.1	0.1003	0.1104	0.1206	0.1307	0.1409	0.1511	0.1614	0.1717	0.1820	0,1923
0.2	0.2027	0.2132	0.2237	0.2342	0.2448	0.2554	0.2661	0.2769	0.2877	0.2986
0.3	0.3095	0.3205	0.3316	0.3428	0.3541	0.3654	0.3769	0.3884	0.4001	0.4118
0.4	0,4236	0.4356	0.4477	0.4599	0.4722	0.4847	0.4973	0.5101	0.5230	0.5361
0.5	0.5493	0.5627	0.5763	0.5901	0.6042	0.6184	0.6328	0.6475	0.6625	0.6777
0.6	0.6931	0.7089	0.7250	0.7414	0.7582	0.7753	0.7928	0.8107	0.8291	0.8480
0.7	0.8673	0.8872	0.9076	0.9287	0.9505	0.9730	0.9962	1.0203	1.0454	1.0714
0.8	1.0986	1.1270	1.1568	1.1881	1.2212	1.2562	1.2933	1.3331	1.3758	1.4219

r	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.90	1.4722	1.4775	1.4828	1.4882	1.4937	1.4992	1.5047	1.5103	1.5160	1.5217
0.91	1 5275	1.5334	1.5393	1.5453	1.5513	1.5574	1.5636	1.5698	1.5762	1.5826
0.92	1.5890	1.5956	1.6022	1.6089	1.6157	1.6226	1.6296	1.6366	1.6438	1.6510
0.93	1.6584	1.6658	1.6734	1.6811	1.6888	1.6967	1.7047	1.7129	1.7211	1.7295
0.94	1.7380	1.7467	1.7555	1.7645	1.7736	1.7828	1.7923	1.8019	1.8117	1.8216
0.95	1.8318	1.8421	1.8527	1.8635	1.8745	].8857	].8972	1.9090	1.9210	1.9333
0.96	1.9459	1.9588	1.9721	1.9857	1.9996	2.0139	2.0287	2.0439	2.0595	2.0756
0.97	2.0923	2.1095	2.1273	2. 1457	2.1649	2.1847	2.2054	2.2269	2.2494	2.2729
0.98	2.2976	2.3235	2.3507	2.3796	2.4101	2.4427	2.4774	2.5147	2.5550	2.5987
0.99	2.6467	2.6996	2.7587	2.8257	2.9031	2.9945	3.1063	3.2504	3.4534	3.8002

Tabla generada por J. Carlos Medina (MacStat)

Ángulos correspondientes a los porcentajes

ANG = ARCO Seno $\sqrt{\text{Porcentaje}}$

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.5730	0.8103	0.9924	1.1460	1.2813	1.4036	1.5161	1.6208	1.7191
0.1	1.8122	1.9006	1.9852	2.0663	2.1443	2.2196	2.2924	2.3630	2.4316	2.4983
0.2	2.5632	2.6265	2.6884	2.7489	2.8080	2.8660	2.9228	2.9785	3.0332	3.0870
0.3	3.1398	3.1917	3.2429	3.2932	3.3428	3.3916	3.4398	3.4873	3.5342	3.5805
0.4	3.6261	3.6712	3.7158	3.7598	3.8034	3.8464	3.8890	3.9311	3.9728	4.0140
0.5	4.0548	4.0952	4.1352	4.1749	4.2142	4.2531	4.2916	4.3299	4.3677	4.4053
0.6	4.4426	4.4795	4.5161	4.5525	4.5886	4.6244	4.6599	4.6951	4.7301	4.7648
0.7	4.7993	4.8336	4.8676	4.9013	4.9349	4.9682	5.0013	5.0342	5.0668	5.0993
0.8	5.1315	5.1636	5.1955	5.2271	5.2586	5.2899	5.3210	5.3520	5.3827	5.4133
0.9	5.4437	5.4740	5.5041	5.5340	5.5638	5.5934	5.6228	5.6521	5.6813	5.7103
1	5.7392	6.0203	6.2891	6.5470	6.7952	7.0349	7.2669	7.4918	7.7103	7.9229
2	8.1301	8.3323	8.5298	8.7230	8.9121	9.0974	9.2792	9.4575	9.6327	9.8049
3	9.9742	10.1408	10.3048	10.4664	10.6256	10.7826	10.9374	11.0902	11.2410	11.3899
4	11.5370	11 6823	11.8259	11.9679	12.1084	12.2473	12.3848	12.5208	12.6555	12.7889
5	12.9210	13.0518	13.1814	13.3099	13.4372	13.5634	13.6885	13.8126	13.9356	14.0577
6	14.1788	14.2990	14.4182	14.5366	14.6541	14.7707	14.8865	15.0015	15.1156	15.2291
7	15.3417	15.4536	15.5648	15.6753	15.7851	15.8942	16.0026	16.1104	16.2175	16.3240
8	16.4299	16.5352	16.6399	16.7441	16.8476	16.9506	17.0531	17.1550	17.2564	17.3572
9	17.4576	17.5575	17.6568	17.7557	17.8541	17.9520	18.0495	18.1465	18.2431	18.3392
10	18.4349	18.5302	18.6251	18.7195	18.8136	18.9072	19.0005	19.0934	19.1859	19.2780
11	19.3697	19.4611	19.5521	19.6428	19.7331	19.8231	19.9127	20.0020	20.0909	20.1796
12	20.2679	20.3559	20.4436	20.5310	20.6180	20.7048	20.7913	20.8775	20.9634	21.0490
13	21.1343	21.2193	21.3041	21.3886	21.4728	21.5568	21.6405	21.7240	21.8071	21.8901
14	21.9728	22.0552	22.1374	22.2193	22.3011	22.3825	22.4638	22.5448	22.6256	22.7062
15	22.7865	22.8666	22.9465	23.0262	23.1057	23.1849	23.2640	23.3428	23.4215	23.4999
16	23.5782	23.6562	23.7341	23.8117	23.8892	23.9665	24.0436	24.1205	24.1972	24.2737
17	24.3501	24.4262	24.5022	24.5781	24.6537	24.7292	24.8045	24.8797	24.9546	25.0294
18	25.1041	25.1786	25.2529	25.3271	25.4011	25.4749	25.5486	25.6222	25.6956	25.7688
19	25.8419	25.9149	25.9877	26.0604	26.1329	26.2052	26.2775	26.3496	26.4215	26.4934
20	26.5651	26.6366	26.7080	26.7793	26.8505	26.9215	26.9924	27.0632	27.1338	27.2043
21	27.2747	27.3450	27.4152	27.4852	27.5551	27.6249	27.6946	27.7641	27.8336	27.9029
22	27.9721	28.0412	28.1102	28.1791	28.2478	28.3165	28.3850	28.4535	28.5218	28.5901
23	28.6582	28.7262	28.7941	28.8619	28.9297	28.9973	29.0648	29.1322	29.1995	29.2667
24	29.3339	29.4009	29.4678	29.5347	29.6014	29.6681	29.7346	29.8011	29.8675	29.9338

Tabla generada por J. Carlos Medina (MacStat)

Ángulos correspondientes a los porcentajes (*Continuación*)

25	30.0000	30.0661	30.1321	30.1981	30.2639	30.3297	30.3954	30.4610	30.5265	30.5919
26	30.6573	30.7226	30.7878	30.8529	30.9179	30.9829	31.0477	31.1125	31.1772	31.2419
27	31.3064	31.3709	31.4354	31.4997	31.5640	31.6282	31.6923	31.7563	31.8203	31.8842
28	31.9481	32.0118	32.0755	32.1392	32.2027	32.2662	32.3296	32.3930	32.4563	32.5195
29	32.5827	32.6458	32.7088	32.7718	32.8347	32.8976	32.9604	33.0231	33.0858	33.1484
30	33.2109	33.2734	33.3358	33.3982	33.4605	33.5228	33.5849	33.6471	33.7092	33.7712
31	33.8332	33.8951	33.9569	34.0187	34.0805	34.1422	34.2038	34.2654	34.3270	34.3885
32	34.4499	34.5113	34.5726	34 6339	34.6952	34.7563	34.8175	34.8786	34.9396	35.0006
33	35.0616	35.1225	35.1833	35.2441	35.3049	35.3656	35.4263	35.4869	35.5475	35.6080
34	35.6685	35.7290	35.7894	35.8498	35.9101	35.9704	36.0306	36.0908	36.1510	36.2111
35	36.2712	36.3312	36.3912	36.4512	36.5111	36.5710	36.6309	36.6907	36.7505	36.8102
36	36.8699	36.9296	36.9892	37.0488	37.1083	37.1679	37.2274	37.2868	37.3462	37.4056
37	37.4650	37.5243	37.5836	37.6428	37.7021	37.7612	37.8204	37.8795	37.9386	37.9977
38	38.0567	38.1157	38.1747	38.2337	38.2926	38.3515	38.4103	38.4692	38.5280	38.5867
39	38.6455	38 7042	38.7629	38.8216	38.8802	38.9388	38.9974	39.0560	39.1145	39.1730
40	39.2315	39.2900	39.3484	39.4068	39.4652	39.5236	39.5820	39.6403	39.6986	39.7569
41	39.8151	39.8734	39.9316	39.9898	40.0479	40.1061	40.1642	40.2223	40.2804	40.3385
42	40.3966	40.4546	40.5126	40.5706	40.6286	40.6865	40.7445	40.8024	40.8603	40.9182
43	40.9761	41.0339	41.0918	41.1496	41.2074	41.2652	41.3230	41.3807	41.4385	41.4962
44	41.5539	41.6117	41.6693	41.7270	41.7847	41.8423	41.9000	41.9576	42.0152	42.0728
45	42.1304	42.1880	42.2456	42.3031	42.3607	42.4182	42.4757	42.5332	42.5907	42.6482
46	42.7057	42.7632	42.8207	42.8781	42.9356	42.9930	43.0504	43.1079	43.1653	43.2227
47	43.2801	43.3375	43.3949	43.4523	43.5096	43.5670	43.6244	43.6817	43.7391	43.7964
48	43.8538	43.9111	43.9685	44.0258	44.0831	44.1404	44.1978	44.2551	44.3124	44.3697
49	44.4270	44.4843	44.5416	44.5989	44.6562	44.7135	44.7708	44.8281	44.8854	44.9427
50	45.0000	45.0573	45.1146	45.1719	45.2292	45.2865	45.3438	45.4011	45.4584	45.5157
51	45.5730	45.6303	45.6876	45.7449	45.8022	45.8596	45.9169	45.9742	46.0315	46.0889
52	46.1462	46.2036	46.2609	46.3183	46.3756	46.4330	46.4904	46.5477	46.6051	46.6625
53	46.7199	46.7773	46.8347	46.8921	46.9496	47.0070	47.0644	47.1219	47.1793	47.2368
54	47.2943	47.3518	47.4093	47.4668	47.5243	47.5818	47.6393	47.6969	47.7544	47.8120
55	47.8696	47.9272	47.9848	48.0424	48.1000	48.1577	48.2153	48.2730	48.3307	48.3883
56	48.4461	48.5038	48.5615	48.6193	48.6770	48.7348	48.7926	48.8504	48.9082	48.9661
57	49.0239	49.0818	49.1397	49.1976	49.2555	49.3135	49.3714	49.4294	49.4874	49.5454
58	49.6034	49.6615	49.7196	49.7777	49.8358	49.8939	49.9521	50.0102	50.0684	50.1266
59	50.1849	50.2431	50.3014	50.3597	50.4180	50.4764	50.5348	50.5932	50.6516	50.7100
60	50.7685	50.8270	50.8855	50.9440	51.0026	51.0612	51.1198	51.1784	51.2371	51.2958
61	51.3545	51.4133	51.4720	51.5308	51.5897	51.6485	51.7074	51.7663	51.8253	51.8843

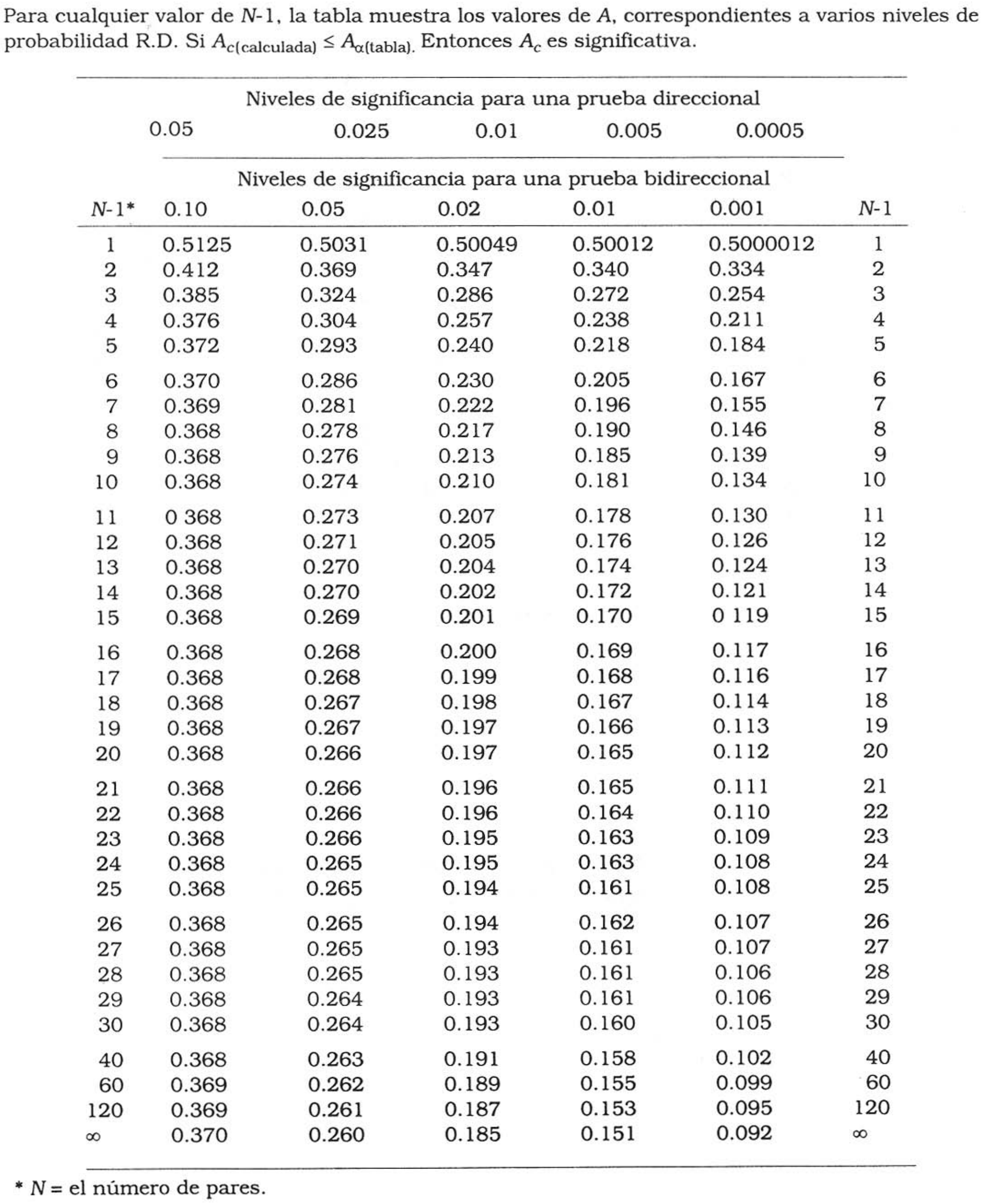
Ángulos correspondientes a los porcentajes (*Continuación*)

62	51.9433	52.0023	52.0614	52.1205	52.1796	52.2388	52.2979	52.3572	52.4164	52.4757
63	52.5350	52.5944	52.6538	52.7132	52.7726	52.8321	52.8917	52.9512	53.0108	53.0704
64	53.1301	53.1898	53.2495	53.3093	53.3691	53.4290	53.4889	53.5488	53.6088	53.6688
65	53.7288	53.7889	53.8490	53.9092	53.9694	54.0296	54.0899	54.1502	54.2106	54.2710
66	54.3315	54.3920	54.4525	54.5131	54.5737	54.6344	54.6951	54.7559	54.8167	54.8775
67	54.9384	54.9994	55.0604	55.1214	55.1825	55.2437	55.3048	55.3661	55.4274	55.4887
68	55.5501	55.6115	55.6730	55.7346	55.7962	55.8578	55.9195	55.9813	56.0431	56.1049
69	56.1668	56.2288	56.2908	56.3529	56.4151	56.4772	56.5395	56.6018	56.6642	56.7266
70	56.7891	56.8516	56.9142	56.9769	57.0396	57.1024	57.1653	57.2282	57.2912	57.3542
71	57.4173	57.4805	57.5437	57.6070	57.6704	57.7338	57.7973	57.8608	57.9245	57.9882
72	58.0519	58.1158	58.1797	58.2437	58 3077	58.3718	58.4360	58.5003	58.5646	58.6291
73	58.6936	58.7581	58.8228	58.8875	58.9523	59.0171	59.0821	59.1471	59.2122	59.2774
74	59.3427	59.4081	59.4735	59.5390	59.6046	59.6703	59.7361	59.8019	59.8679	59.9339
75	60.0000	60.0662	60.1325	60.1989	60.2654	60.3319	60.3986	60.4653	60.5322	60.5991
76	60.6661	60.7333	60.8005	60.8678	60.9352	61.0027	61.0703	61.1381	61.2059	61.2738
77	61.3418	61.4099	61.4782	61.5465	61.6150	61.6835	61.7522	61.8209	61.8898	61.9588
78	62.0279	62.0971	62.1664	62.2359	62.3054	62.3751	62.4449	62.5148	62.5848	62.6550
79	62.7253	62.7957	62.8662	62.9368	63.0076	63.0785	63.1495	63.2207	63.2920	63.3634
80	63.4349	63.5066	63.5785	63.6504	63.7225	63.7948	63.8671	63.9396	64.0123	64.0851
81	64.1581	64.2312	64.3044	64.3778	64.4514	64.5251	64.5989	64.6729	64.7471	64.8214
82	64.8959	64.9706	65.0454	65.1203	65.1955	65.2708	65.3463	65.4219	65.4978	65.5738
83	65.6499	65.7263	65.8028	65.8795	65.9564	66.0335	66.1108	66.1883	66.2659	66.3438
84	66.4218	66.5001	66.5785	66.6572	66.7360	66.8151	66.8943	66.9738	67.0535	67.1334
85	67.2135	67.2938	67.3744	67.4552	67.5362	67.6175	67.6989	67.7807	67.8626	67.9448
86	68.0272	68.1099	68.1929	68.2760	68.3595	68.4432	68.5272	68.6114	68.6959	68.7807
87	68.8657	68.9510	69.0366	69.1225	69.2087	69.2952	69.3820	69.4690	69.5564	69.6441
88	69.7321	69.8204	69.9091	69.9980	70.0873	70.1769	70.2669	70.3572	70.4479	70.5389
89	70.6303	70.7220	70.8141	70.9066	70.9995	71.0928	71.1864	71.2805	71.3749	71.4698
90	71.5651	71.6608	71.7569	71.8535	71.9505	72.0480	72.1459	72.2443	72.3432	72.4425
91	72.5424	72.6428	72.7436	72.8450	72.9469	73.0494	73.1524	73.2559	73.3601	73.4648
92	73.5701	73.6760	73.7825	73.8896	73.9974	74.1058	74.2149	74.3247	74.4352	74.5464
93	74.6583	74.7709	74.8844	74.9985	75.1 135	75.2293	75.3459	75.4634	75.5818	75.7010
94	75.8212	75.9423	76.0644	76.1874	76.3115	76 4366	76.5628	76.6901	76.8186	76.9482
95	77.0790	77.2111	77.3445	77.4792	77.6152	77.7527	77.8916	78.0321	78.1741	78.3177
96	78.4630	78.6101	78.7590	78.9098	79.0626	79.2174	79.3744	79.5336	79.6952	79.8592
97	80.0258	80.1951	80.3673	80.5425	80.7208	80.9026	81.0879	81.2770	81.4702	81.6677
98	81.8699	82.0771	82.2897	82.5082	82.7331	82.9651	83.2048	83.4530	83.7109	83.9797

Ángulos correspondientes a los porcentajes (*Continuación*)

99.0	84.2608	84.2897	84.3187	84.3479	84.3772	84.4066	84.4362	84.4660	84.4959	84.5260
99.1	84.5563	84.5867	84.6173	84.6480	84.6790	84.7101	84.7414	84.7729	84.8045	84.8364
99.2	84.8685	84.9007	84.9332	84.9658	84.9987	85.0318	85.0651	85.0987	85.1324	85.1664
99.3	85.2007	85.2352	85.2699	85.3049	85.3401	85.3756	85.4114	85.4475	85.4839	85.5205
99.4	85.5574	85.5947	85.6323	85.6701	85.7084	85.7469	85.7858	85.8251	85.8648	85.9048
99.5	85.9452	85.9860	86.0272	86.0689	86.1110	86.1536	86.1966	86.2402	86.2842	86.3288
99.6	86.3739	86.4195	86.4658	86.5127	86.5602	86.6084	86.6572	86.7068	86.7571	86.8083
99.7	86.8602	86.9130	86.9668	87.0215	87.0772	87.1340	87.1920	87.2511	87.3116	87.3735
99.8	87.4368	87.5017	87.5684	87.6370	87.7076	87.7804	87.8557	87.9337	88.0148	88.0994
99.9	88.1878	88.2809	88.3792	88.4839	88.5964	88.7187	88.8540	89.0076	89.1897	89.4270
100.0	90.0000	_	_	_	_	_	_	_	_	_

Valores críticos de *A* (prueba de Sandler)



Para cualquier valor de N-1, la tabla muestra los valores de A, correspondientes a varios niveles de probabilidad R.D. Si $A_{c(\text{calculada})} \leq A_{\alpha(\text{tabla})}$. Entonces A_c es significativa.

	Niveles de significancia para una prueba direccional					
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005	
	Niveles de significancia para una prueba bidireccional					
N-1*	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	N-1
1	0.5125	0.5031	0.50049	0.50012	0.5000012	1
2	0.412	0.369	0.347	0.340	0.334	2
3	0.385	0.324	0.286	0.272	0.254	3
4	0.376	0.304	0.257	0.238	0.211	4
5	0.372	0.293	0.240	0.218	0.184	5
6	0.370	0.286	0.230	0.205	0.167	6
7	0.369	0.281	0.222	0.196	0.155	7
8	0.368	0.278	0.217	0.190	0.146	8
9	0.368	0.276	0.213	0.185	0.139	9
10	0.368	0.274	0.210	0.181	0.134	10
11	0 368	0.273	0.207	0.178	0.130	11
12	0.368	0.271	0.205	0.176	0.126	12
13	0.368	0.270	0.204	0.174	0.124	13
14	0.368	0.270	0.202	0.172	0.121	14
15	0.368	0.269	0.201	0.170	0 119	15
16	0.368	0.268	0.200	0.169	0.117	16
17	0.368	0.268	0.199	0.168	0.116	17
18	0.368	0.267	0.198	0.167	0.114	18
19	0.368	0.267	0.197	0.166	0.113	19
20	0.368	0.266	0.197	0.165	0.112	20
21	0.368	0.266	0.196	0.165	0.111	21
22	0.368	0.266	0.196	0.164	0.110	22
23	0.368	0.266	0.195	0.163	0.109	23
24	0.368	0.265	0.195	0.163	0.108	24
25	0.368	0.265	0.194	0.161	0.108	25
26	0.368	0.265	0.194	0.162	0.107	26
27	0.368	0.265	0.193	0.161	0.107	27
28	0.368	0.265	0.193	0.161	0.106	28
29	0.368	0.264	0.193	0.161	0.106	29
30	0.368	0.264	0.193	0.160	0.105	30
40	0.368	0.263	0.191	0.158	0.102	40
60	0.369	0.262	0.189	0.155	0.099	60
120	0.369	0.261	0.187	0.153	0.095	120
∞	0.370	0.260	0.185	0.151	0.092	∞

* N = el número de pares.

Tabla generada por J. Carlos Medina (MacStat)

Tabla de Dunnet 1*a* para *p* = 95%

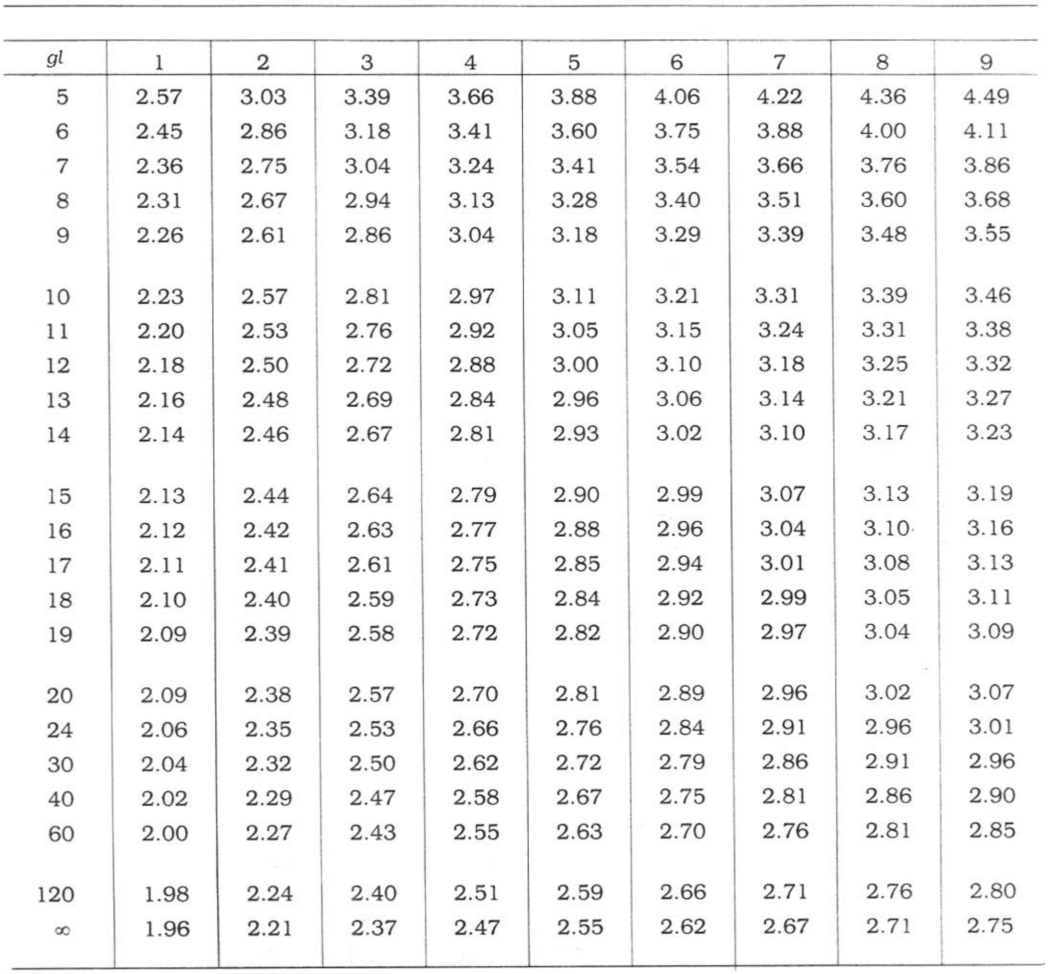
gl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.30
6	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
7	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
8	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
9	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
10	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
11	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
12	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
13	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
14	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
15	1.75	2.07	2.24	2.36	2.44	2.51	2.57	2.62	2.67
16	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65
17	1.74	2.05	2.22	2.33	2.42	2.49	2.54	2.59	2.64
18	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62
19	1.73	2.03	2.20	2.31	2.40	2.47	2.52	2.57	2.61
20	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60
24	1.71	2,01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57
30	1.70	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54
40	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51
60	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48
120	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45
∞	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42

Fuente: Journal of the American Statistical Association, vol. 50, pp. 1096-1121.

Tabla de Dunnet 1*b* para p = 99%

gl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	3.37	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	4.94	5.03
6	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
7	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
8	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
9	2.82	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
10	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
11	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
12	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
13	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
14	2.62	2.94	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
15	2.60	2.91	3.08	3.20	3.29	3.36	3.42	3.47	3.52
16	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48
17	2.57	2.86	3.03	3.14	3.23	3.30	3.36	3.41	3.45
18	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42
19	2.54	2.83	2.99	3.10	3.18	3.25	3.31	3.36	3.40
20	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38
24	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31
30	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24
40	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18
60	2.39	2.64	2.78	2.87	2.94	3.00	3.04	3.08	3.12
120	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06
∞	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00

Tabla de Dunnet 2*a* para *p* = 95%



gl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.57	3.03	3.39	3.66	3.88	4.06	4.22	4.36	4.49
6	2.45	2.86	3.18	3.41	3.60	3.75	3.88	4.00	4.11
7	2.36	2.75	3.04	3.24	3.41	3.54	3.66	3.76	3.86
8	2.31	2.67	2.94	3.13	3.28	3.40	3.51	3.60	3.68
9	2.26	2.61	2.86	3.04	3.18	3.29	3.39	3.48	3.55
10	2.23	2.57	2.81	2.97	3.11	3.21	3.31	3.39	3.46
11	2.20	2.53	2.76	2.92	3.05	3.15	3.24	3.31	3.38
12	2.18	2.50	2.72	2.88	3.00	3.10	3.18	3.25	3.32
13	2.16	2.48	2.69	2.84	2.96	3.06	3.14	3.21	3.27
14	2.14	2.46	2.67	2.81	2.93	3.02	3.10	3.17	3.23
15	2.13	2.44	2.64	2.79	2.90	2.99	3.07	3.13	3.19
16	2.12	2.42	2.63	2.77	2.88	2.96	3.04	3.10	3.16
17	2.11	2.41	2.61	2.75	2.85	2.94	3.01	3.08	3.13
18	2.10	2.40	2.59	2.73	2.84	2.92	2.99	3.05	3.11
19	2.09	2.39	2.58	2.72	2.82	2.90	2.97	3.04	3.09
20	2.09	2.38	2.57	2.70	2.81	2.89	2.96	3.02	3.07
24	2.06	2.35	2.53	2.66	2.76	2.84	2.91	2.96	3.01
30	2.04	2.32	2.50	2.62	2.72	2.79	2.86	2.91	2.96
40	2.02	2.29	2.47	2.58	2.67	2.75	2.81	2.86	2.90
60	2.00	2.27	2.43	2.55	2.63	2.70	2.76	2.81	2.85
120	1.98	2.24	2.40	2.51	2.59	2.66	2.71	2.76	2.80
∞	1.96	2.21	2.37	2.47	2.55	2.62	2.67	2.71	2.75

Tabla de Dunnet $2a$ para $p = 99\%$

gl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4.03	4.63	5.09	5.44	5.73	5.97	6.18	6.36	6.53
6	3.71	4.22	4.60	4.88	5.11	5.30	5.47	5.61	5.74
7	3.50	3.95	4.28	4.52	4.71	4.87	5.01	5.13	5.24
8	3.36	3.77	4.06	4.27	4.44	4.58	4.70	4.81	4.90
9	3.25	3.63	3.90	4.09	4.24	4.37	4.48	4.57	4.65
10	3.17	3.53	3.78	3.95	4.10	4.21	4.31	4.40	4.47
11	3.11	3.45	3.68	3.85	3.98	4.09	4.18	4.26	4.33
12	3.05	3.39	3.61	3.76	3.89	3.99	4.08	4.15	4.22
13	3.01	3.33	3.54	3.69	3.81	3.91	3.99	4.06	4.13
14	2.98	3.29	3.49	3.64	3.75	3.84	3.92	3.99	4.05
15	2.95	3.25	3.45	3.59	3.70	3.79	3.86	3.93	3.99
16	2.92	3.22	3.41	3.55	3.65	3.74	3.82	3.88	3.93
17	2.90	3.19	3.38	3.51	3.62	3.70	3.77	3.83	3.89
18	2.88	3.17	3.35	3.48	3.58	3.67	3.74	3.80	3.85
19	2.86	3.15	3.33	3.46	3.55	3.64	3.70	3.76	3.81
20	2.85	3.13	3.31	3.43	3.53	3.61	3.67	3.73	3.78
24	2.80	3.07	3.24	3.36	3.45	3.52	3.58	3.64	3.69
30	2.75	3.01	3.17	3.28	3.37	3.44	3.50	3.55	3.59
40	2.70	2.95	3.10	3.21	3.29	3.36	3.41	3.46	3.50
60	2.66	2.90	3.04	3.14	3.22	3.28	3.33	3.38	3.42
120	2.62	2.84	2.98	3.08	3.15	3.21	3.25	3.30	3.33
∞	2.58	2.79	2.92	3.01	3.08	3.14	3.18	3.22	3.25

Porcentiles de la prueba de Bartlett

	Número de poblaciones								
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					1% puntos				
3	0.1411	0.1672	*	*	*	*	*	*	*
4	0.2843	0.3165	0.3475	0.3729	0.3937	0.4110	*	*	*
5	0.3984	0.4304	0.4607	0.4850	0.5046	0.5207	0.5343	0.5458	0.5558
6	0.4850	0.5149	0.5430	0.5653	0.5832	0.5978	0.6100	0.6204	0.6293
7	0.5512	0.5787	0.6045	0.6248	0.6410	0.6542	0.6652	0.6744	0.6824
8	0.6031	0.6282	0.6518	0.6704	0.6851	0.6970	0.7069	0.7153	0.7225
9	0.6445	0.6676	0.6892	0.7062	0.7197	0.7305	0.7395	0.7471	0.7536
10	0.6783	0.6996	0.7195	0.7352	0.7475	0.7575	0.7657	0.7726	0.7786
11	0.7063	0.7260	0.7445	0.7590	0.7703	0.7795	0.7871	0.7935	0.7990
12	0.7299	0.7483	0.7654	0.7789	0.7894	0.7980	0.8050	0.8109	0.8160
13	0.7501	0.7672	0.7832	0.7958	0.8056	0.8135	0.8201	0.8256	0.8303
14	0.7674	0.7835	0.7985	0.8103	0.8195	0.8269	0.8330	0.8382	0.8426
15	0.7825	0.7977	0.8118	0.8229	0.8315	0.8385	0.8443	0.8491	0.8532
16	0.7958	0.8101	0.8235	0.8339	0.8421	0.8486	0.8541	0.8586	0.8625
17	0.8076	0.8211	0.8338	0.8436	0.8514	0.8576	0.8627	0.8670	0.8707
18	0.8181	0.8309	0.8429	0.8523	0.8596	0.8655	0.8704	0.8745	0.8780
19	0.8275	0.8397	0.8512	0.8601	0.8670	0.8727	0.8773	0.8811	0.8845
20	0.8360	0.8476	0.8586	0.8671	0.8737	0.8791	0.8835	0.8871	0.8903
21	0.8437	0.8548	0.8653	0.8734	0.8797	0.8848	0.8890	0.8926	0.8956
22	0.8507	0.8614	0.8714	0.8791	0.8852	0.8901	0.8941	0.8975	0.9004
23	0.8571	0.8673	0.8769	0.8844	0.8902	0.8949	0.8988	0.9020	0.9047
24	0.8630	0.8728	0.8820	0.8892	0.8948	0.8993	0.9030	0.9061	0.9087
25	0.8684	0.8779	0.8867	0.8936	0.8990	0.9034	0.9069	0.9099	0.9124
26	0.8734	0.8825	0.8911	0.8977	0.9029	0.9071	0.9105	0.9134	0.9158
27	0.8781	0.8869	0.8951	0.9015	0.9065	0.9105	0.9138	0.9166	0.9190
28	0.8824	0.8909	0.8988	0.9050	0.9099	0.9138	0.9169	0.9196	0.9219
29	0.8864	0.8946	0.9023	0.9083	0.9130	0.9167	0.9198	0.9224	0.9246
30	0.8902	0.8981	0.9056	0.9114	0.9159	0.9195	0.9225	0.9250	0.9271
40	0.9175	0.9235	0.9291	0.9335	0.9370	0.9397	0.9420	0.9439	0.9455
50	0.9339	0.9387	0.9433	0.9468	0.9496	0.9518	0.9536	0.9551	0.9564
60	0.9449	0.9489	0.9527	0.9557	0.9580	0.9599	0.9614	0.9626	0.9637
80	0.9586	0.9617	0.9646	0.9668	0.9685	0.9699	0.9711	0.9720	0.9728
100	0.9669	0.9693	0.9716	0.9734	0.9748	0.9759	0.9769	0.9776	0.9783

Fuente: Journal of the American Statistical Association, vol. 75, 1980, pp. 314-317.

Porcentiles de la prueba de Bartlett (*Continuación*)

	Número de poblaciones								
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					5% puntos				
3	0.3123	0.3058	0.3173	0.3299	*	*	*	*	*
4	0.4780	0.4699	0.4803	0.4921	0.5028	0.5122	0.5204	0.5277	0.5341
5	0.5845	0.5762	0.5850	0.5952	0.6045	0.6126	0.6197	0.6260	0.6315
6	0.6563	0.6483	0.6559	0.6646	0.6727	0.6798	0.6860	0.6914	0.6961
7	0.7075	0.7000	0.7065	0.7142	0.7213	0.7275	0.7329	0.7376	0.7418
8	0.7456	0.7387	0.7444	0.7512	0.7574	0.7629	0.7677	0.7719	0.7757
9	0.7751	0.7686	0.7737	0.7798	0.7854	0.7903	0.7946	0.7984	0.8017
10	0.7984	0.7924	0.7970	0.8025	0.8076	0.8121	0.8160	0.8194	0.8224
11	0.8175	0.8118	0.8160	0.8210	0.8257	0.8298	0.8333	0.8365	0.8392
12	0.8332	0.8280	0.8317	0.8364	0.8407	0.8444	0.8477	0.8506	0.8531
13	0.8465	0.8415	0.8450	0.8493	0.8533	0.8568	0.8598	0.8625	0.8648
14	0.8578	0.8532	0.8564	0.8604	0.8641	0.8673	0.8701	0.8726	0.8748
15	0.8676	0.8632	0.8662	0.8699	0.8734	0.8764	0.8790	0.8814	0.8834
16	0.8761	0.8719	0.8747	0.8782	0.8815	0.8843	0.8868	0.8890	0.8909
17	0.8836	0.8796	0.8823	0.8856	0.8886	0.8913	0.8936	0.8957	0.8975
18	0.8902	0.8865	0.8890	0.8921	0.8949	0.8975	0.8997	0.9016	0.9033
19	0.8961	0.8926	0.8949	0.8979	0.9006	0.9030	0.9051	0.9069	0.9086
20	0.9015	0.8980	0.9003	0.9031	0.9057	0.9080	0.9100	0.9117	0.9132
21	0.9063	0.9030	0.9051	0.9078	0.9103	0.9124	0.9143	0.9160	0.9175
22	0.9106	0.9075	0.9095	0.9120	0.9144	0.9165	0.9183	0.9199	0.9213
23	0.9146	0.9116	0.9135	0.9159	0.9182	0.9202	0.9219	0.9235	0.9248
24	0.9182	0.9153	0.9172	0.9195	0.9217	0.9236	0.9253	0.9267	0.9280
25	0.9216	0.9187	0.9205	0.9228	0.9249	0.9267	0.9283	0.9297	0.9309
26	0.9246	0.9219	0.9236	0.9258	0.9278	0.9296	0.9311	0.9325	0.9336
27	0.9275	0.9249	0.9265	0.9286	0.9305	0.9322	0.9337	0.9350	0.9361
28	0.9301	0.9276	0.9292	0.9312	0.9330	0.9347	0.9361	0.9374	0.9385
29	0.9326	0.9301	0.9316	0.9336	0.9354	0.9370	0.9383	0.9396	0.9406
30	0.9348	0.9325	0.9340	0.9358	0.9376	0.9391	0.9404	0.9416	0.9426
40	0.9513	0.9495	0.9506	0.9520	0.9533	0.9545	0.9555	0.9564	0.9572
50	0.9612	0.9597	0.9606	0.9617	0.9628	0.9637	0.9645	0.9652	0.9658
60	0.9677	0.9665	0.9672	0.9681	0.9690	0.9698	0.9705	0.9710	0.9716
80	0.9758	.9749	0.9754	0.9761	0.9768	0.9774	0.9779	0.9783	0.9787
100	0.9807	0.9799	0.9804	0.9809	0.9815	0.9819	0.9823	0.9827	0.9830

Porcentiles de la prueba de Bartlett (*Continuación*)

	Número de poblaciones								
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					10% puntos				
3	0.4359	0.3991	0.3966	0.4006	0.4061	0.4116	*	*	*
4	0.5928	0.5583	0.5551	0.5582	0.5626	0.5673	0.5717	0.5759	0.5797
5	0.6842	0.6539	0.6507	0.6530	0.6566	0.6605	0.6642	0.6676	0.6708
6	0.7429	0.7163	0.7133	0.7151	0.7182	0.7214	0.7245	0.7274	0.7301
7	0.7834	0.7600	0.7572	0.7587	0.7612	0.7640	0.7667	0.7692	0.7716
8	0.8130	0.7921	0.7895	0.7908	0.7930	0.7955	0.7978	0.8000	0.8021
9	0.8356	0.8168	0.8143	0.8154	0.8174	0.8196	0.8217	0.8236	0.8254
10	0.8533	0.8362	0.8339	0.8349	0.8367	0.8386	0.8405	0.8423	0.8439
11	0.8676	0.8519	0.8498	0.8507	0.8523	0.8540	0.8557	0.8574	0.8589
12	0.8794	0.8649	0.8629	0.8637	0.8652	0.8668	0.8683	0.8698	0.8712
13	0.8892	0.8758	0.8740	0.8746	0.8760	0.8775	0.8789	0.8803	0.8816
14	0.8976	0.8851	0.8833	0.8840	0.8852	0.8866	0.8879	0.8892	0.8904
15	0.9048	0.8931	0.8914	0.8920	0.8932	0.8944	0.8957	0.8969	0.8980
16	0.9110	0.9000	0.8985	0.8990	0.9001	0.9013	0.9025	0.9036	0.9046
17	0.9165	0.9061	0.9046	0.9051	0.9062	0.9073	0.9084	0.9094	0.9104
18	0.9214	0.9115	0.9101	0.9106	0.9115	0.9126	0.9137	0.9146	0.9156
19	0.9257	0.9163	0.9150	0.9154	0.9163	0.9174	0.9183	0.9193	0.9201
20	0.9295	0.9206	0.9194	0.9198	0.9207	0.9216	0.9226	0.9234	0.9243
21	0.9330	0.9245	0.9233	0.9237	0.9245	0.9255	0.9263	0.9272	0.9280
22	0.9362	0.9281	0.9269	0.9273	0.9281	0.9289	0.9298	0.9306	0.9313
23	0.9390	0.9313	0.9302	0.9305	0.9313	0.9321	0.9329	0.9337	0.9344
24	0.9417	0.9342	0.9332	0.9335	0.9342	0.9350	0.9358	0.9365	0.9372
25	0.9441	0.9369	0.9359	0.9362	0.9369	0.9377	0.9384	0.9391	0.9398
26	0.9463	0.9394	0.9384	0.9387	0.9394	0.9401	0.9408	0.9415	0.9421
27	0.9484	0.9417	0.9408	0.9410	0.9417	0.9424	0.9431	0.9437	0.9443
28	0.9503	0.9439	0.9429	0.9432	0.9438	0.9445	0.9452	0.9458	0.9464
29	0.9520	0.9458	0.9449	0.9452	0.9458	0.9464	0.9471	0.9477	0.9483
30	0.9537	0.9477	0.9468	0.9471	0.9476	0.9483	0.9489	0.9495	0.9500
40	0.9655	0.9610	0.9603	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9623	0.9627
50	0.9725	0.9689	0.9683	0.9685	0.9688	0.9692	0.9696	0.9699	0.9703
60	0.9771	0.9741	0.9737	0.9738	0.9741	0.9744	0.9747	0.9750	0.9753
80	0.9829	0.9806	0.9803	0.9804	0.9806	0.9808	0.9811	0.9813	0.9815
100	0.9864	0.9845	0.9843	0.9843	0.9845	0.9847	0.9849	0.9851	0.9852

Porcentiles de la prueba de Bartlett (*Continuación*)

	Número de poblaciones								
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				25% puntos					
3	0.6614	0.5711	0.5411	0.5279	0.5212	0.5176	0.5156	0.5146	*
4	0.7728	0.7025	0.6779	0.6667	0.6609	0.6577	0.6559	0.6549	0.6544
5	0.8299	0.7737	0.7534	0.7440	0.7391	0.7363	0.7347	0.7338	0.7333
6	0.8644	0.8177	0.8006	0.7926	0.7884	0.7860	0.7846	0.7838	0.7833
7	0.8873	0.8475	0.8327	0.8258	0.8221	0.8200	0.8188	0.8181	0.8177
8	0.9036	0.8690	0.8560	0.8499	0.8467	0.8448	0.8437	0.8431	0.8427
9	0.9158	0.8852	0.8737	0.8682	0.8653	0.8636	0.8626	0.8620	0.8617
10	0.9253	0.8978	0.8875	0.8825	0.8799	0.8784	0.8775	0.8769	0.8766
11	0.9329	0.9080	0.8985	0.8940	0.8916	0.8902	0.8894	0.8889	0.8887
12	0.9390	0.9163	0.9076	0.9035	0.9013	0.9000	0.8993	0.8988	0.8986
13	0.9442	0.9232	0.9152	0.9114	0.9094	0.9082	0.9075	0.9071	0.9068
14	0.9485	0.9291	0.9217	0.9181	0.9162	0.9151	0.9145	0.9141	0.9139
15	0.9522	0.9342	0.9272	0.9239	0.9221	0.9211	0.9205	0.9201	0.9199
16	0.9554	0.9385	0.9320	0.9289	0.9273	0.9263	0.9257	0.9254	0.9252
17	0.9582	0.9424	0.9363	0.9333	0.9317	0.9308	0.9303	0.9300	0.9298
18	0.9607	0.9457	0.9400	0.9372	0.9357	0.9349	0.9343	0.9340	0.9339
19	0.9629	0.9487	0.9433	0.9407	0.9393	0.9384	0.9379	0.9377	0.9375
20	0.9649	0.9514	0.9463	0.9438	0.9424	0.9416	0.9412	0.9409	0.9407
21	0.9667	0.9539	0.9489	0.9466	0.9453	0.9445	0.9441	0.9438	0.9437
22	0.9683	0.9561	0.9513	0.9491	0.9479	0.9471	0.9467	0.9465	0.9463
23	0.9697	0.9580	0.9535	0.9514	0.9502	0.9495	0.9491	0.9489	0.9487
24	0.9710	0.9599	0.9556	0.9535	0.9523	0.9517	0.9513	0.9511	0.9509
25	0.9722	0.9615	0.9574	0.9554	0.9543	0.9537	0.9533	0.9531	0.9530
26	0.9734	0.9631	0.9591	0.9572	0.9561	0.9555	0.9552	0.9550	0.9548
27	0.9744	0.9645	0.9607	0.9588	0.9578	.9572	0.9569	0.9567	0.9566
28	0.9754	0.9658	0.9621	0.9603	0.9594	.9588	0.9585	0.9583	0.9581
29	0.9762	0.9670	0.9635	0.9617	0.9608	.9603	0.9599	0.9597	0.9596
30	0.9771	0.9682	0.9647	0.9630	0.9621	.9616	0.9613	0.9611	0.9610
40	0.9830	0.9763	0.9737	0.9725	0.9718	.9714	0.9712	0.9710	0.9710
50	0.9865	0.9811	0.9791	0.9781	0.9775	.9772	0.9770	0.9769	0.9769
60	0.9888	0.9843	0.9826	0.9818	0.9813	.9811	0.9809	0.9808	0.9808
80	0.9916	0.9883	0.9870	0.9864	0.9861	.9859	0.9857	0.9857	0.9856
100	0.9933	0.9907	0.9896	0.9891	0.9889	.9887	0.9886	0.9886	0.9885

Rango studentizado o (Tukey-Snedecor) para comparaciones múltiples, después del ANOVA.

gl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8.93	13.44	16.36	18.49	20.15	21.51	22.64	23.62	24.48
2	4.13	5.73	6.77	7.54	8.14	8.63	9.05	9. 41	9.72
3	3.33	4.47	5.20	5.74	6.16	6.51	6.81	7.06	7.29
4	3.01	3.98	4.59	5.03	5.39	6.68	5.93	6.14	6.33
5	2.85	3.72	4.26	4.66	4.98	5.24	5.46	5.65	5.82
6	2.75	3.56	4.07	4.44	4.73	4.97	5.17	5.34	5.50
7	2.68	3.45	3.93	4.28	4.55	4.78	4.97	5.14	5.28
8	2.63	3.37	3.83	4.17	4.43	4.65	4.83	4 99	5.13
9	2.59	3.32	3.76	4.08	4.34	4.54	4.72	4.87	5.01
10	2.56	3.27	3.70	4.02	4.26	4.47	4.64	4.78	4.91
11	2.54	3.23	3.66	3.96	4.20	4.40	4.57	4.71	4.84
12	2.52	3.20	3.62	3.92	4.16	4.35	4.51	4.65	4.78
13	2.50	3.18	3.59	3.88	4.12	4.30	4.46	4.60	4.72
14	2.49	3.16	3.56	3.85	4.08	4.27	4.42	4.56	4.68
15	2.48	3.14	3.54	3.83	4.05	4.23	4.39	4.52	4.64
16	2.47	3.12	3.52	3.80	4.03	4.21	4.36	4.49	4.61
17	2.46	3.11	3.50	3.78	4.00	4.18	4.33	4.46	4.58
18	2.45	3.10	3.49	3.77	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55
19	2.45	3.09	3.47	3.75	3.97	4.14	4.29	4.42	4.53
20	2.44	3.08	3.46	3.74	3.95	4.12	4.27	4.40	4.51
24	2.42	3.05	3.42	3.69	3.90	4.07	4.21	4.34	4.44
30	2.40	3.02	3.39	3.65	3.85	4.02	4.16	4.28	4.38
40	2.38	2.99	3.35	3.60	3.80	3.96	4.10	4.21	4.32
60	2.36	2.96	3.31	3.56	3.75	3.91	4.04	4.16	4.25
120	2.34	2.93	3.28	3.52	3.71	3.86	3.99	4.10	4.19
∞	2.33	2.90	3.24	3.48	3.66	3.81	3.93	4.04	4.13

gl	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	25.24	25.92	26.54	27.10	27.62	28.10	28.54	28.96	29.35	29.71
2	10.01	10.26	10.49	10.70	10.89	11.07	11.24	11.39	11.54	11.68
3	7.49	7.67	7.83	7.98	8.12	8.25	8.37	8.48	8.58	8.68
4	6.49	6.65	6.78	6.91	7.02	7.13	7.23	7.33	7.41	7.50
5	5.97	6.10	6.22	6.34	6.44	6.54	6.63	6.71	6.79	6.86
6	5.64	5.76	5.87	5.98	6.07	6.16	6.25	6.32	6.40	6.47
7	5.41	5.53	5.64	5.74	5.83	5.91	5.99	6.06	6.13	6.19
8	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.80	5.87	5.93	6.00
9	5.13	5.23	5.33	5.42	5.51	5.58	5.66	5.72	5.79	5.85
10	5.03	5.13	5.23	5.32	5.40	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73
11	4.95	5.05	5.15	5.23	5.31	5.38	5.45	5.51	6.57	5.63
12	4.89	4.99	5.08	5.16	5.24	5.31	5.37	5.44	5.49	5.55
13	4.83	4.93	5.02	5.10	5.18	5.25	5.31	5.37	5.43	5.48
14	4.79	4.88	4.97	5.05	5.12	5.19	5.26	5.32	5.37	5.43
15	4.75	4.84	4.93	5.01	5.08	5.15	5.21	5.27	5.32	5.38
16	4.71	4.81	4.89	4.97	5.04	5.11	5.17	5.23	5.28	5.33
17	4.68	4.77	4.86	4.93	5.01	5.07	5.13	5.19	5.24	5.30
18	4.65	4.75	4.83	4.90	4.98	5.04	5.10	5.16	5.21	5.26
19	4.63	4.72	4.80	4.88	4.95	5.01	5.07	5.13	5.18	5.23
20	4.61	4.70	4.78	4.85	4.92	4.99	5.05	5.10	5.16	5.20
24	4.54	4.63	4.71	4.78	4.85	4.91	4.97	5.02	5.07	5.12
30	4.47	4.56	4.64	4.71	4.77	4.83	4.89	4.94	4.99	5.03
40	4.41	4.49	4.56	4.63	4.69	4.75	4.81	4.86	4.90	4.95
60	4.34	4.42	4.49	4.56	4.62	4.67	4.73	4.78	4.82	4.86
120	4.28	4.35	4.42	4.48	4.54	4.60	4.65	4.69	4.74	4.78
∞	4.21	4.28	4.35	4.41	4.47	4.52	4.57	4.61	4.65	4.69

Fuente: Biometrika Tables for Statisticians, Vols. I y II, editado por E. S. Pearson y H. O. Hartley, Biometrika Trust, Oxford University Press, 1976.

Continuación

gl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47

gl	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.00	6.13	6.20	6.27	6.33
12	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.69
30	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

Continuación

gl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24
6	5 24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44
16	4.13	4.79	5.19	3.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	6.84	5.97	6.09
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16

gl	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	233.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	9.30	9.4S	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57
10	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7 73
13	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7 39
15	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7 05
18	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	6.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

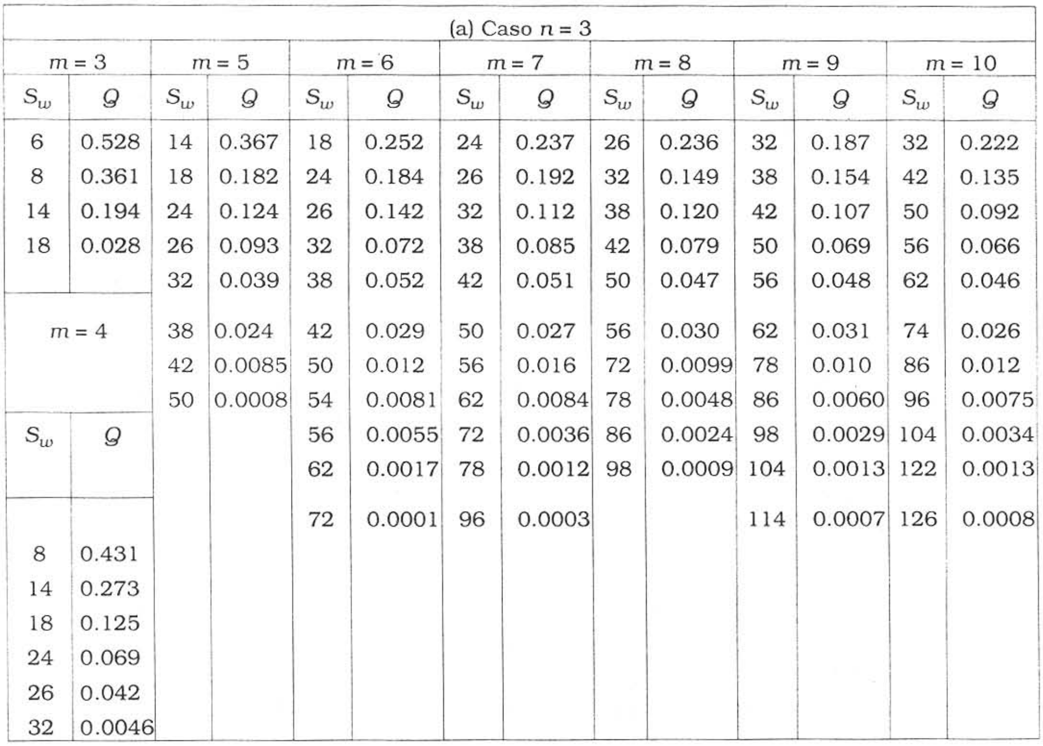
Valores críticos del coeficiente de Spearman

n-4		n-5		n-6		n-7		n-8		n-9		$n - 10$	
S_r	Q	S_r	Q	S_r	Q	S_r	Q	S_r	Q	S_r	Q	S_r	Q
12	0.458	22	0.475	50	0.210	74	0.249	108	0.250	156	0.218	208	0.235
14	0.375	24	0.392	52	0.178	78	.198	114	.195	164	.168	218	.184
16	0.208	26	0.342	54	0.149	82	.151	120	.150	172	.125	228	.139
18	0.167	28	0.258	56	0.121	86	.118	126	.108	180	.080	238	.102
20	0.042	30	0.225	58	0.088	90	.083	132	.076	188	.060	248	.072
		32	0.175	60	0.068	94	0.055	138	0.048	196	0.038	258	0.048
		34	0.117	62	0.051	98	.033	144	.029	204	.022	268	.030
		36	0.067	64	0.029	102	.017	150	.014	212	.011	278	.017
		38	0.042	66	0.017	106	.0062	156	.0054	220	.0041	288	.0087
		40	0.0083	68	0.0083	110	.0014	162	.0011	228	.0010	298	.0036
				70	0.0014							303	0.0011
20		40		70		112		168		240		330	

S_t	Valores de n				S_t	Valores de n		
	4	5	8	9		6	7	10
0	0.625	0.592	0.548	0.510	1	0 500	0.500	0.500
2	0.375	0.408	0.452	0.460	3	0.360	0.386	0.431
4	0.167	0.242	0.360	0.381	5	0.235	0.281	0.364
6	0.042	0.117	0.274	0.306	7	0.136	0.191	0.300
8		0.042	0.199	0.238	9	0.068	0.119	0.242
10		0.0083	0.138	0.179	11	0.028	0.068	0.190
12			0.089	0.130	13	0.0083	0.035	0.146
14			0.054	0.090	15	0.0014	0.015	0.108
16			0.031	0.060	17		0.0054	0.078
18			0.016	0.038	19		0.0014	0.054
20			0.0071	0.022	21		0.0002	0.036
22			0.0028	0.012	23			0.023
24			0.0009	0.0063	25			0.014
26			0.0002	0.0029	27			0.0083
28				0.0012	29			0.0046
30				0.0004	31			0.0023
					33			0.0011
					35			0.0005

Fuente: Biometrika Tables for Statisticians, Vols. I y II, editado por E. S. Pearson y H. O. Hartley, Biometrika Trust, Oxford University Press, 1976.

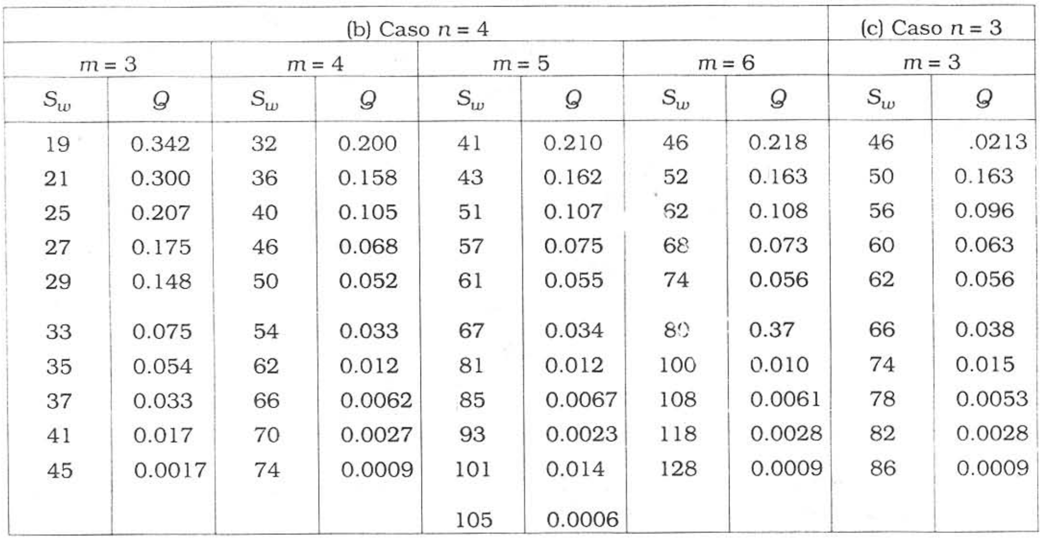
Valores críticos coeficiente de concordancia (i)



(a) Caso $n = 3$

$m = 3$		$m = 5$		$m = 6$		$m = 7$		$m = 8$		$m = 9$		$m = 10$	
S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q
6	0.528	14	0.367	18	0.252	24	0.237	26	0.236	32	0.187	32	0.222
8	0.361	18	0.182	24	0.184	26	0.192	32	0.149	38	0.154	42	0.135
14	0.194	24	0.124	26	0.142	32	0.112	38	0.120	42	0.107	50	0.092
18	0.028	26	0.093	32	0.072	38	0.085	42	0.079	50	0.069	56	0.066
		32	0.039	38	0.052	42	0.051	50	0.047	56	0.048	62	0.046
		38	0.024	42	0.029	50	0.027	56	0.030	62	0.031	74	0.026
		42	0.0085	50	0.012	56	0.016	72	0.0099	78	0.010	86	0.012
		50	0.0008	54	0.0081	62	0.0084	78	0.0048	86	0.0060	96	0.0075
				56	0.0055	72	0.0036	86	0.0024	98	0.0029	104	0.0034
				62	0.0017	78	0.0012	98	0.0009	104	0.0013	122	0.0013
				72	0.0001	96	0.0003			114	0.0007	126	0.0008

$m = 4$	
S_w	Q
8	0.431
14	0.273
18	0.125
24	0.069
26	0.042
32	0.0046



(b) Caso $n = 4$ | (c) Caso $n = 3$

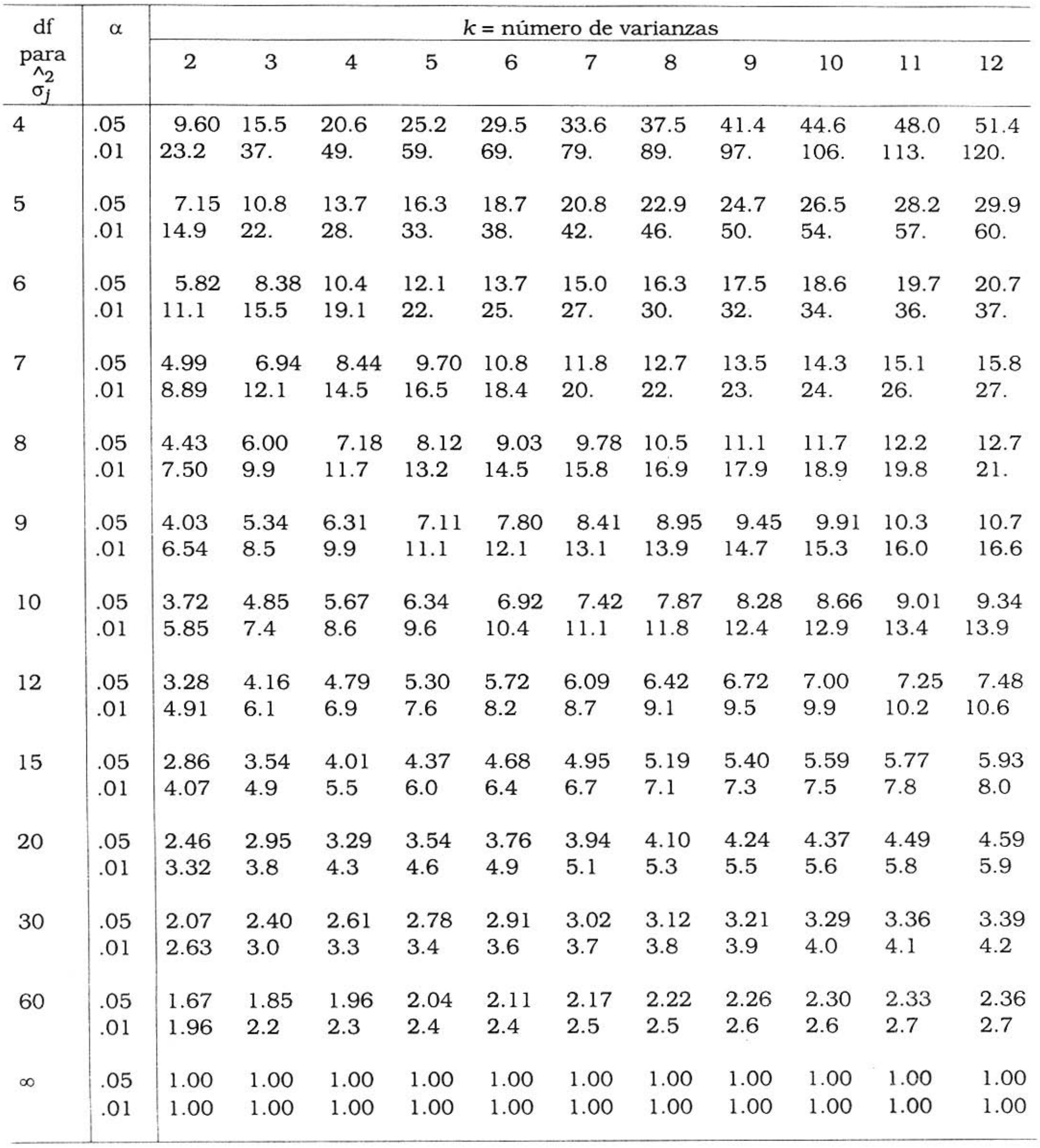
$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$		$m = 6$		$m = 3$	
S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q	S_w	Q
19	0.342	32	0.200	41	0.210	46	0.218	46	.0213
21	0.300	36	0.158	43	0.162	52	0.163	50	0.163
25	0.207	40	0.105	51	0.107	62	0.108	56	0.096
27	0.175	46	0.068	57	0.075	68	0.073	60	0.063
29	0.148	50	0.052	61	0.055	74	0.056	62	0.056
33	0.075	54	0.033	67	0.034	80	0.37	66	0.038
35	0.054	62	0.012	81	0.012	100	0.010	74	0.015
37	0.033	66	0.0062	85	0.0067	108	0.0061	78	0.0053
41	0.017	70	0.0027	93	0.0023	118	0.0028	82	0.0028
45	0.0017	74	0.0009	101	0.014	128	0.0009	86	0.0009
				105	0.0006				

Valores críticos de Q (Tukey-Snedecor) para comparaciones múltiples

gl grados de libertad	Números de grupos							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36
2	6.08	8.28	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54
3	4.50	5.91	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.70	7.06	7.35	7.60
5	3.64	4.60	5.22	5.67	5.93	6.38	6.58	6.80
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.82	5.99
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27
13	3.06	3.73	4.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03
17	2.98	3.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96
19	2.96	3.59	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47
∞	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39

Fuente: Biometrika Tables for Statisticians, vols. I y II, editado por E. S. Pearson y H. O. Hartley, Biometrika Trust, Oxford University Press, 1976.

Valores críticos para la prueba de Fmáx $= \dfrac{s^2 máx}{s^2 mín}$ (prueba de Hartley de homogeneidad de varianzas)



df para $\hat{\sigma}_j^2$	α	k = número de varianzas										
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	.05	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.4	44.6	48.0	51.4
	.01	23.2	37.	49.	59.	69.	79.	89.	97.	106.	113.	120.
5	.05	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5	28.2	29.9
	.01	14.9	22.	28.	33.	38.	42.	46.	50.	54.	57.	60.
6	.05	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6	19.7	20.7
	.01	11.1	15.5	19.1	22.	25.	27.	30.	32.	34.	36.	37.
7	.05	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3	15.1	15.8
	.01	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20.	22.	23.	24.	26.	27.
8	.05	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7	12.2	12.7
	.01	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9	19.8	21.
9	.05	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91	10.3	10.7
	.01	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3	16.0	16.6
10	.05	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66	9.01	9.34
	.01	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9	13.4	13.9
12	.05	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00	7.25	7.48
	.01	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9	10.2	10.6
15	.05	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59	5.77	5.93
	.01	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5	7.8	8.0
20	.05	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37	4.49	4.59
	.01	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	5.8	5.9
30	.05	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29	3.36	3.39
	.01	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
60	.05	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30	2.33	2.36
	.01	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7
∞	.05	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Fuente: Biometrika Tables for Statisticians, vols. I y II, editado por E.S. Pearson y H. O. Hartley, Biometrika Trust, Oxford University Press, 1976.

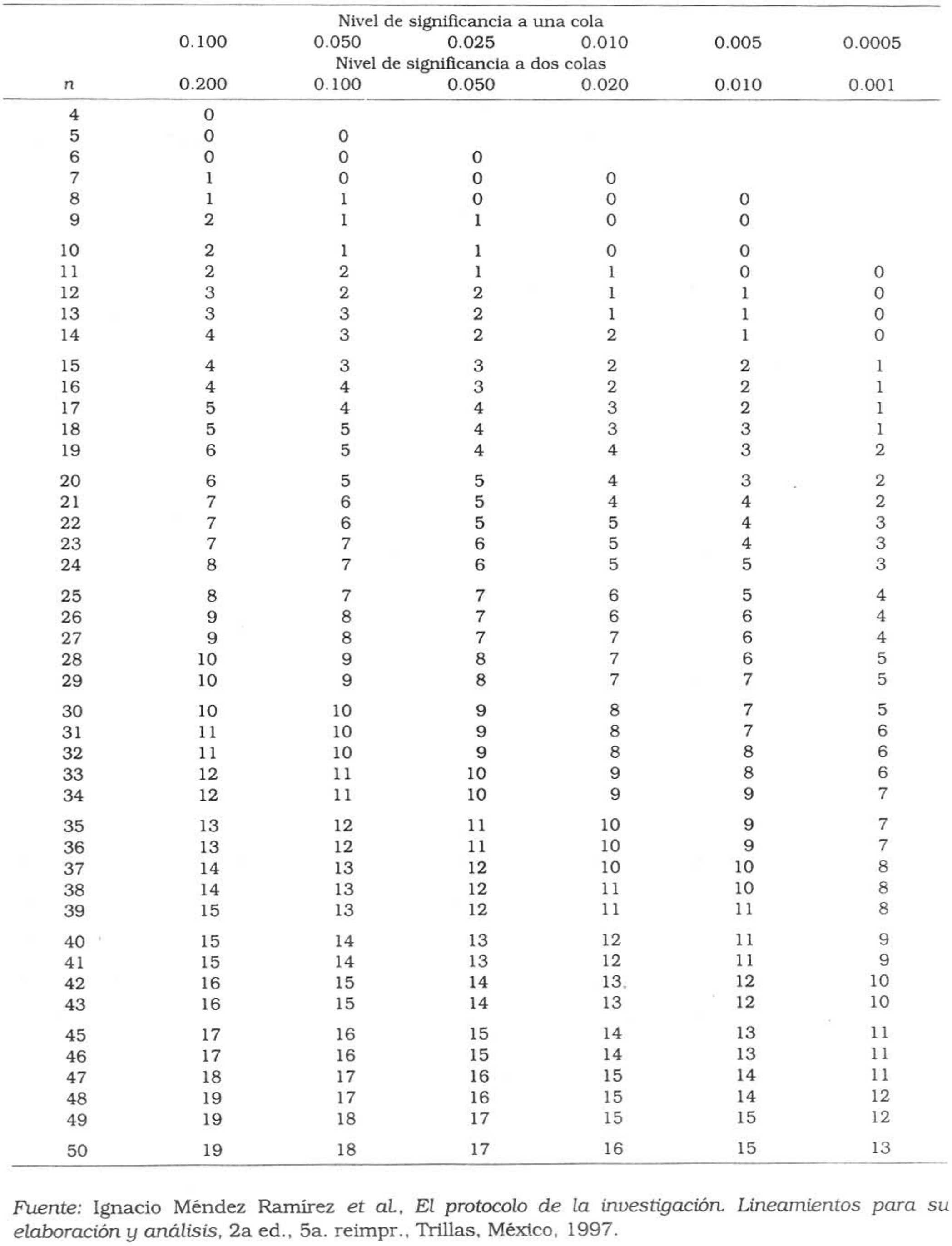
Valores críticos para la prueba de homogeneidad de varianzas de Cochran

C = (la s^2 más grande $\sum S_i^s$

gl		k = número de varianzas										
para s_j^2	$1-\alpha$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	0.95	0.9985	0.9669	0.9065	0.8412	0.7808	0.7271	0.6798	0.6385	0.6020	0.4709	0.3894
	0.99	0.9999	0.9933	0.9676	0.9279	0.8828	0.8376	0.7945	0.7544	0.7175	0.5747	0.4799
2	0.95	0.9750	0.8709	0.7679	0.6838	0.6161	0.5612	0.5157	0.4775	0.4450	0.3346	0.2705
	0.99	0.9950	0.9423	0.8643	0.7885	0.7218	0.6644	0.6152	0.5727	0.5358	0.4069	0.3297
3	0.95	0.9392	0.7977	0.6841	0.5981	0.5321	0.4800	0.4377	0.4027	0.3733	0.2758	0.2205
	0.99	0.9794	0.8831	0.7814	0.6957	0.6258	0.5685	0.5209	0.4810	0.4469	0.3317	0.2654
4	0.95	09057	0.7457	0.6287	0.5441	0.4803	0.4307	0.3910	0.3584	0.3311	0.2419	0.1921
	0.99	0.9586	0.8335	0.7212	0.6329	0.5635	0.5080	0.4627	0.4251	0.3934	0.2882	0.2288
5	0.95	0.8772	0.7071	0.4447	0.5895	0.5065	0.3974	0.3595	0.3286	0.3029	0.2195	0.1735
	0.99	0.9373	0.7933	0.6761	0.5875	0.5195	0.4559	0.4226	0.3870	0.3572	0.2593	0.2048
6	0.95	0.8534	0.6771	0.5598	0.4783	0.4184	0.3726	0.3362	0.3067	0.2823	0.2034	0.1602
	0.99	0.9172	0.7606	0.6410	0.5531	0.4866	0.4347	0.3932	0.3592	0.3308	0.2386	0.1877
7	0.95	0.8332	0.6530	0.5365	0.4564	0.3980	0.3535	0.3185	0.2901	0.2666	0.1911	0.1501
	0.99	0.8988	0.7335	0.6129	0.5259	0.4608	0.4105	0.3704	0.3378	0.3106	0.2228	0.1748
8	0.95	0.8159	0.6333	0.5175	0.4387	0.3817	0.3384	0.3043	0.2768	0.2541	0.1815	0.1422
	0.99	0.8823	0.7107	0.5897	0.5037	0.4401	0.3911	0.3522	0.3207	0.2945	0.2104	0.1646
9	0.95	0.8010	0.6167	0.5017	0.4241	0.3682	0.3259	0.2926	0.2659	0.2439	0.1736	0.1357
	0.99	0.8674	0.6912	0.5702	0.4854	0.4229	0.3751	0.3373	0.3067	0.2813	0.2002	0.1567
16	0.95	0.7341	0.5466	0.4366	0.3645	0.3135	0.2756	0.2462	0.2226	0.2032	0.1429	0.1108
	0.99	0.7949	0.6059	0.4884	0.4094	0.3529	0.3105	0.2779	0.2514	0.2297	0.1612	0.1248
36	0.95	0.6602	0.4748	0.3720	0.3066	0.2612	0.2278	0.2022	0.1820	0.1655	0.1144	0.0879
	0.99	0.7067	0.5153	0.4057	0.3351	0.2858	0.2494	0.2214	0.1992	0.1811	0.1251	0.0960
144	0.95	0.5813	0.4031	0.3093	0.2513	0.2119	0.1833	0.1616	0.1446	0.1308	0.0889	0.0675
	0.99	0.6062	0.4230	0.3251	0.2644	0.2229	0.1929	0.1700	0.1521	0.1376	0.0934	0.0709

Fuente: Journal of the American Statistical Association, vol. 75, 1980.

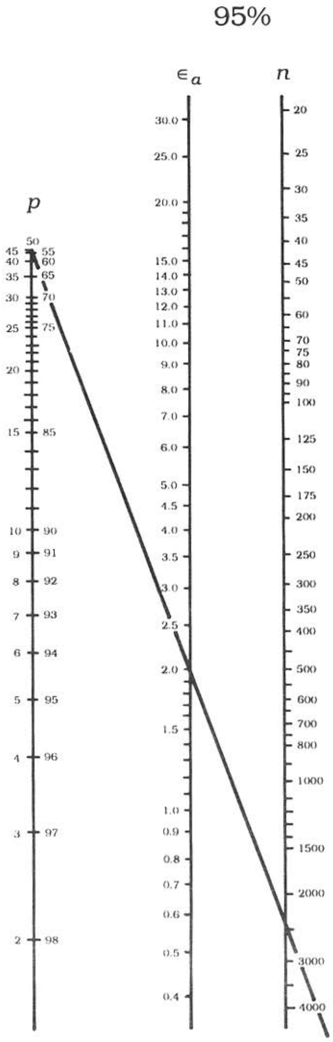
Valores de $|n|$ para la prueba de McNemar.



	Nivel de significancia a una cola					
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
	Nivel de significancia a dos colas					
n	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	0.001
4	0					
5	0	0				
6	0	0	0			
7	1	0	0	0		
8	1	1	0	0	0	
9	2	1	1	0	0	
10	2	1	1	0	0	
11	2	2	1	1	0	0
12	3	2	2	1	1	0
13	3	3	2	1	1	0
14	4	3	2	2	1	0
15	4	3	3	2	2	1
16	4	4	3	2	2	1
17	5	4	4	3	2	1
18	5	5	4	3	3	1
19	6	5	4	4	3	2
20	6	5	5	4	3	2
21	7	6	5	4	4	2
22	7	6	5	5	4	3
23	7	7	6	5	4	3
24	8	7	6	5	5	3
25	8	7	7	6	5	4
26	9	8	7	6	6	4
27	9	8	7	7	6	4
28	10	9	8	7	6	5
29	10	9	8	7	7	5
30	10	10	9	8	7	5
31	11	10	9	8	7	6
32	11	10	9	8	8	6
33	12	11	10	9	8	6
34	12	11	10	9	9	7
35	13	12	11	10	9	7
36	13	12	11	10	9	7
37	14	13	12	10	10	8
38	14	13	12	11	10	8
39	15	13	12	11	11	8
40	15	14	13	12	11	9
41	15	14	13	12	11	9
42	16	15	14	13	12	10
43	16	15	14	13	12	10
45	17	16	15	14	13	11
46	17	16	15	14	13	11
47	18	17	16	15	14	11
48	19	17	16	15	14	12
49	19	18	17	15	15	12
50	19	18	17	16	15	13

Fuente: Ignacio Méndez Ramírez *et al.*, *El protocolo de la investigación. Lineamientos para su elaboración y análisis*, 2a ed., 5a. reimpr., Trillas, México, 1997.

Ábacos para calcular el tamaño de una muestra



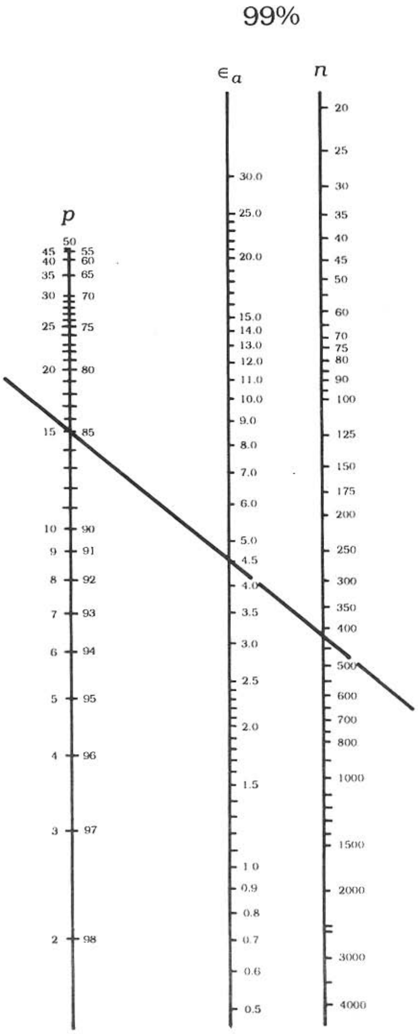


Tabla generada por Adip Sabag.

Anexo 2

Soluciones

Capítulo 2

2.1 a) $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$

b) $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2$

c) $X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 + X_4Y_4 + X_5Y_5 + X_6Y_6 + X_7Y_7$

d) $(2X_1 + 5) + (2X_2 + 5) + (2X_3 + 5)$

e) $X_2^2\, l_2 + X_3^2\, l_3 + X_4^2\, l_4$

2.2 a) $\sum_{i=1}^{17} Y_i^2$ b) $\sum_{i=1}^{100} 2Z_i$

c) $\sum_{i=2}^{5} X_iY_i^2$ d) $\sum_{i=1}^{3} (X_i^2 + 5)^3$

2.3 a) 15 b) 3 c) 35

2.4 a) 21 b) 20 c) 21 d) 6

2.5 409

2.6 a) $\overline{X} = 55.6$ $Me = 56$ Mo = No hay.

b) $S = 5.4129$ $S^2 = 29.3$

c) $CV = 9.73\%$

2.7 Método 1.

$\overline{X}_A = 8.31250$ $\overline{X}_B = 8.31250$

$SA = 1.962824$ $S_B = 1.06695$

$S_A^2 = 3.85268$ $S_B^2 = 1.13839$

$CV_A = 23.613\%$ $CV_B = 12.836\%$

Método 2.

$\overline{X}_A = 6.43750$ $\overline{X}_B = 6.43750$

$SA = 3.17847$ $S_B = 1.01550$

$S_A^2 = 10.10268$ $S_B^2 = 1.03125$

$CV_A = 49.374\%$ $CV_B = 15.775\%$

Método 3.

$\overline{X}_A = 4.000$ $\overline{X}_B = 4.000$

$SA = 2.17124$ $S_B = 0.84515$

$S_A^2 = 4.71429$ $S_B^2 = 0.71429$

$CV_A = 54.281\%$ $CV_B = 21.129\%$

Método 4.

$\overline{X}_A = 2.50$ $\overline{X}_B = 2.500$

$SA = 2.01778$ $S_B = 0.96362$

$S_A^2 = 4.07143$ $S_B^2 = 0.92857$

$CV_A = 80.711\%$ $CV_B = 38.545\%$

2.8 $\overline{X} = 4.82$ min.

Mediana = 1.5 min.

Moda = 1.0 min. y 1.5 min.

Con una $S = 9.47$ min. Que implica un coeficiente de variación de 196.5% de "Error". Esto se debe a que a una rata le tomó 30 minutos recorrer el laberinto y representa una magnitud muy grande respecto de la media; por ello la mediana es la mejor medida de tendencia central en este caso, ya que ésta no es sensible a los extremos. Lo recomendable es excluir a este sujeto.

2.9 $\overline{X} = 1.075$ $CV = 47.0350\%$ $Mo = 0.90$

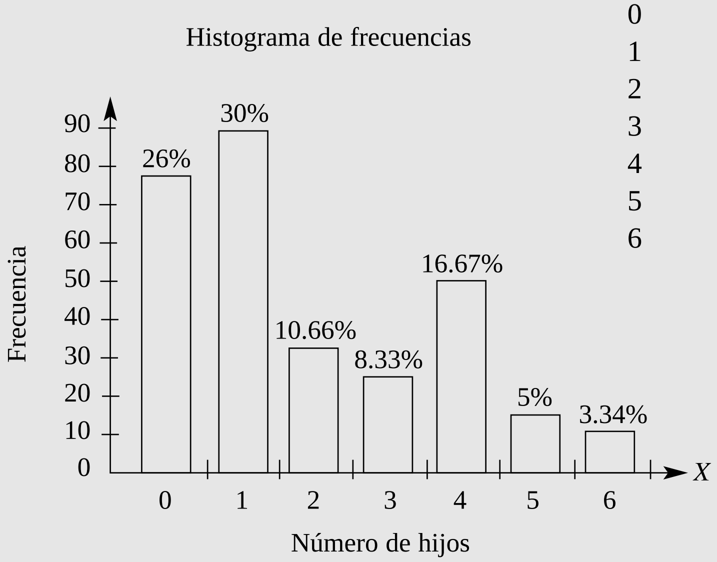
$S = 0.5056$

$S^2 = 0.2556$

2.10 Como se trata de una variable aleatoria discreta, sólo es posible presentar su histograma de frecuencias. Esto es:

$n = 300$

X	F	
0	78	26%
1	90	30%
2	32	10.66%
3	25	8.33%
4	50	16.67%
5	15	5.00%
6	10	3.34%
		100%



2.11 $\overline{X} = 716.614$

$S = 167.0527$

$S^2 = 27\,906.606$

CV = 23.31%
Me = 710.284
Mo = 660.611
Confiabilidad = 76.7%

2.12 $\overline{X}$ = 0.5344
S = 0.0047
S^2 = 0.0000221
CV = 0.87%
Me = 0.5343
Mo = 0.5337
As = +0.0504
Confiabilidad = 99%

2.13 $\overline{X}$ = 199.3073
S = 32.3468
S^2 = 1 046.3123
CV = 16.23%
Me = 192.7283
Mo = 178.6111
As = +0.61
Confiabilidad = 83.77%

2.14 $\overline{X}$ = 13 024.41
S = 2 457.39
S^2 = 6 038 765.6
CV = 18.87%
Me = 13 604.04
Mo = 14 681.32
As = –0.7076
Confiabilidad = 81.13%
n = 239

2.15 a) Para datos no agrupados
Media = 0.4838235
Desviación estándar de la muestra = 0.0360147
Varianza = 1.297059E-03 (0.001297)
Sesgo = –0.5212529
Curtosis = 2.580929
El valor máximo es: 0.55
El valor mínimo es: 0.4
El rango es: 0.15
Mediana = 0.49
CV = 7.44%

b) Para datos agrupados

$\overline{X} = 0.4831$

$S = 0.0345$

$S^2 = 0.0012$

$CV = 7.147\%$

$Me = 0.4867$

$Mo = 0.4875$

$As = -0.3109$

Confiabilidad = 92.853%

$n = 34$

2.16 Media: 3.4125

Desviación estándar de la muestra = 0.7028103

Varianza = 0.4939424

Sesgo = –0.3368486

Curtosis = 3.012605

El valor máximo es: 4.7

El valor mínimo es: 1.6

El rango es: 3.1

Mediana = 3.4

2.17 Mínimo: 0.2

Máximo: 5.2

Media: 1.40

$Me = 1.177$

$S = 1.00$

$S^2 = 1.01$

$Mo = 1.019$

$CV = 72.39\%$

Confiabilidad = 27.61%

$As = 0.35$

2.18 $n = 28$
$\overline{X} = 80.679$
$S = 11.902$
$S^2 = 141.65$
$CV = 14.75\%$
Confiabilidad = 85.25%

2.19

Tiempo	Tiempo transformado
2.50	2.8733
2.55	2.917
3.00	3.00
3.00	3.00
3.10	3.167
3.05	3.001
3.07	3.001
3.20	3.333
3.22	3.367
3.30	3.500
3.38	3.633
3.50	3.833
4.00	4.000
4.05	4.001
4.30	4.500
4.15	4.250
3.18	3.300
3.25	3.417
2.58	2.967
3.19	3.317
3.24	3.400
3.25	3.417
3.32	3.533
3.22	3.367
3.22	3.367

Nota: El tiempo se transforma de la siguiente manera:

para 2.50

$$2.50 = 2 + \frac{50}{60} = 2 + 0.833$$

$$\boxed{2.50 = 2.833}$$

para 4.30

$$4.30 = 4 + \frac{30}{60} = 4 + 0.5$$

$$\boxed{4.30 = 4.5}$$

Con los tiempos transformados se obtiene $\overline{X}$ y S.

$\boxed{\overline{X} = 3.417}$ $\boxed{S = 0.42702}$

Se regresan al tiempo original

3.417 = 3 + 0.417 = 3 + (0.417 × 60 min)

$$\boxed{\overline{X} = 3.25}$$

0.42702 × 60 = 25.621 = 25 min

0.621 × 60 = 37 seg

$$\boxed{S = 25 \text{ min con } 37 \text{ seg}}$$

2.20

Media	1.58
Desv. E.	0.47
Varianza	0.22
Mínimo	0.65
Máximo	2.55
Amplitud	1.90
Redondeo	2.00
CV	29.86

$K = 8$		Moda	1.72
Intervalo	0.25	Mediana	1.65
$K = 10$		Moda	1.69
Intervalo	0.20	Mediana	1.64
$K = 12$		Moda	1.70
Intervalo	0.17	Mediana	1.65

2.21 Edad: $\overline{X} = 29.7$ años; $s = 7.54$

Sexo: hombres, 55%; mujeres, 45%

Raza: caucásica 95%; color, 5%

Localización de la lesión: lengua, 15%; paladar, 25%; piso de boca, 20%; mucosa yugal, 20%; labios, 10%; encías, 10%

Lesiones extraorales: zonas cutáneas, 40%; mucosas, 60%

Frecuencia de recidiva: no hubo, 30%; sí hubo, 70%

2.22 Edad: $\overline{X} = 34.75$ años; $s = 15.24$; $s^2 = 232.3$

Sexo: hombres, 60%; mujeres, 40%

Diente por tratar: anteriores, 35%; premolares, 30%; molares, 35%

Número de conductos: 1, 50%; 2, 20%; 3, 30%

Vitalidad: vital, 45%; no vital, 55%

Antecedentes de caries, 15%; resina, 35%; amalgama, 20%; incrustración, 25%, otros, 5%

Tratamiento: recubrimiento, 15%; de conductos, 45%; cirugía periapical, 20%; otros, 20%

2.23 Esta media aritmética no es representativa

$\overline{X} = 4$

$S = 6.708$ $Me = 1$

$S^2 = 45$ Mo = No hay

$CV = 167\%$

2.24 $\overline{G} = 35.38\%$

La media geométrica es la medida de tendencia central más adecuada que la media aritmética cuando se promedian tasas de cambio. Esta medida no puede utilizarse cuando haya valores negativos o ceros.

2.25 Por kilogramo vale 2.06.

2.26 $$\overline{X}p = \frac{(1\times 6.5)+(1\times 7)+(1\times 8.5)+(2\times 9)}{1+1+1+2}$$

$$\overline{X}p = \frac{40}{5} = 8.0$$

Capítulo 3

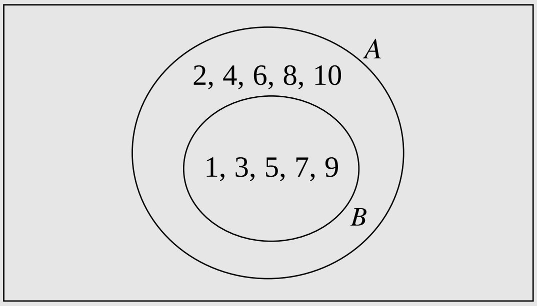
3.1 a) c), d), e), f)

3.2 a) $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b. c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\varnothing$, esto es 2^n, o sea $2^3 = 8$ subconjuntos.

b) $\{a, b. c\}$

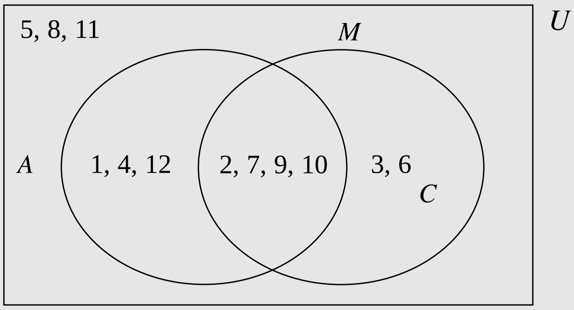
3.3 $A' = \{2, 4, 6, 8. 10\}$

3.4 $A' = \{2, 4, 6, 8. 10\}$



$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

3.5



$C = (A \cup M)'$

3.6 $A = \{\, x \mid x$ utilizan autobús$\}$

$M = \{x \mid x$ utilizan metro$\}$

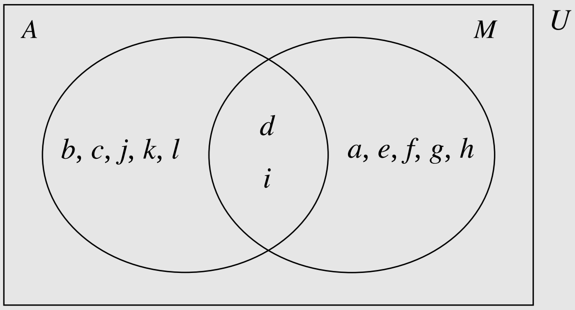
$C = \{x \mid x$ caminan a su trabajo o utilizan automóvil propio$\}$

3.7 1) *V*
2) *F*
3) *V*
4) *V*
5) *F*
6) *F*
7) *V*
8) *F*
9) *V*
10) *V*

3.8 $C \approx D$
$C \neq D$
$C \neq E$
$C = F$

$G \neq H$
$C \approx H$
$C \neq G$
$D \approx F$
$D \approx H$

3.9



3.10

	F	$\overline{F}$	Total
H	45	15	60
M	30	10	40
	75	25	100

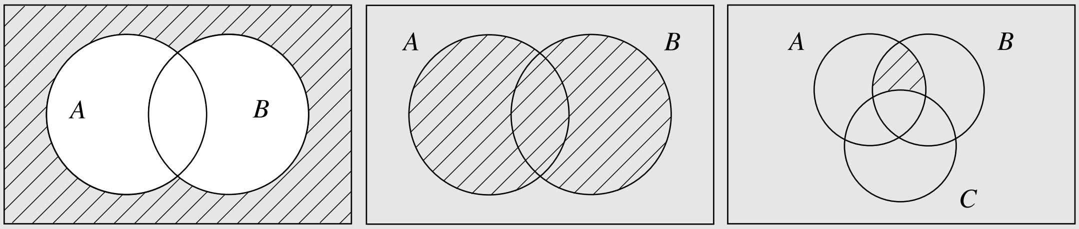
3.11 a) $\{1, 3, 5\}$
b) $\{2, 4\}$
c) $\{\} = \varnothing$
d) $\{\} = \varnothing$
e) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
f) $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
g) $\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
h) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
i) $\{ \} = \varnothing$
j) $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$
k) $\{2, 4\}$
l) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
m) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
n) $\{6, 8, 10\}$
o) $\{ \} = \varnothing$

3.12 a) $A\ B\ C$ 1, 3, 5 U
b) $A\ B\ C$ 2, 4 U
c) $A\ B\ C\ \varnothing\ U$
d) Conjunto vacío
e) $A\ B\ C$ 2 4 1 3 5 7 9 U
f) $A\ B\ C$ 2 4 1 3 5 7 9 U

3.13 a) {–5, –4, –3, –2, –1, 0 , 1, 2, 3, 4, 5}
b) {0, 1, 2, 3, 4, 5 –2, –4}
c) {1, 2, 3, 4, 5, –2, –4, 0}
d) {1, 2, 3, 4, 5}

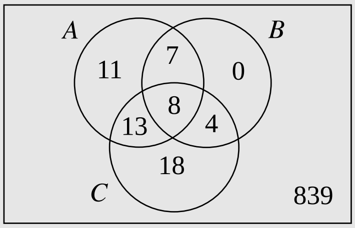
3.14 a) 410
b) 200
c) 35

3.15 a) b) c)



Donde: *a*) $(A\cup B)'$ es lo sombreado *b*) $b(A'\cap B')$ *c*) $A\cap B - (A\cap B\cap C)$ es lo sombreado

3.16 a) 4 artículos n $[(B\cap C) - (A\cap B\cap C)]$
b) $\varnothing$, $n\ [B - (A\cap B \cup B\cap C) \cup A\cap B\cap C]$
c) 839 artículos, $n\ (A\cup B\cup C)'$
d) 49 artículos, $n\ [(A\cup B\cup C) - (B\cap C)]$
e) 29 artículos, $n\ \{(A\cup B\cup C) - (A\cap B) \cup [(A\cap C) - (A\cap B\cap C)] \cup [(B\cap C)\ (A\cap B\cap C)]\}$
f) 24 artículos, $n\ [(A\cap B) - (A\cup B\cup C)] \cup [(A\cup C) - (A\cap B\cap C)] \cup [(B\cap C) - (A\cap B\cap C)]$



g) 61 artículos, $n\ (A \cup B \cup C)$

h) 32 artículos, $n\ \{(A \cap B) \cup [(A \cap C) - (A \cap B \cap C)] \cup [(B \cap C) - (A \cap B \cap C)]\}$

i) 868 artículos, $n\ \{(A \cap B) \cup [(A \cap C) - (A \cap B \cap C)] \cup [(B \cap C) - (A \cap B \cap C)]'\}$

j) 892 artículos, $n\ (A \cap B \cap C)'$

3.17

	H	*M*	C_u	Total
A	18	24	9	51
B	11	8	19	38
C	9	10	12	31
Total	38	42	40	120

1) a) 69
   b) 31
   c) 42
   d) 19
   e) 9
   f) 42

2) 38 hondureños
   42 mexicanos
   40 cubanos

3.18

	V	*R*	*A*	*Am*	Total
M	4	10	5	3	22
F	1	6	11	12	30
P	1	3	4	1	9
Total	6	19	20	16	61

1) a) 6
   b) 39
   c) 35
   d) 5
   e) 60
   f) 57
   g) 26

2) a) 10
   b) 6
   c) 10
   d) 5
   e) 3
   f) 4
   g) 11
   h) 12
   i) 1
   j) 4
   k) 1
   l) 1

3.19 a) $(A \cup B) = n(A) + n(B)$
b) $n(A \cap B) = \varnothing$

3.20 a) 8
b) A^+, B^+, AB^+, O^+, A^-, B^-, AB^-, O^-

3.21 a) 18 personas
b) 6 personas

3.22

	Mexicanos	Extranjeros	Total
Hombres	8	170	178
Muchachos	2	16	18
Muchachas	16	14	30
Total	26	200	226

3.23 a)
I. $A - [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$
II. $B - [(A \cap B) \cup (B \cap C)]$
III. $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$
IV. $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$
V. $A \cap B \cap C$
VI. $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$
VII. $C - [(A \cap C) \cup (B \cap C)]$
VIII. $(A \cup B \cup C)'$

b) I. $A - [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$
II. $B - [(B \cap D) \cup (B \cap C)] \cup (B \cap A)]$
III. $C - [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cup (C \cap D)]$
IV. $B \cap C - [(A \cap B \cap C) \cup (B \cap D \cap C)]$
V. $A \cap B \cap C$
VI. $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$
VII. $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$
VIII. $(A \cup B \cup C \cup D)'$
IX. $(B \cap D) - (B \cap C \cap D)$
X. $B \cap C \cap D$
XI. $D - [(C \cap D) \cup (B \cap D)]$
XII. $C \cap D - (B \cap D \cap C)$

3.24 I) a) 97
b) 97
c) 17
d) 68
e) 64
f) 75
g) 21
h) 97

	$H \cap L$	$P \cap L$	$T \cap H$	$P \cap T$	Total
A	22	13	11	4	50
B	17	18	7	5	47
	39	31	18	9	97

II)

a) Conjunto de altas o bajas
b) Conjunto de muchachas hermosas o orgullosas
c) Conjunto de muchachas altas y orgullosas
d) Conjunto de todas las altas o orgullosas y listas
e) Conjunto de todas excepto hermosas y listas así como hermosas y tímidas
f) Conjunto de todas excepto las (bajas hermosas y orgullosas) y hermosas, listas y bajas)
g) Conjunto (hermosas listas y bajas) o (orgullosas, altas y tímidas)

3.25 a) $A \cup B = A = B$

b) A o B

c) $\{x : x = 0, 1, 2 \ldots 10\}$

d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

e) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30\}$

f) $\{10\}$

g) $\{x \mid x \; \varepsilon \; 0 \leq \mathrm{x} \leq 10\}$

h) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

i) $\{x \mid x = 20, 30 \text{ o } 0 \leq x \leq 10\}$

j) $\{10\}$

k) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 30\}$

l) $\{0\}$

m) $\{x \mid x = 0 \leq x \leq 10\}$

n) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

o) A

p) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

q) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

r) B

3.26 a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B' \cup A$

d) $U - (A - B)$

3.27

Sistema	Trimestral	Semestral	Total
Licenciatura	27	23	50
Posgrado	6	29	35
Total	33	52	85

a) 52

b) 6

3.28 Puesto que 70 compran *El imparcial*

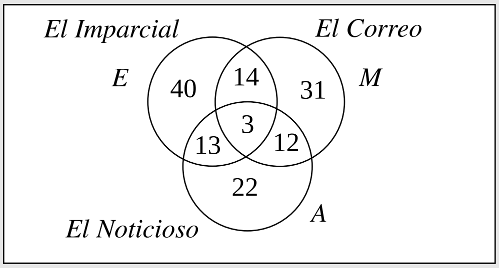
$n\ \{E \cap (\overline{M} \cup \overline{A}) = 70 - 14 - 13 - 3 = 40$

40 compran solamente *El Imparcial*

$n\ \{M \cap (\overline{A} \cup \overline{E}) = 60 - 12 - 14 - 3 = 31$

31 compran solamente *El Correo*

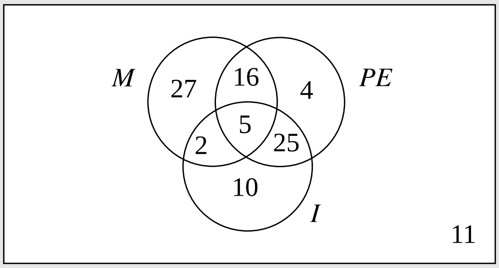
$n\ \{A \cap (\overline{E} \cup \overline{M}) = 50 - 12 - 13 - 3 = 22$



40 + 14 + 31 + 12 + 3 + 13 + 22 lectores

Podemos ver que la agencia noticiosa tiene: 135 lectores.

3.29 a)



b) i) $n(PE \cap H \cap I) = 25$

ii) $n(H \cap D) = 15$

c)

	$E \cap I$	$\bar{E} \cup \bar{I}$	$\bar{E} \cup \bar{I}$	$\bar{E} \cup I$	Total
M	5	27	16	2	50
H	25	11	4	10	50
					100

50 machos

50 previamente entrenados

42 entrenados tomaron a la izquierda en la primera oportunidad

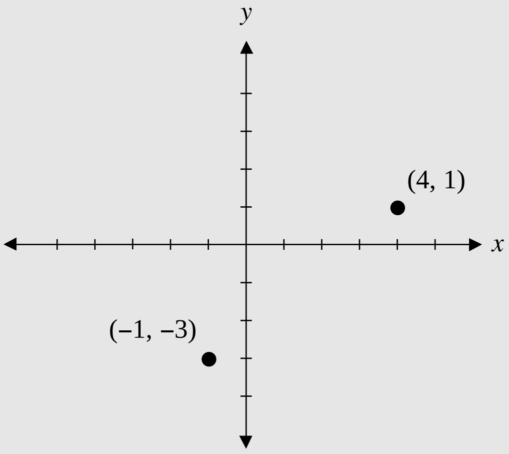
21 machos entrenados previamente

7 machos tomaron a la izquierda

30 ratones previamente entrenados tomaron a la izquierda

5 machos previamente entrenados tomaron a la izquierda

3.30 Función



3.31 {(3, 5), (2, 5)} $D = \{3, 2\}$ $CD = \{5\}$ Función

3.32
a) función
b) función
c) función
d) función
e) función

3.33 A(**6,** – 3) y B(– 2, 3)

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$$m\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-3)}{-2-(6)} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4} \qquad y-(-3) = -\frac{3}{4}(x-6)$$

$$y - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \qquad 3x + 4y = 6$$

3.34 $m = 4$ $y - y_1 = m\,(x - x_1)$
$A(2, -3)$ $y - (-3) = 4\,(x - 2)$
$y = 4x - 11$
$4x - y = 11$

3.35 $y = 4x - 3$
$m = 4,\ b = -3$

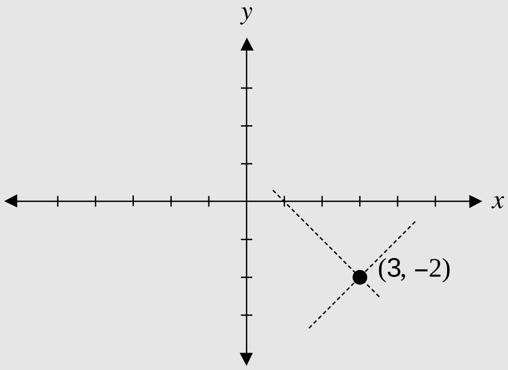
3.36 $m_1 = \dfrac{-6-2}{3-1}$ $\qquad m_2 = \dfrac{7-(-5)}{-1-2}$

$m_1 = \dfrac{-8}{2}$ $\qquad m_2 = \dfrac{12}{-3}$

$m_1 = -4$ $\qquad m_2 = -4$

Como $m_1 = m_2$, se deduce que L_1 y L_2 son paralelas.

3.37 a)



b) $y = \dfrac{2}{3}x - 4$

$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$

c) En el punto de intersección las coordenadas y son iguales *y* son iguales y, por tanto en este punto los segundos miembros de las ecuaciones también son iguales. Al igualar estas dos expresiones resulta:

$$\frac{2}{3}x - 4 = -\frac{4}{3}x + 2$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x = 2 + 4$$

$$\frac{6}{3}x = 6$$

$$x = \frac{18}{6} = 3$$

Este valor de x es la abscisa del punto de intersección. Para determinar la ordenada sustituya de la siguiente manera.

$$y = \frac{2}{3}x = -4$$

$$y = \frac{2}{3}(3) - 4$$

$$y = -2$$

Por tanto, el punto de intersección es (3, –2).

3.38 Si m_1 es la pendiente que pasa por A y B, y m_2 es la pendiente que pasa por B y C, entonces:

$$m_1 = \frac{-1-(-4)}{2-(-3)}$$

$$m_1 = \frac{3}{5}$$

$$m_2 = \frac{2-(-1)}{7-2}$$

$$m_2 = \frac{3}{5}$$

Así que $m_1 = m_2$. Por tanto, la recta que pasa por A y B, y la que pasa por B y C tienen la misma pendiente y el punto común B. Así pues, ambas son la misma recta y por ello, A, B y C son colineales.

3.39 $A^2 = I$ Es una matriz idempotente.

3.40 $A^3 = O$ La matriz se llama *matriz nilpotente*

3.41 A es una matriz simétrica.

3.42 $AB = (BA)$

3.43 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{4} & 2 & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & -1 & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ $|A| = -8$ A es no singular, si tiene matriz inversa.

3.44 Como $|B| = 0$. es una matriz singular y no tiene inversa.

3.45 No tiene solución el sistema.

3.46 $(x, y) = (0, 0)$ det $|A| = -11$

3.47 $x = \frac{-13}{5}$ $y = -\frac{15}{5}$

3.48 $x = 2$

$y = -3$

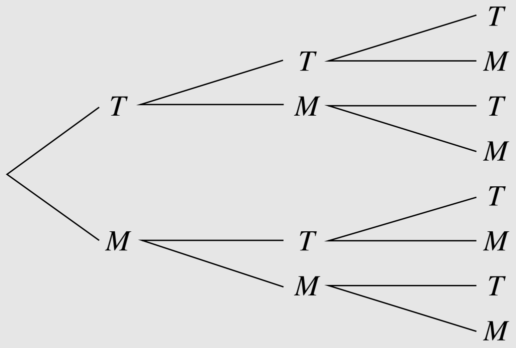
$z = 1$

3.49 $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 0$

3.50 $|D| = 0$ El sistema no tiene *solución*.

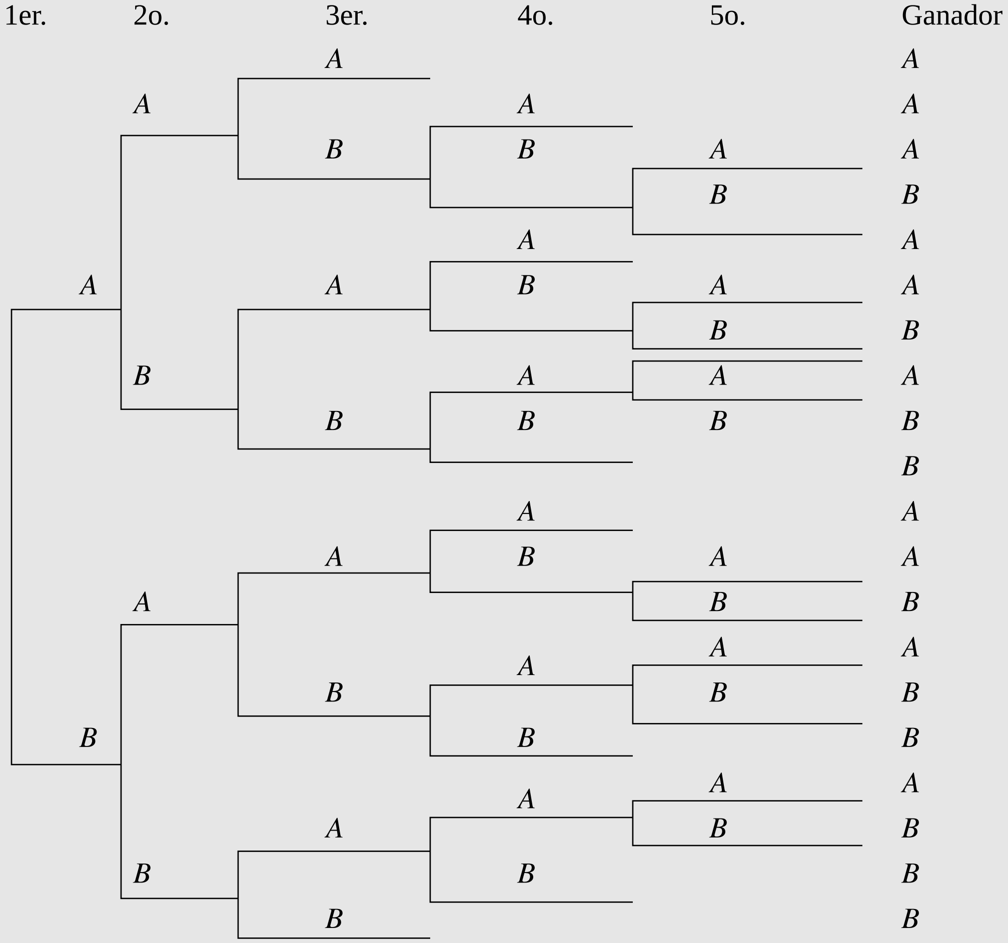
Capítulo 4

4.1 a) T = Trigo. M = Maíz



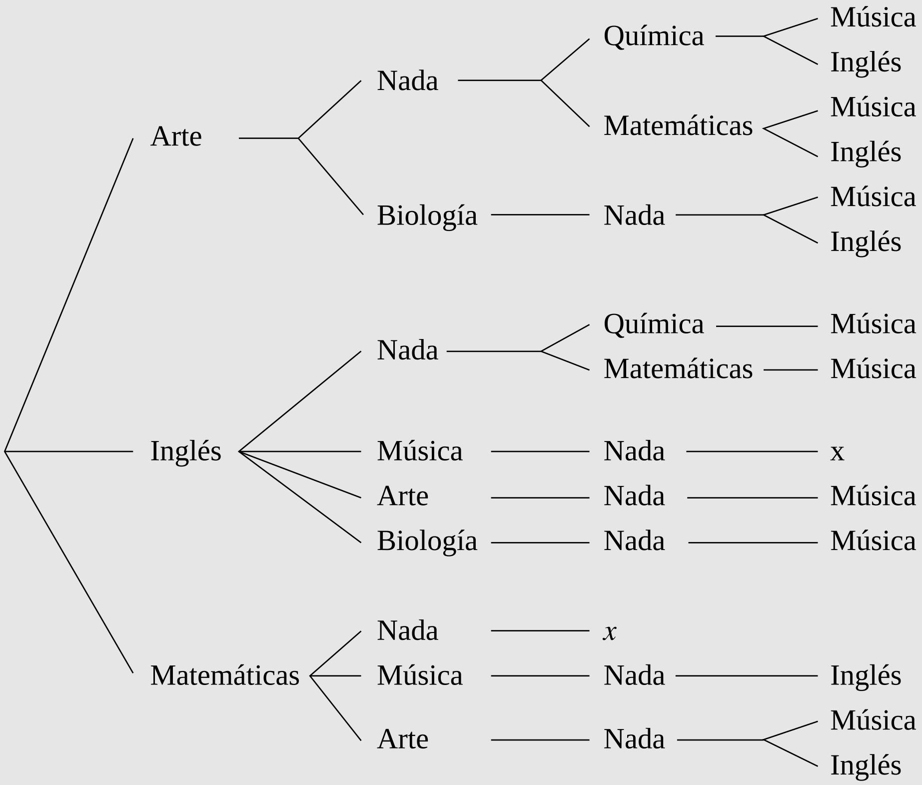
b) {*TTT, TTM, TMT, TMM, MTT, MTM, MMT, MMM*}

4.2



n = 20 (número de combinaciones)

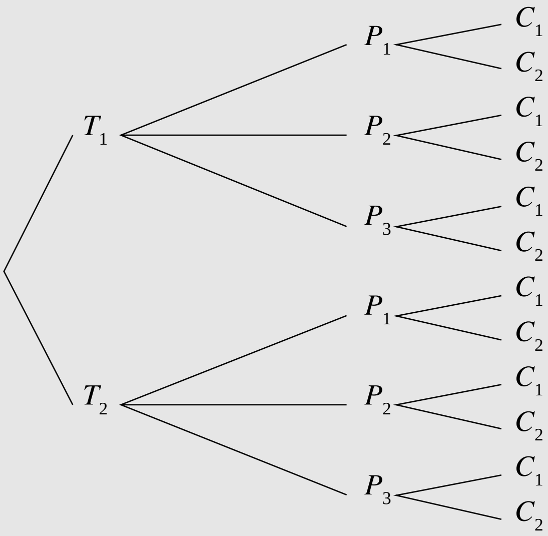
4.3



4.4 Dos postres para que el letrero sea cierto y se obtengan 216 comidas diferentes.

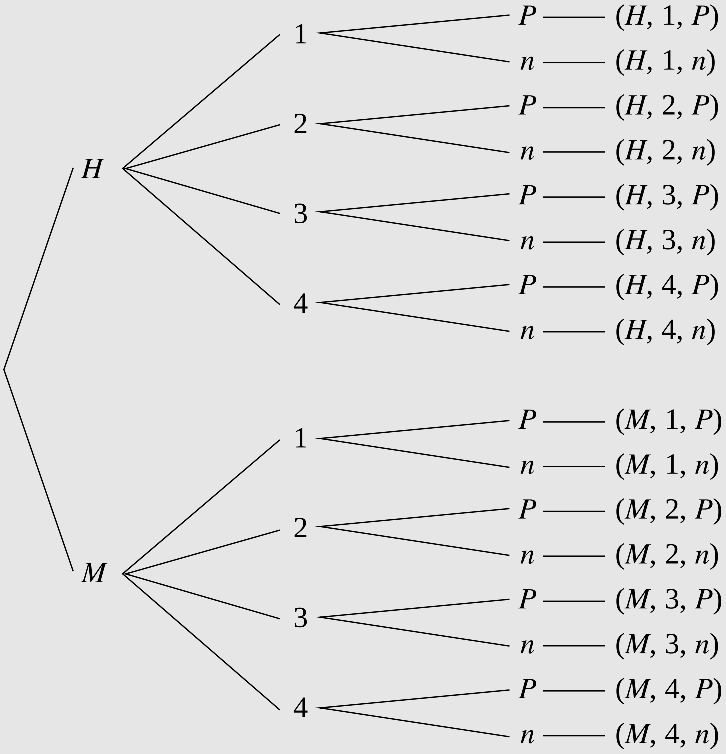
4.5 30 240 listas.

4.6



12 experimentos diferentes.

4.7 a)



b) 16

4.8 294 autos diferentes

4.9 1 680. Aplique el principio de multiplicación.

4.10 a) 992, sí importa el orden.

b) 496, no importa el orden.

4.11 a) 11 232 000

b) 17 576 000

c) 22 464 000 y 35 152 000 juegos de placas, respectivamente.

4.12 18 009 460 combinaciones diferentes.

4.13 $(n - 1)! => (12 - 1)! = 11! = 39\,916\,800$, formas diferentes.

4.14 $(4 - 1)! = (3!) = 6$ collares diferentes.

4.15 $C_6^6 = 1 \quad C_5^6 = 6 \quad C_4^6 = 15 \quad C_3^6 = 20 \quad C_2^6 = 15 \quad C_1^6 = 6 \quad C_0^6 = 1$

4.16 7 × 5 = 35 parejas diferentes.

4.17 92 000 parejas diferentes.

4.18 1 365 equipos diferentes.

4.19 210 exámenes diferentes.

4.20 a) 60 nombres diferentes
b) 10 080
c) 20 160 nombres diferentes
d) 1) Kalimán 2 520 nombres diferentes.
e) 360

4.21 a) r^3
b) $2 + 2r + 2r^2 + 2r^3$
c) 302 integrantes.

Capítulo 5

5.7 p = Porcentaje de niños que toman cursos extra-clase

N = 450 alumnos inscritos

El cálculo del tamaño de muestra se realiza suponiendo un muestreo irrestricto aleatorio, varianza máxima y 95% de confianza

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}pq}{d^2}, \qquad n = \frac{1.96^2_{\alpha/2}(0.5)(0.5)}{d^2}$$

d	n
0.02	2401
0.03	1068
0.04	601
0.05	385

5.8 Los diferentes tamaños de muestra se calculan suponiendo un muestreo irrestricto aleatorio, varianza máxima y nivel de precisión fijo de 5 puntos.

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}pq}{d^2}, \qquad n = \frac{Z^2_{\alpha/2}(0.5)(0.5)}{0.05^2}$$

Confianza	$Z_{\alpha/2}$	N
80	1.28	164
85	1.44	208
90	1.65	273
95	1.96	385
99	2.58	666

5.10 i) Suponiendo un *mia* ii) Suponiendo un estratificado urbano-rural

i)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right), \text{ donde}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

ii)

$$\bar{X}_{st} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} N_i \bar{x}_i$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{L} N_i^2 \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right)\frac{s_i^2}{n_i}$$

Desarrollando con la información del ejercicio la estimación del número promedio de hijos queda de la siguiente manera:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{n}$$

$$\bar{X} = 3.74$$

$$\bar{X}_{st} = \frac{1}{550}\sum_{i=1}^{2} N_i \bar{x}_i$$

$$\bar{X}_{st} = 3.75$$

Y la varianza de la media:

$$V(\bar{X}) = \frac{s^2}{100}\left(1 - \frac{100}{550}\right)$$

$$V(\bar{X}) = 3.8307$$

$$V(\bar{X}_{st}) = \frac{1}{550^2}\left[260^2\left(1 - \frac{47}{260}\right)\left(\frac{s_1^2}{47}\right) + 290^2\left(1 - \frac{53}{290}\right)\left(\frac{s_2^2}{53}\right)\right]$$

$$V(\bar{X}_{st}) = 0.13482$$

5.12 $N = 140$ escuelas

$n = 10$ Muestra tomada con un *mia*

Media	Varianza	Límite de error de estimación
$\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$	$V(\bar{X}) = \dfrac{N-n}{Nn\bar{M}^2} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}m)}{n-1}$	$LE = Z_{\alpha/2}\sqrt{V(\bar{X})}$
$\bar{X} = 2.487$	donde	$LE = 0.48928$
	$\bar{M} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} mi}{n}$	
	Considerando los valores del ejercicio	Intervalo de confianza
	$\bar{M} = \dfrac{593}{10} = 59.3$	$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{V(\bar{X})}$
	$V(\bar{X}) = \dfrac{140-10}{(140)(10)(59.3)^2} \dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - (2.487)m_i)}{10-1}$	$2.49 \pm 1.96\sqrt{0.062317}$
	$V(\bar{X}) = 0.062317$	$(1.998,\ 2.977)$

5.13

X = Tiempo que debe dar a sus estudiantes para resolver el examen

$\bar{X} = 76$

$s^2 = 113$

$V(\bar{x}) = 6.6641$

$LE = 5.0597$

Intervalo de confianza

(70.94, 81.06)

Capítulo 6

6.1 a) $n = 20$, b) $P(R) = \frac{1}{2}$, c) $P(B) = \frac{1}{4}$, d) $P(A) = \frac{1}{4}$

6.2 a) No, porque 0.07 es mayor que 0.10 × 0.10 = 0.010

b) $P(I \cap D) = 0.07$ (7%)

c) $P(I) + P(D) - P(I \cap D) = 0.10 + 0.10 - 0.07 = 0.13$ (13%)

6.3 a) $N = 50$ b) $n(m) = 20$ c) $n(H) = 30$ d) $P(M) = \frac{2}{5}$ e) $P(H) = \frac{3}{5}$

6.4 a) $\overline{E}_1$ (cruz en la moneda y cualquier número en el dado)

b) 1, 2, 4 o 5 en el dado y cualquier lado en la moneda.

c) Probabilidad de cara en la moneda y 1, 2, 4 o 5 en el dado.

6.5 a) $S = \{A, B, C, D\}$

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{1}{4}$

b) $\begin{pmatrix} AB & BC \\ AC & BD \\ AD & CD \end{pmatrix}$ para cualquier pareja, por ejemplo: $P(AB) = \frac{1}{6}$

c) AB BC AA CC

AC BD BB

AD CD CC

para cualquier pareja $P(AB) = \frac{1}{10}$

6.6 a) $P(C) = \frac{1}{3}$ d) $P\,(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}$

b) $P = (A \cup B) = \frac{2}{3}$ e) $P\,(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$

c) $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$ f) $P(B \cup C) = \frac{2}{3}$

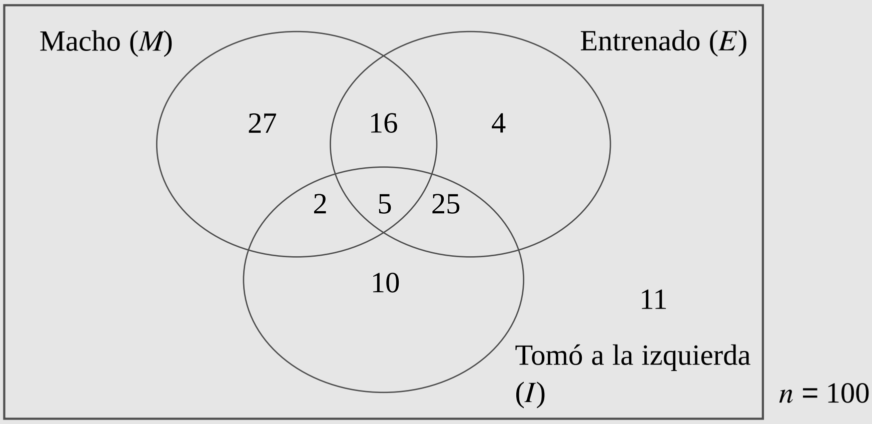
6.7 a) $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$ e) $(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{2}{3}$

b) $P(\overline{B})=\frac{1}{2}$ f) $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{6}$

c) $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ g) $P(\overline{A\cup B})=\frac{1}{3}$

d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{3}$ h) $P(\overline{A}\cup B)=\frac{5}{6}$

6.8 a) Diagrama de Venn-Euler



b)

Diagrama de Carroll

	$E\cap I$	$\overline{E}\cap\overline{I}$	$E\cap\overline{I}$	$\overline{E}\cap I$	Total
M	5	27	16	2	50
H	25	11	4	10	50
					100

c) $\frac{25}{100}$ e) $\frac{4}{100}$

d) $\frac{2}{100}$

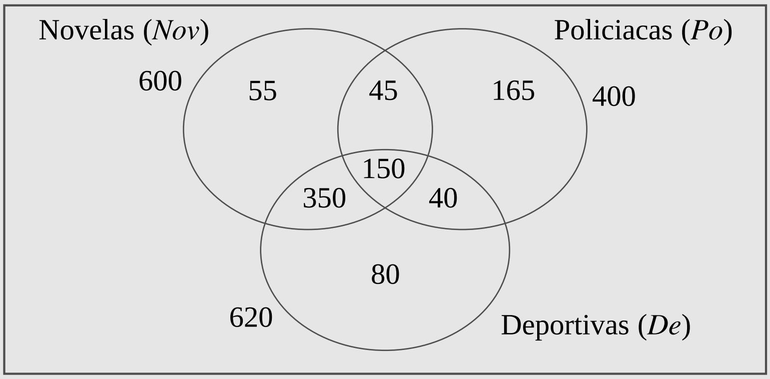
6.9 a) $\frac{55}{885}$ = 0.06215 = >6.21%

b) $\frac{195}{885} = 0.2203 = >22.03\%$

c) $\frac{0}{885} = 0$ Recuerde que todas al menos ven uno de estos programas.

d) $\frac{190}{885} = 0.21469 = >21.47\%$

e) $\frac{40}{885} + \frac{350}{885} = 0.04519 + 0.39548 = 0.44 \approx 44\%$



a) $P(\text{únicamente } Nov) = \frac{55}{885}$

b) $P(Nov \cap Po) = \frac{195}{885}$

c) $P(\text{ningún programa}) = 0$

d) $P(\text{policiacas} \cap \text{deportivas}) = \frac{190}{885}$

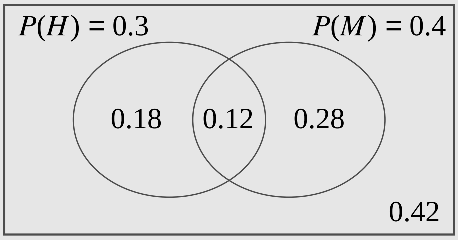
e) $P[(\overline{Po} \cap De \cap \overline{No}) \cup (\overline{No} \cap De \cap \overline{Po})] = \frac{40}{885} + \frac{350}{885} = \frac{390}{885}$

6.10 a) $P(H \cap M) = P(H)\,P(M) = 0.12$
b) Como $P(H) = 0.3$, $P(\overline{H}) = 0.7$
c) Como $P(M) = 0.4$, $P(\overline{M}) = 0.6$
d) $P(\overline{H} \cap \overline{M}) = 0.42$

e) $P(H \cup M) = 0.58$

f) $P(\overline{H}\,\overline{\cap}\,\overline{M}) = 1 - P(H \cap M) = 1 - 0.12 = 0.88$

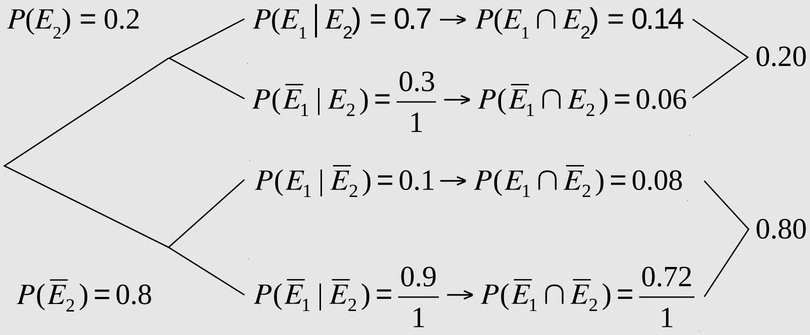
g) Diagrama de Venn



6.11 a)

	Llueva mañana E_1	No llueva mañana	
Llueve hoy E_2	$E_1 \cap E_2 = 0.14$	$\overline{E}_1 \cap E_2 = 0.06$	0.20
No llueve hoy $\overline{E}_2$	$E_1 \cap \overline{E}_2 = 0.08$	$\overline{E}_2 \cap \overline{E}_1 = 0.72$	0.80
	0.22	0.78	1

b)



$P(E_2) = 0.2$

$P(E_1 | E_2) = 0.7 \rightarrow P(E_1 \cap E_2) = 0.14$

$P(\overline{E}_1 | E_2) = \frac{0.3}{1} \rightarrow P(\overline{E}_1 \cap E_2) = 0.06$

0.20

$P(E_1 | \overline{E}_2) = 0.1 \rightarrow P(E_1 \cap \overline{E}_2) = 0.08$

$P(\overline{E}_1 | \overline{E}_2) = \frac{0.9}{1} \rightarrow P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = \frac{0.72}{1}$

0.80

$P(\overline{E}_2) = 0.8$

c) $P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap \overline{E}_2) = 0.14 + 0.08$

$P(E_1) = 0.22$

6.12 a) $P(E_1) = \frac{25}{300}$

b) $P(E_1 \cup E_6) = \frac{45}{300}$

c) $P(E_1 \cap E_6) = \frac{20}{300}$

d) $P(E_1 | \Omega) = P(E_1)$

e) $P(E_1 \cup E_6 | \Omega) = \frac{45}{300}$

f) $P(E_1 | E_6) = \frac{20}{40}$

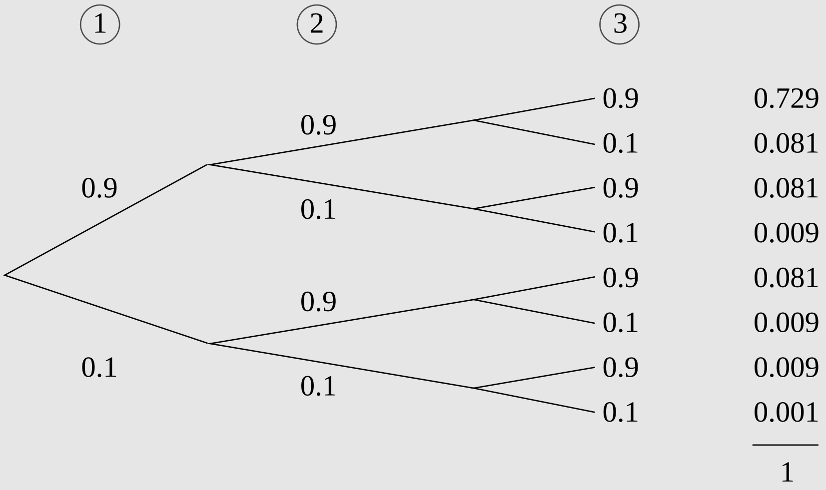
g) $P(E_6 | E_1) = \frac{20}{25}$

6.13 a) 0.001 d) 0.243 g) 0.028

b) 0.081 e) 0.027

c) 0.009 f) 0.271

Diagrama de árbol



6.14 a) $P(I|D) = \dfrac{P(I \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.07}{0.10} = 0.7\ (70\%)$

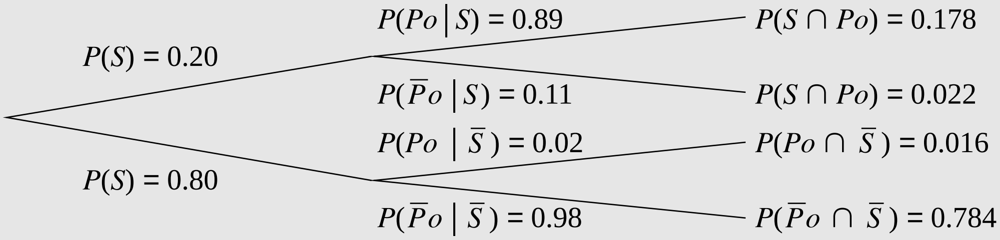
b) $P(I|\overline{D}) = \dfrac{P(I \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(I) - P(I \cap D)}{0.90} = \dfrac{0.10 - 0.07}{0.90}$

$$= \frac{0.03}{0.90} = 0.033\ (3.3\%)$$

c) Como riesgo relativo $RR = \dfrac{P(I|D)}{P(I|\overline{D})} = \dfrac{\dfrac{0.07}{0.10}}{\dfrac{0.03}{0.90}} = \dfrac{0.063}{0.003} = 21$

El ojo izquierdo tiene un riesgo relativo de 21 veces de estar afectado siempre y cuando el ojo derecho también lo está que si no lo estuviese.

6.15



	Po	$\overline{P}o$	Total
S	0.178	0.022	0.2
$\overline{S}$	0.016	0.784	0.8
Total	0.194	0.806	1

S = con sida

$\overline{S}$ = sin sida

P = reacción positiva

$\overline{P}o$ = reacción negativa

$$P(S\,|\,Po)=\frac{0.178}{0.178+0.016}=0.9227$$

$$P(S\,|\,\overline{P}o)=\frac{0.022}{0.022+0.784}=0.0273$$

$$P(\overline{S}\,|\,Po)=\frac{0.016}{0.178+0.016}=0.0825$$

$$P(\overline{S}\,|\,\overline{P}o)=\frac{0.784}{0.022+0.784}=0.9727$$

$$P(Po\,|\,S)=\frac{0.178}{0.178+0.022}=0.89$$

$$P(Po\,|\,\overline{S})=\frac{0.016}{0.016+0.784}=0.020$$

$$P(\overline{P}o\,|\,S)=\frac{0.022}{0.178+0.022}=0.110$$

$$P(\overline{P}o\,|\,\overline{S})=\frac{0.784}{0.016+0.784}=0.98$$

6.16 a)

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

b)

$$P(B\,/\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(\overline{A})}= \;>P(A\cap B)=P(B\,/\,A)P(A)$$

$$P(B\,/\,\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}= \;>P(\overline{A}\cap B)=P(B\,/\,\overline{A})P(\overline{A})$$

c) Como

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$= P(B \mid A)\ P(A) + P(B \mid \bar{A})\ P(\bar{A})$ …(I).

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ldots\text{(II)}$$

Se sustituye (I) en (II) obteniendo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B \mid A)\ P(A) + P(B \mid \bar{A})\ P(\bar{A})}$$

Teorema de Bayes

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\ P(A)}{P(B \mid A)\ P(A) + P(B \mid \bar{A})\ P(\bar{A})}}$$

6.17 a)

	$C \cap P$	$C \cap \bar{P}$	$S \cap P$	$S \cap \bar{P}$	Total
H	125	72	83	37	317
M	94	25	15	49	183
Total	219	97	98	86	500

b)

$$\frac{219}{500} + \frac{93}{500} = \frac{312}{500}$$

$P(P) = 62.4\%$

6.18 a) La probabilidad de que un paciente tenga cáncer, si cree tenerlo, es igual a 1.

b) La probabilidad de que tenga cáncer, si no cree tenerlo, es igual a 0.2.

c) La probabilidad de que crea tener cáncer y no lo tenga es igual a 9/17.

d) La probabilidad de que crea que tiene cáncer y si lo tenga es igual a 1/3.

6.19 a) $P(C \mid P) = 0.095$

b) $P(C' \mid P) = 0.000264$

c) $P(C' \mid P') = 0.91$

e) $P(C \mid P') = 0.999754$

6.20

	S	$\overline{S}$	Total
H	0.08	0.22	0.3
$\overline{H}$	0.32	0.38	0.7
Total	0.4	0.6	1

H = gane hoy
$\overline{H}$ = no gane hoy
S = gane la siguiente semana
$\overline{S}$ = no gane la siguiente semana

6.21

	P	N	Total
I	0.0285	0.0015	0.03
$\bar{I}$	0.0194	0.9506	0.97
Total	0.0479	0.9521	1

I = con insomnio
$\bar{I}$ = sin insomnio
P = resultado positivo
N = resultado negativo

6.22

	H	$\overline{H}$	Total
S	0.08	0.32	0.4
$\overline{S}$	0.22	0.38	0.6
Total	0.3	0.7	1

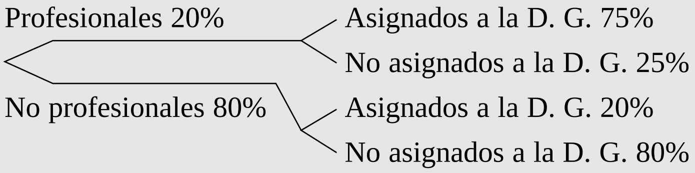
S = gane la siguiente semana
$\overline{S}$ = no gane la siguiente semana
H = gane hoy
$\overline{H}$ = no gane hoy

6.23

	P	$\overline{P}$	Total
E	0.48	0.20	0.68
$\overline{E}$	0.12	0.20	0.32
Total	0.6	0.4	1.0

P = pasan la prueba
$\overline{P}$ = no pasan la prueba
E = terminan exitosamente
$\overline{E}$ = no terminan exitosamente

6.24 a)



b) $P(P \cap A) = P(P) \cdot P(A) = 0.15$

c) $P(P \cap A') = 0.05$

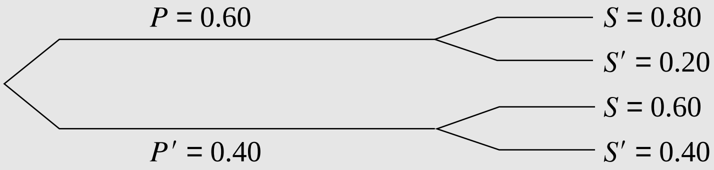
d) $P(P' \cap A) = 0.16$

e) $P(P \mid A) = 0.48$

f) $P(A \mid P) = 0.75$
g) $P(A' \mid P) = 0.25$
h) $P(P' \mid A) = 0.51$
i) $P(A \mid P') = 0.21$

6.25 a) Sea

P = Pase el examen
P' = No pase el examen
S = Trabajo satisfactorio
S' = Trabajo no satisfactorio



b) $P(P \mid S) = 0.66$
c) $P(P \mid S') = 0.42$
d) $P(S \mid P) = 0.80$
e) $P(S' \mid P) = 0.20$
f) $P(S \mid P') = 0.60$
g) $P(S' \mid P') = 0.40$

6.26 a)

	$H \cap L$	$P \cap L$	$H \cap T$	$T \cap P$	Total
A	22	13	11	4	50
B	17	18	7	5	47
Total	39	31	18	9	97

b)
- i) La probabilidad de que sea alta = 0.515
- ii) La probabilidad de que sea baja = 0.485
- iii) La probabilidad de que sea lista = 0.40
- iv) La probabilidad de que sea pedante y lista = 31/97 = 0.31
- v) La probabilidad de que sea alta dado que es hermosa y lista = 0.56
- vi) La probabilidad de que sea alta dado que es pedante y lista = 0.41

Nota: los eventos que falta calcular se dejan al lector.

6.27 a)

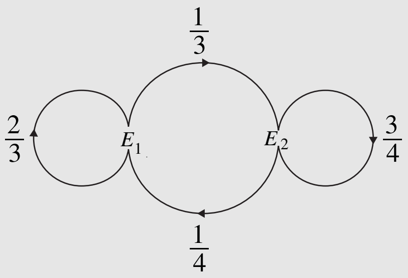
	Mexicanos	Extranjeros	Total
Hombres	8	170	178
Muchachos	2	16	18
Muchachas	16	14	30
Total	26	200	226

b) se deja al lector

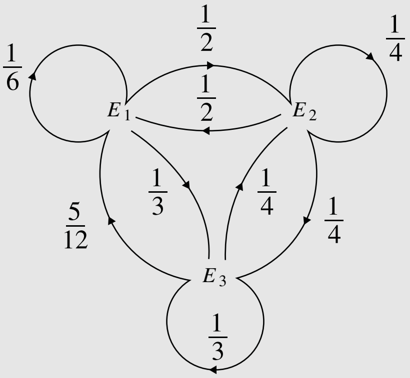
6.28 a) $\frac{31}{1045}$ b) $\frac{23}{1045}$ c) $\frac{31}{1045}+\frac{23}{1045}=\frac{54}{1045}$

6.29 a) $\frac{750}{1000}$ b) $\frac{420}{1000}$ c) 0.7 d) $\frac{110}{1000}$

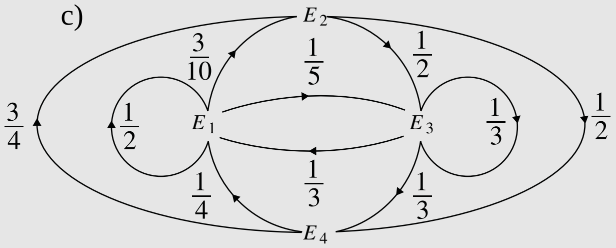
6.30 a)



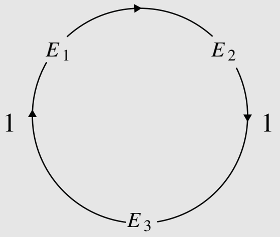
b)



c)



d)



6.31 a)

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ B & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

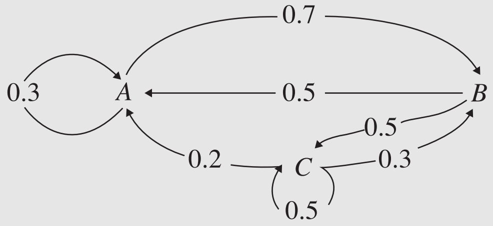
b)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{array}$$

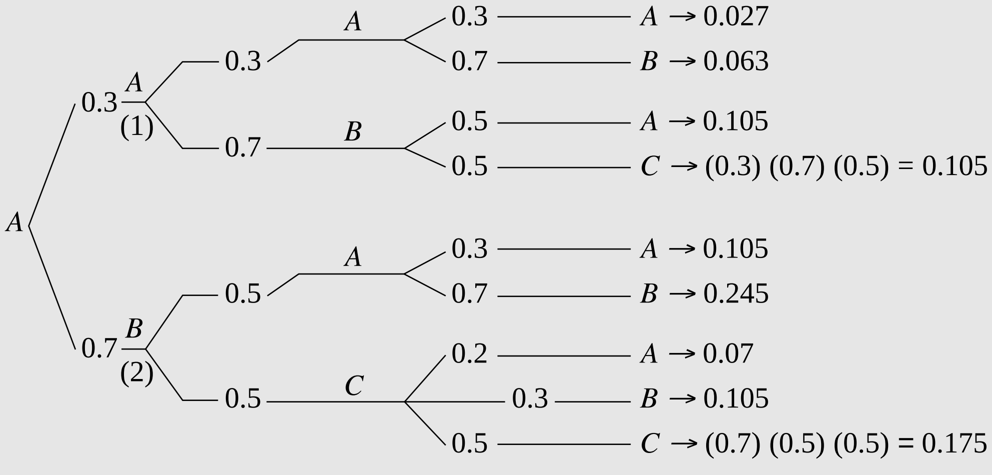
6.32 a)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}
\end{array}$$

b)



c)



6.33 a) $P(G_A) = 0.5 \Rightarrow 50\%$

b)

$$T = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\
\begin{array}{c} G \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}
\end{array}$$

c) Como el vector inicial de probabilidad para ambas jugadoras es (0.5, 0.5), la probabilidad de que Alina gane el 2o. juego es:

$$(0.5, 0.5)\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\0.3 & 0.7\end{pmatrix} = (0.45, 0.55)$$

La probabilidad de que gane el 2o. juego:

$$P(G_A) = 0.45$$

d) Para calcular la probabilidad de que gane el 3er. juego se necesita T^2 y se obtiene

$$T^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ P \end{array} & \begin{pmatrix}0.48 & 0.52\\0.39 & 0.61\end{pmatrix} \end{array}$$

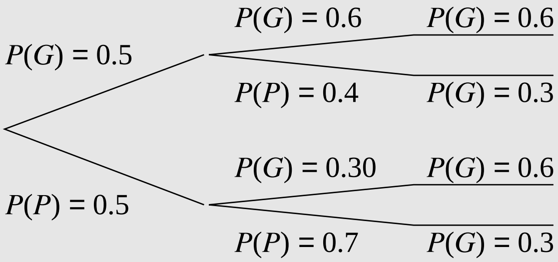
La probabilidad de que gane Alina en el 3er. juego.

$P(G_A)$

$$(0.5, 0.5)\begin{pmatrix}0.48 & 0.52\\0.39 & 0.61\end{pmatrix} = (0.435, 0.565)$$

$$P(G_A) = 0.435$$

e)



$P(G) \cdot P(G) \cdot P(G) = 0.180$

$P(G) \cdot P(P) \cdot P(G) = 0.060$

$P(P) \cdot P(G) \cdot P(G) = 0.090$

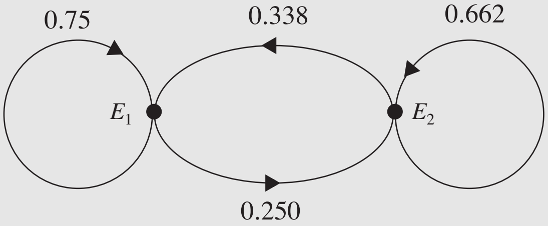
$P(P) \cdot P(P) \cdot P(G) = \underline{0.105}$

0.435

6.34 a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} & \begin{pmatrix}0.750 & 0.250\\0.338 & 0.662\end{pmatrix} \end{array}$$

b)



6.35

$$T = \begin{array}{l|cc} & \text{Cd. Méx. y Z. M.} & \text{Provincia} \\ \hline \text{Cd. Méx. y Z. M.} & 0.999 & 0.001 \\ \text{Provincia} & 0.008 & 0.992 \end{array}$$

a) C. M. y Z. M. Provincia

b) $A \cdot T^3 = (0.26710 \quad 0.73290)$, el 26.7% vivirá en la Cd. de México y Z. M. y el 73.29% en provincia ya que:

$$T^3 \begin{pmatrix} 0.9970 & 0.0030 \\ 0.0238 & 0.9762 \end{pmatrix}$$

c) Como T^{10} es:

$$T^{10} = \begin{pmatrix} 0.9904 & 0.0096 \\ 0.0768 & 0.9232 \end{pmatrix}$$

entonces, $A \cdot T^{10} = (0.30520, 0.69480)$

El 30.52% vivirá en la Cd. de México y Zona Metropolitana.

El 69.48% vivirá en provincia.

6.36 a) 0.667 = 66.7%

b) (0.667, 0.333)

c) Sí

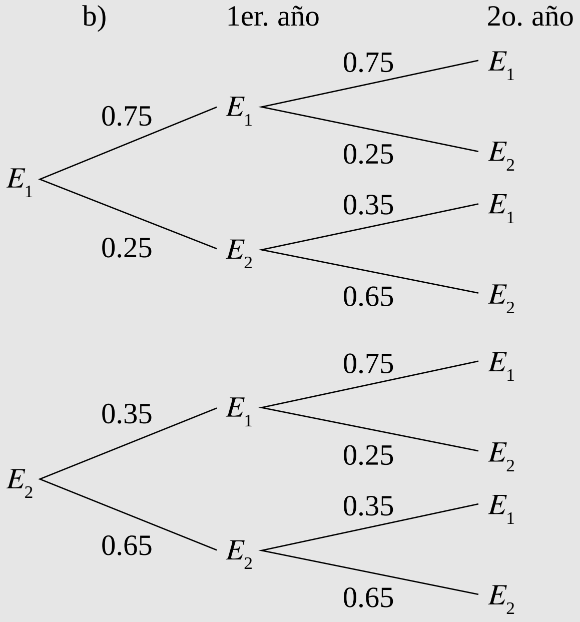
6.37

a) $$P = \begin{array}{l|cc} & \text{Modelo } X(E_1) & \text{Otros modelos } (E_2) \\ \hline \text{Modelo } X(E_1) & 0.75 & 0.25 \\ \text{Otros modelos } (E_2) & 0.35 & 0.65 \end{array}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.49 & 0.51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ \hline E_1 & 0.65 & 0.35 \\ E_2 & 0.49 & 0.51 \end{array}$$

b)



$P(E_1 \cap E_1) = (0.75)(0.75) = 0.5625$

$P(E_1 \cap E_2) = (0.75)(0.25) = 0.1875$

$P(E_2 \cap E_1) = (0.25)(0.35) = 0.0875$

$P(E_2 \cap E_1) = (0.25)(0.75) = \dfrac{0.1625}{1.00}$

$P(E_1 \cap E_1) = (0.35)(0.75) = 0.2625$

$P(E_1 \cap E_2) = (0.35)(0.25) = 0.0875$

$P(E_2 \cap E_1) = (0.65)(0.35) = 0.2275$

$P(E_2 \cap E_2) = (0.65)(0.65) = \dfrac{0.4225}{1.00}$

c) La probabilidad de dos etapas:

i) de E_1 a E_1 a E_1 es $P_{11} = (0.75)(0.75) + (0.25)(0.35) = 0.5625 + 0.875$
$= 0.65$

ii) de E_1 a E_2 es $P_{12} = (0.75)(0.25) + (0.25)(0.65) = 0.1875 + 0.1625$
$= \dfrac{0.35}{1.00}$

iii) de E_2 a E_1 es $P_{21} = (0.35)(0.75) + (0.65)(0.35) = 0.2625 + 0.2275$
$= 0.49$

iv) de E_2 a E_2 es $P_{22} = (0.35)(0.25) + (0.65)(0.65) = 0.0875 + 0.4225$
$= \dfrac{0.51}{1.00}$

Entonces

$$(0.50,\ 0.50)\begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.49 & 0.51 \end{pmatrix} =$$

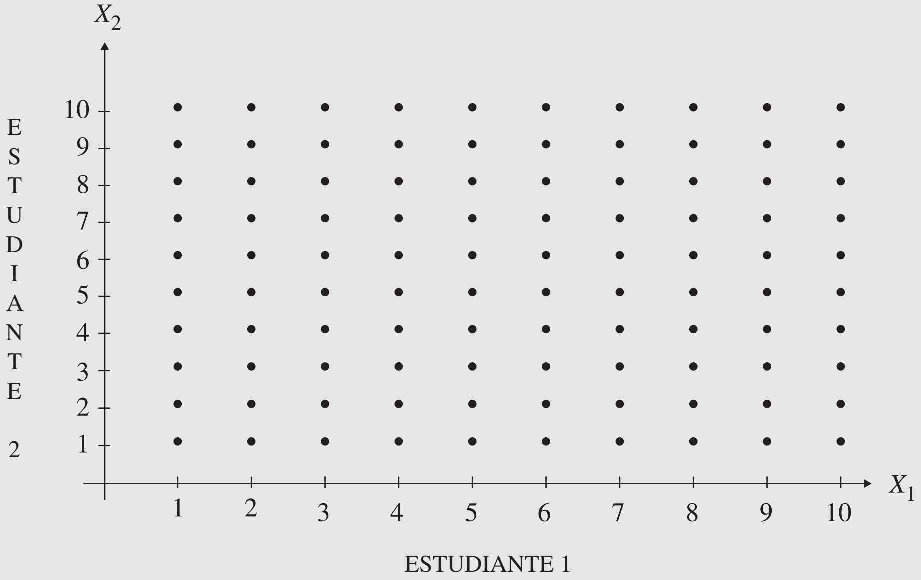
$$A^{(0)} \quad P^2 = \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \\ (0.57 & 0.43) \end{array}$$

6.38 a) T^2
b) T^5 utilizar MacStat

6.39 a) 0.1
b) 0.02
c) 0.20
d) 0.1

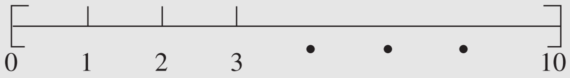
Capitulo 7

7.1 a)



La variable aleatoria es $\overline{X}$

b)



La variable aleatoria $\overline{X}$ se encuentra en el intervalo de cero a 10, de los números reales.

7.2
a) Continua
b) Continua
c) Discreta
d) Continua
c) Discreta

7.3 $P\left[\left|X-\mu\right| \le K\sigma_x\right] \ge 1-\dfrac{1}{K^2}, \ \mu = 8 \ \ \sigma = 3$

$$\begin{aligned} P[-4 \le X \le 20] &= P[-4-\mu \le X-\mu \le 20-\mu] \\ &= P[-4-8 \le X-\mu \le 20-8] \\ &= P[-12 \le X-\mu \le 12] \\ &= P[|X-\mu| \le 12] \\ &= P[|X-\mu| \le K\sigma] \end{aligned}$$

$$= P\left[\left|X - \mu\right| \leq 4(3)\right] \geq 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{16}$$

7.4 $P = 0.3$

$n = 16$ $P(K = 4) = {}_{16}C_4\ (0.3)^4\ (0.7)^{12} = 0.2040$ aprox. 20.4%

$K = 4$

7.5 $P = 0.2$

$n = 20$ $P(K = 5) = {}_{20}C_5\ (0.2)^5\ (0.8)^{15} = 0.1746$ aprox. 17.5%

$K = 5$

7.6 $P = 0.7$

$n = 16$ $P(X = 9) = {}_{16}C_9\ (0.7)^9\ (0.3)^7 = 0.101$ aprox. 10%

$X = 9$

7.7 Como al aplicar

$n = 300$ $P(X = 4) = {}_{300}C_4\ (0.02)^4\ (0.98)^{296}$

$P = 0.02$

$X = 4$ Resulta muy laborioso, tardado y con la posibilidad de cometer varios errores.

Utilizando la aproximación de Poisson, se tiene:

$$\mu = nP = 300\ (0.02) = 6$$

$$P(X = 4) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x\ !} = \frac{6^4 e^{-6}}{4\ !} = 0.135 \text{ aprox. } 13.5\%$$

7.8

$P(r = 0) = 0.000064$

$P(r = 1) = 0.001536$

$P(r = 2) = 0.01536$

$P(r = 3) = 0.08192$

$P(r = 4) = 0.24576$

$P(r = 5) = 0.393216$

$P(r = 5) = 0.393216$

$P(r = 6) = 0.262144$

1.0000

7.9 $P(r = 0) = 0.00024414$

$P(r = 1) = 0.004392$

$P(r = 2) = 0.032956$

$P(r = 3) = 0.1318125$

$P(r = 4) = 0.296625$

$P(r = 5) = 0.35595$

$P(r = 6) = 0.17798$

1.0000

7.10 c) P 0.17 0.16 0.15 0.14 0.13 0.12 0.11 0.1 0.09 0.08 0.07 0.06 0.05 0.04 0.03 0.02 0.01 0 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 X

a) X = 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

(1.1) (1.2) (1.3) (1.4) (1.5) (1.6) (2.6) (3.6) (4.6) (5.6) (6.6)
(2.1) (2.2) (2.3) (2.4) (2.5) (3.5) (4.5) (5.5) (6.5)
(3.1) (3.2) (3.3) (3.4) (4.4) (5.4) (6.4)
(4.1) (4.2) (4.3) (5.3) (6.3)
(5.1) (5.2) (6.2)
(6.1)

$$P = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1.0$$

b) $\mu = 0.30556$ $\sigma^2 = 0.29707$ $\sigma = 0.54504$

7.11 $n = 15$

$X = 0, 1, \ldots, 15$

$P = 0.88$

$q = 0.12$

a) Menos de 6 tengan que repetir el curso

$$P(X < 6) = P\left(\sum_{x=0}^{5} P(X,\ 15,\ 0.12)\right) = 0.98602$$

b) Exactamente 10 aprueben el curso

$$P(X = 10) = P\left({}_{15}C_{10}(0.88)^{10}(0.12)^{5}\right) = 0.02081077$$

c) Más de 12 aprueben el curso

$$P(X > 12) = P\left(\sum_{x=13}^{15} P(X, 15, 0, 12)\right) = 0.734565$$

d) $\mu = np = 13.20$

$\boxed{\mu = 13.20}$ $\boxed{\sigma = 1.25857\backslash}$

7.12 $n = 13$

$P = 0.44$

$q = 0.56$

$X = 0, 1, \ldots, 13$

a) $P(X \geq 6) = 0.5440572$

b) $P(X \leq 7) = 0.82518$

$\boxed{\text{c) } \mu = 5.72}$ $\boxed{\sigma = 1.78975}$

7.13 $n = 1000$, $P = 0.005$, $\lambda = 5$

a) $\boxed{P(X = 0) = 0.00674}$

b) $\boxed{P(X = 10)\ 0.01814}$

c) $\boxed{P(X = 15)\ 0.000157}$

7.14 $n = 200$, $P = 0.03$, $\lambda = 6$

a) $\boxed{P(X = 10) = 0.0413030}$

b) $\boxed{P(X = 5) = 0.160623}$

7.15 $n = 10\ 000$, $P = 0.001$, $\mu = \lambda = 10$, $X = 0, 1, 2, \ldots, 10\ 000$

a) $P(6 \leq X \leq 8) = 0.2657$

b) $\sigma = 3{,}16228$

7.16 $n = 2\ 000$, $P = 0.002$

a) $P(X < 5) = 0.62893$

b) $\mu = 4$, $\sigma = 2$

7.17 $P(X = 5) = 0.1008$

7.18 $P(X = 3) = 0.2725$

7.19 $P(X = 5) = 0.156$

7.20 $P(X = 2) = 0.016$

7.21 $P(X = 4) = 0.108$

$n_1 = 60$

$n_2 = 40$

$X = 4$ de 75 watts

$r = 10$

$r - X = 10 - 4 = 6$ de 100 watts

$\begin{bmatrix} n_1 \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 \\ r-X \end{bmatrix}$ son las formas de elegir $r - X = 6$ focos de 100 watts.

$$\therefore \binom{n_1}{X}\binom{n_2}{r-X} \Rightarrow \binom{n}{r}\binom{100}{10}$$

$$f(X) = \frac{\binom{n_1}{X}\binom{n_2}{r-X}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{60}{4}\binom{40}{10-4}}{\binom{100}{10}} = 0.108 \;\; \therefore \text{ la probabilidad es } 0.108$$

7.22 $$P(X=3) = \frac{\binom{n_1}{X}\binom{n_2}{r-X}}{\binom{n_1+n_2}{r}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{5-3}}{\binom{6+4}{5}} = 0.48$$

7.23 Probabilidad = 0.3968

7.24 a) $Z = -1.97$, $Z = -0.76$, $Z = 0.36$
$Z = 1.21$, $Z = 1.86$, $Z = 2.33$ respectivamente

b) $X = -4.5$, $X = -3.2$, $X = -2.0$
$X = -1.1$, $X = -0.4$, $X = 0.1$ respectivamente

7.25
a) 10.64%
b) 49.32%
c) 49.87%
d) 34.13%
e) 24.22%
f) 1.99%
g) 28.81%
h) 49.93%

7.26
a) 2.28%
b) 0.04%
c) 9.18%
d) 49.08%

7.27
a) 68.26%
b) 95.44%
c) 66.78%
d) 12.10%
e) 28.53%

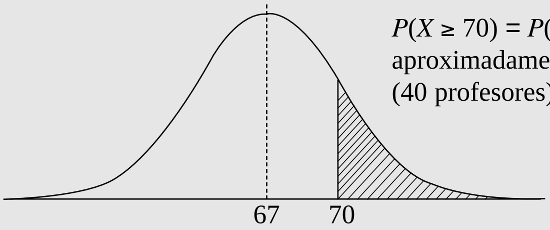
7.28
a) 29.57%
b) 29.57%
c) 25.18%
d) 76.53%
e) 4.56%

7.29
a) 15.87%
b) 2.28%
c) 0.13%
d) 50%
e) 39.97%
f) 89.97%
g) 44.95%

7.30 a) $Z = 0.5$ c) $Z = –0.83$
b) $Z = 1.16$ d) $Z = –1.5$

7.31 a) $Z = 1.93$ d) $Z = 0.71$ g) $Z = 2.33$
b) $Z = –0.36$ e) $Z = 0.92$ h) $Z = 2.58$
c) $Z = –1.74$ f) $Z = 1.96$

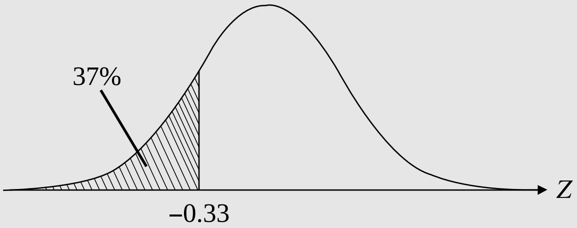
7.32



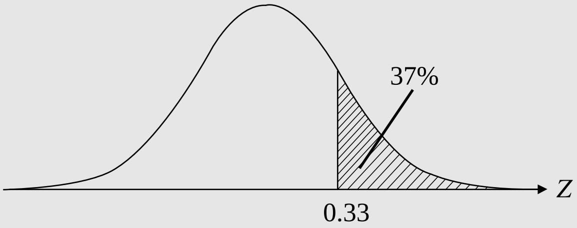
$P(X \geq 70) = P(Z \geq 0.25) = 0.40$
aproximadamente 40%
(40 profesores)

7.33 a) 14 injertos
b) 7 injertos
c) 205 injertos

7.34 a) $P(X \leq 5) = P(X \leq 5.5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{5.5 - 6}{1.5}\right)$; $P(Z \leq -0.33) = 37\%$



b) $P(X \geq 6.5) = P\left(Z \geq \frac{0.5}{1.5}\right) = P(Z \geq -0.33) = 37\%$



7.35 Utilizando la aproximación normal de la binomial

$n = 80$ $\mu = \mu P = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20;$ $\boxed{\mu = 20}$

$$P = \frac{1}{4} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{15} = 3.87 \qquad \boxed{\sigma = 3.87}$$

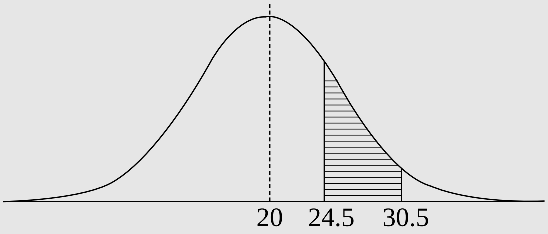
Como se desea calcular el intervalo $P(25 \leq X \leq 30)$ aplicando la corrección de continuidad $P(24.5 \leq X \leq 30.5)$.

Por lo que

$$P\left(\frac{24.5-20}{3.87} \leq \frac{X-20}{3.87} \leq \frac{30.5-20}{3.87}\right)$$

$$P(1.163 \leq Z \leq 2.713) = 0.9966 - 0.8776 = 0.1190$$

$$\boxed{P(24.5 \leq X \leq 30.5) = 0.1190}$$



7.36 $P(X \leq 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1000}{1000}} = 1 - e^{-1}$

$$= 1 - \frac{1}{e} = 0.6321$$

$$\boxed{P(X \leq 1000) = 0.6321}$$

Capítulo 8

8.1 a) Verdadero
b) Verdadero
c) Falso
d) Verdadero
e) Verdadero

8.2 a) Lo que el investigador está interesado en probar.

8.3 d) La región de rechazo de *Ho* consiste en aquellos valores de + >3.5 o – <3.5.

8.4 a) Cuando el porcentaje es diferente al 60%.
b) Cuando es el 60% el que está en desacuerdo.

8.5 a) X = 15, 16, 17, 18, 19 y 20
b) X = 0, 1, 2, 3, ..., 14

8.6 La conclusión más razonable es el inciso c (que exista una diferencia significativa estadística pero no clínica).

Capítulo 9

9.1 $n = 36$

$\overline{X} = 40 \qquad 40 - 1.96 \times \dfrac{12}{\sqrt{36}} \leq \mu_\chi \leq 40 + 1.96 \times \dfrac{12}{\sqrt{36}}$

$\sigma_\chi = 12$

$Z_{0.025} = \pm 1.96 \qquad 36.08 \leq \mu_\chi \leq 43.92$

$36 \leq \mu_\chi \leq 44$ al 95%

9.2 $n = 64$

$\overline{X} = 300 \qquad 290 \leq \mu_\chi \leq 310$ al 95%

$\sigma_\chi = 40$

$Z_{0.025} = \pm 1.96$

9.3 $Ho : \mu_x = 50$ cal.

$H_1 : \mu_x < 50$ cal.

$n = 36$

$\sigma^2 = 9$ Entonces $\sigma_{\bar{\chi}} = \dfrac{3}{\sqrt{36}} = 0.5$

$\overline{X} = 49.3$ cal.

$\alpha = 5\%$

$Z_{0.05} = \pm 1.64$

$$Z_{calc} = \frac{\overline{X} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{49.3 - 50}{0.5} = 1.4$$

Como $Z_{cal\,c} \not> 1.64$ *Ho no* se rechaza

Conclusión: Los datos apoyan la propaganda acerca del contenido en calorías.

9.4 $P\left(20 - \dfrac{4.94}{\sqrt{n}} < \mu_\chi < 20 + \dfrac{4.94}{\sqrt{n}}\right)$

9.5 $P(4.86 < \mu_x < 5.14)$

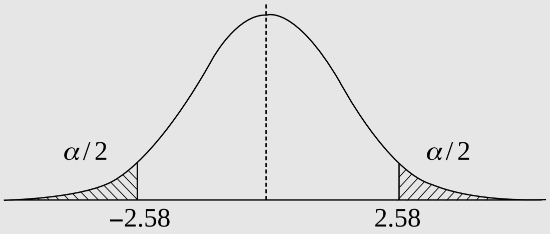
$H_0 : Mx = 1$

$H_1 : Mx \neq 1$

9.6 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_x}{\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1.014 - 1}{\dfrac{0.02}{\sqrt{25}}} = 3.5$

$Ho : \mu_x = 1\ Kg$

$H_i : \mu_x \neq 1\ Kg$



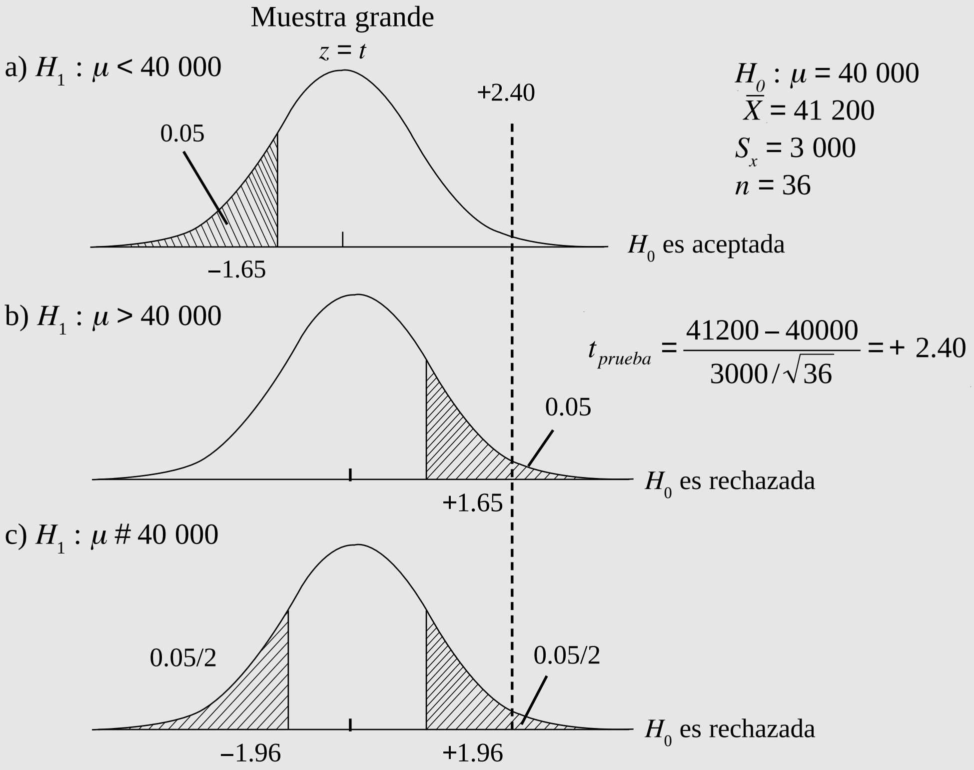
Como 3.5 > 2.58 *Ho* se rechaza con una $\alpha = 1\%$. La máquina no está bajo control.

9.7 1. $H_1 : \mu_x < 40\ 000$.
2. $H_1 : \mu_x > 40\ 000$.
3. $H_1 : \mu_x \neq 40\ 000$.

Muestra grande: suponga que se toma una muestra de 36 observaciones, y que la media de la muestra resultante es 41 200 y la desviación estándar de 3 000. Considere también $\alpha = 0.05$. Ahora, como n es mayor que 30, el valor de z, tomado a partir de una tabla normal, puede utilizarse para aproximar el valor de t. De ahí que el valor crítico sea +1.65, o bien, –1.65 en el caso de una prueba de una cola, y ±1.96 en el de una de dos colas. Para cualquier caso, el valor estadístico de prueba es:

$$t_{prueba} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_x / \sqrt{n}} = \frac{41\ \ 200 - 40\ \ 000}{3\ \ 000 / \sqrt{36}} = +2.4$$

Las tres hipótesis alternativas posibles se comprueban en la figura:



$$t_{prueba} = \frac{41200 - 40000}{3000 / \sqrt{36}} = +\ 2.40$$

Comparación entre las tres alternativas en términos de la evaluación de los datos muestrales en el caso de una muestra grande.

Cuando la varianza poblacional (σ_x^2) es desconocida, el intervalo de confianza de μ_x es el siguiente:

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,\ n-1} s/\sqrt{n} \le \mu_x \le \overline{X} + t_{a/2,\ n-1}\ \ S/\sqrt{n}$$

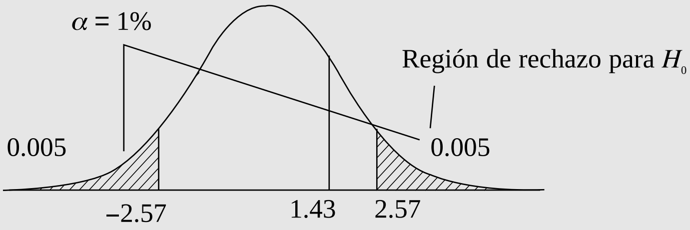
9.8 Intervalo de confianza, al 95%

$$(0.0063,\ 0.034)$$

Contraste de hipótesis

$$|Z| = 1.43$$

$$Z_{0.005} = \pm 2.57$$



H_0 no se rechaza al $\alpha = 5\%$ ni $\alpha = 1\%$

9.9

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \qquad H_0 : P = 25\%$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0.25(0.75)}{740}} = 0.016 \qquad H_1 : P \neq 25\%$$

$$Z = \frac{0.20 - 0.25}{0.016} = \frac{-0.05}{0.016} = -3.1 \qquad Z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$|Z| = 3.1$$

Entonces.

H_0 se rechaza con $\alpha = 5\%$

Intervalo de confianza al 95%

$$(0.22,\ 0.28)$$

$H_0 : p = 5.5$

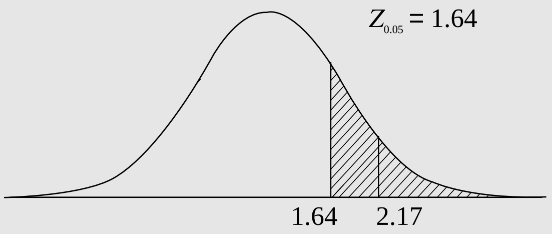
$H_1 : p < 5.5$

9.10 $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\dfrac{0.03(0.97)}{50}}\sqrt{\dfrac{350}{399}}$

$$\boxed{\sigma_p = 0.023}$$

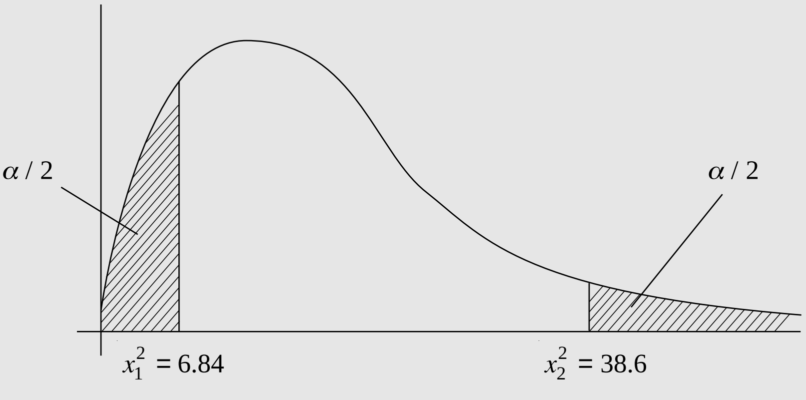
$$Z = \frac{(X/n)-P}{\sigma_p} = \frac{4/50-0.03}{0.023} = \frac{0.08-0.03}{0.023}$$

$$\boxed{Z = 2.17}$$



$Z_{0.05} = 1.64$
$Z = 2{,}17$
$H_0 : \pi = 0.03$
$H_1 : \pi < 0.03$
H_0 se rechaza con una $\alpha = 5\%$

9.11 a)



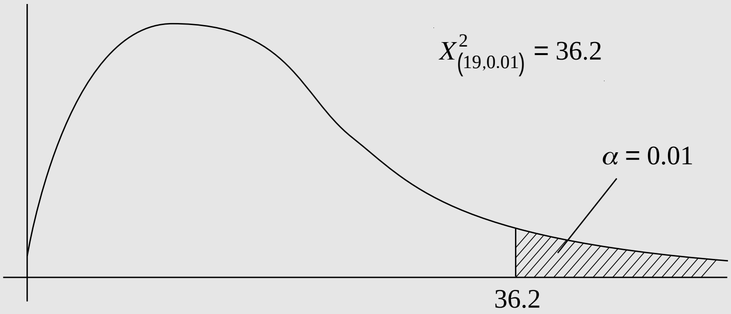
$gl = n - 1 = 19$

$P(0.00011 \le \sigma_x^2 \le 0.00064)$ al 99%

b) $H_0 : \sigma_x^2 = 0.0001$

$H_1 : \sigma_x^2 > 0.0001$

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_x^2} = \frac{(19)(0.00023)}{(0.01)^2} = 43.7$$



Como 43.7 > 36.2 H_0 se rechaza. La compañía debe rechazar los lentes.

9.12 Como $n = 64$, $\overline{X} = 32$, $\sigma_x = 10$, $Z_{0.025} = \pm 1.96$

$29.6 < \mu_x < 34.5$, al 95% o (30, 35) redondeando.

9.13 $n = 64$, $\overline{X} = 60$, $\sigma_x = 15$, $Z_{0.025} = \pm 1.96$

$56 < \mu_x < 64$, al 95% o (56, 64)

9.14 $n = 49$, $\overline{X} = 12$ $\sigma_x = 2$, $Z_{0.025} = \pm 1.96$

$11.5 < \mu_x < 12.6$ o (11.5, 12.6), al 95%

9.15 $\sigma_x = 1.2$, $e = 0.3$, $Z_{0.025} = \pm 1.96$

$$n = \frac{Z^2 \sigma_x^2}{e^2} = \frac{(1.96)^2 \times (1.2)^2}{(0.3)^2} = \frac{3.841 \times 1.44}{0.09} = 61.46$$

El tamaño de la muestra debe ser $n = 62$.

9.16 $e = 0.5$, $\sigma_x = 2$, $Z_{0.025} = \pm 1.96$

$$n = \frac{(1.96)^2 \times (2.0)^2}{(0.5)^2} = 61.5$$

La muestra seleccionada debe ser $n = 62$.

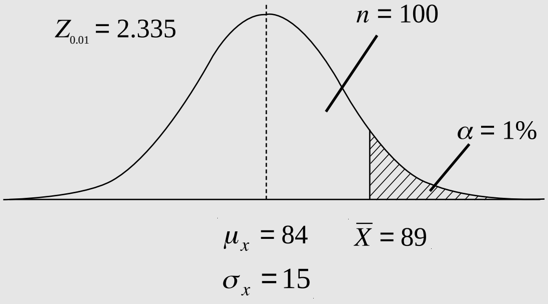
9.17 $e = 15$, $\sigma_x = 50$, $Z_{0.025} = \pm 1.96$

$$n = \frac{(1.96)^2 \times (50)^2}{(15)^2} = 42.7$$

Se necesita una muestra $n = 43$.

9.18 $H_0 : \mu_x = 84$

$H_1 : \mu_x \neq 84$



Bajo la hipótesis nula H_0, se calcula la probabilidad de seleccionar muestras con medias muestrales iguales o mayores a 89

Como: $\sigma_{\bar{\chi}} = \frac{\sigma_{\chi}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ y $f.p.c. = 1$, o sea $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 1$

Entonces $\sigma_{\bar{\chi}} = \frac{\sigma_{\chi}}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = 1.5 \ \therefore \ Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_{\chi}}{\sigma_{\bar{\chi}}}$

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_{\chi}}{\sigma_{\bar{\chi}}} = \frac{89 - 84}{1.5} = 3.34$$

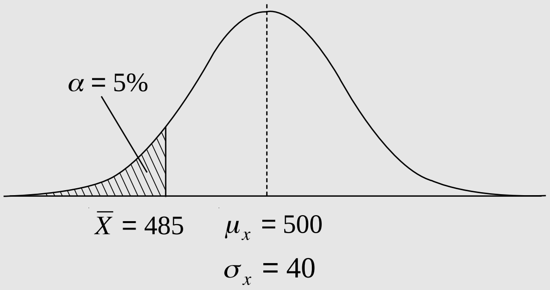
$$P\left\{\bar{X} \geq 89 \mid H_0 \text{ cierta}\right\} = 0.001 < 0.005$$

Esto es porque 3.34 > 3.30, donde $Z_{0.0005} = 3.30$

La campaña publicitaria sí aumentó significativamente las llamadas telefónicas

9.19 $H_0 \ \mu_x = 500$

$H_1 : \mu_x < 500$ $\sigma_{\bar{\chi}} = \frac{\sigma_{\chi}}{\sqrt{n}} = \frac{40}{4} = 10$



$$Z_c = -1.5$$

$$P\left\{\bar{X} \leq 485 \mid \mu_x = 500\right\} = 0.0668$$

como $\alpha = 5\% = 0.05$

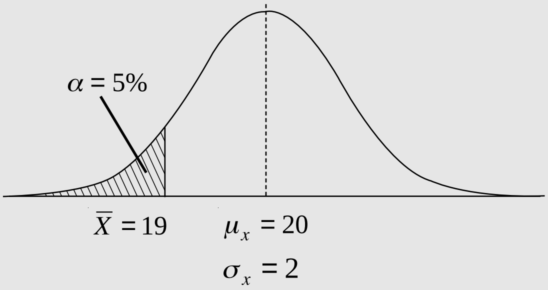
No se rechaza H_0, el promedio de calificaciones del colegio *A* no puede considerarse estadísticamente bajo con respecto a la calificación promedio.

9.20 $H_0 : \mu_x = 20$ $\qquad$ $f.p.c. = 1$

$H_1 : \mu_x \neq 20$ $\qquad$ $\alpha = 5\%$

$\sigma_{\bar{x}} = 0.5$ $\qquad$ $n = 16$

$Z_c = 2$



$P\left\{\overline{X} < 19 \mid \mu_\chi = 20\right\} = 0.0228 < 0.025,$ se rechaza H_0

El proceso de producción debe detenerse y ajustarse.

9.21 $H_0 : \pi = 20\%$ $\qquad$ $P = 16\%$

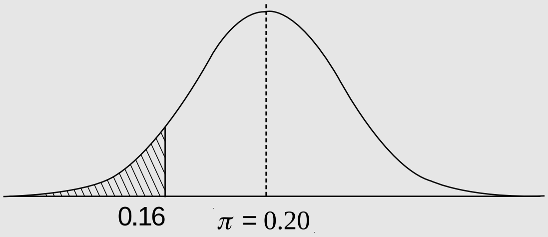
$H_1 : \pi = <20\%$ $\qquad$ $Z_c = \frac{P - \pi}{\sigma_p} = \frac{0.16 - 0.20}{0.04} = -1.0$

$\sigma_p^2 = \frac{0.16}{100};\ \sigma_p = 0.04$ o $\sigma_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0.04$

$f.p.c. = 1$

$P[P \leq 0.16 | \pi = 0.20] = 0.1908$

H_0 no se rechaza

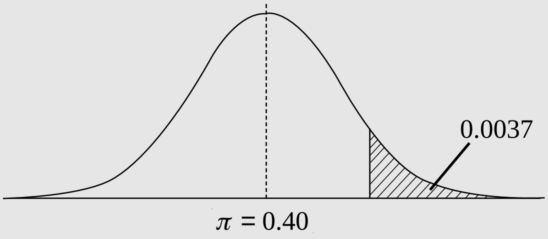


9.22 $H_0 : \pi = 0.40$ $\quad Z = 2.68$

$H_1 : \pi > 0.40$ $\quad \sigma_p = 0.0219$

$P = 0.46$ $\quad Z_{tablas} = 2.68$

$$P\left[P \geq 0.46 \mid \pi = 0.40\right] = 0.0037$$



o sea que 3.7 veces en 1000 se podrán seleccionar muestras con proporciones iguales o mayores a 0.46 de entre una población con $\pi = 0.40$

con $\alpha = 5\%$ $\quad H_0$ se rechaza

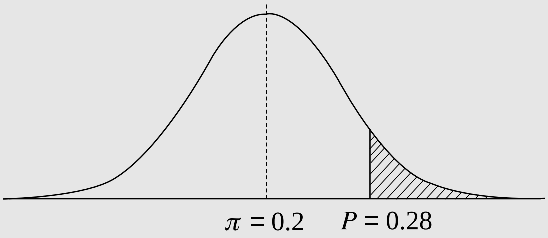
9.23 $H_0 : \pi = 0.2$

$H_1 : \pi > 0.2$

$\pi = 0.2 \quad P = 0.28$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0.04$$

$$Z_c = \frac{P - \pi}{\sigma_p} = 1.625$$



$$P\left\{P \geq 0.28 \mid \pi = 0.2\right\} = 0.052 > 0.05$$

H_0 no se rechaza, no existe diferencia estadísticamente significativa entre P = 0.28 y $\pi = 0.2$. El proceso de producción no se debe parar ni ajustar.

9.24 $H_0 : \pi = 0.5$ $\quad$ (o sea el 50%)

$H_1 : \pi \neq 0.5$ $\quad$ (diferente al 50%)

$n = 1\,000$

$\alpha = 5\%$ $\quad P = \frac{520}{1000} = 0.52$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5}{1000}} = 0.0158$$

$$Z_c = \frac{P - \pi}{\sigma_p} = \frac{0.52 - 0.5}{0.0158} = 1.266$$

$$P\left\{P \geq 0.52 \mid \pi = 0.5\right\} = 0.10275 > 0.025$$

H_0 no se rechaza $\therefore$ la moneda está cargada.

9.25 $H_0 : \pi = 0.3$

$H_0 : \pi < 0.3$ $\qquad P = \frac{100}{400} = 0.25$

$n = 400$ $\qquad \sigma_p \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{400}} = 0.0225$

$\alpha = 5\%$

$$Z_c = \frac{0.25 - 0.3}{0.0225} = -2.22$$

$$P\left\{P \leq 0.25 \mid \pi = 0.3\right\} = 0.0132 < 0.05$$

H_0 se rechaza, el resultado no confirma lo dicho.

9.26 $H_0 : \pi = 0.5$

$H_1 : \pi < 0.5$ $\qquad P = \frac{420}{1000} = 0.42$

$n = 1\,000$ $\qquad \sigma_p = \sqrt{\frac{(0.5)^2}{1000}} = 0.0158$

$\alpha = 5\%$

$$Z = \frac{0.42 - 0.5}{0.0158} = -5.06, \quad \boxed{Z = -5.06}$$

H_0 se rechaza

Capítulo 10

10.1 a) Como $n_1 + n_2 = 72 > 30$

$$Z_c = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{n_2}}},\ Z_{0.025} = \ \pm 1.96$$

IC (95%): $0.61 \leq \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \leq 3.39$, redondeando (0.6, 3.4) con un error $e = 1.386$

b) $Z_c = 2.828^{**}$, H_0 se rechaza, $\alpha = 1\%$

10.2 a) $0.352 \leq \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \leq 0.648$; IC (99%) o (0.35, 0.65)

b) $t_c = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{0.5}{0.05795} = 8.70^{**}$ H_0 se rechaza $\alpha = 1\%$

10.3 a) $-0.13 \leq \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \leq 0.93$; para un IC (95%) o también (–0.1, 09) con $e = 0.5$

b) $t_c = 1.48$ n.s. H_0 *no* se rechaza (no existe diferencia estadísticamente significativa)

10.4 1a. cuantificación

Grupo	$\overline{X}$	S
Placebo	0.918	0.555
Pilocarpina	0.783	0.593

$t = 0.525$, $p = 0.606$ (no significativa)

2a. cuantificación

Grupo	$\overline{X}$	S
Placebo	0.350	0.264
Pilocarpina	0.412	0.310

$t = 0.481$, $p = 0.636$ (no significativa)

3a. cuantificación

Grupo	$\overline{X}$	S
Placebo	0.255	0.250
Pilocarpina	0.650	0.380

$t = 2.743$, $p = 0.013$ (significativa)

10.5

Taller	$\overline{X}$	S
1	6.847	3.20
2	6.233	2.94

$t = 0.546$, $p = 0.589$ (no significativa) IC (95%) (0.38, 0.82) con $e = 0.2187$

10.6 $\overline{X}_1 = 3.1$, $S_1 = 1.66$

$\overline{X}_2 = 1.7$, $S_2 = 1.49$

a) $t = 2.409$, $p = 0.0039$ (significativa)

b) $A = \dfrac{\sum D^2}{\left(\sum D\right)^2} = \dfrac{50}{(14)^2} = 0.2551$

$A_{0.025} = 0.276$
Como $0.2551 < A_{0.025}$
H_0 se rechaza, el F_c te disminuye las caries.

10.7 a) $\sigma_{p_1} - \sigma_{p_2} = 0.06124$
$-0.02 < p_1 - p_2 < 0.22$ al 95% con $e = 0.12$
b) $Z_c = 1.63$ n.s. H_0 no se rechaza

10.8 $H_0 : P_R = P_{NR}$ $Z_c = 1.28$ n.s. El recubrimiento *no* es efectivo.
$H_1 : P_R > P_{NR}$ $Z_{0.05} = 1.645$

10.9 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $F_c = 5.36^{**}$ H_0 se rechaza

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $F_{14,\,19,\,0.01} = 3.19$ Las varianzas no son iguales, no existe homoscedasticidad.

$\alpha = 1\%$

10.10 a) $B = 6.66$ n.s. H_0 *no* se rechaza, las varianzas son iguales.

$\chi^2_{3.0.05} = 7.815$

b) y c) no se puede aplicar Cochran ni Hartley, los grupos no son del mismo tamaño.

10.11 a) $C = 0.444$ n.s. H_0 *no* se rechaza las varianzas son iguales.

$C_{4,\,7,\,0.05} = 0.5365$

b) $F_H = 2.62$ n.s. H_0 *no* se rechaza las varianzas son iguales.

$F_{n\text{-}1,\,k,\,0.05} = F_{7,\,4,\,0.05} = 8.44$

10.12

ESCALA	*tc*	
1	13.51	**
2	11.56	**
3	12.53	**
A	10.40	**
B	14.80	**
C	11.86	**
D	12.78	**
E	12.22	**
AC	4.72	**

** Significativas al 1%.

$\therefore$ Existe una diferencia estadísticamente significativa entre el grupo de morfinómanos y de no morfinómanos.

Capítulo 11

11.1 $F = 20.095$, $P = 0.001$

$t = 4.483$, $P = 0.001$

$F = t^2$

Como no existe homoscedasticidad, se sugiere aplicar Kruskal-Wallis y/o ∪ de Mann-Whitney

$H = 7.941$, $P = 0.004$

$Z = 2.818$, $P = 0.004$

$H = Z^2$

11.2 $F = 7.159$, $P = 0.003$

Control de lectura es el método más eficaz, en segundo lugar conferencia en el grupo.

11.3 $F = 170.614$, $P = 0.0001$

Pero como no existe homogeneidad de varianzas se sugiere aplicar la prueba no-paramétrica ∪ de Mann-Whitney: $Z = 2.627$, $P = 0.009$ existe diferencia estadísticamente significativa

11.4 Comparando el número de errores sin considerar si están hipnotizados o no, sino únicamente la susceptibilidad alta o baja.

n (alta) = 12, $\overline{X} = 20.58$, $S = 13.0$

n (baja) = 10, $\overline{X} = 13.90$, $S = 12.688$

$F = 1.473$, $P = 0.239$

$t = 1.214$, $P = 0.239$

Como no existe diferencia estadísticamente significativa en el número de errores respecto de baja y alta susceptibilidad, se realiza un contraste considerando estar hipnotizado o no.

n (hipnotizados) = 13, $\overline{X} = 16.62$, $S = 13.32$

n (no hipnotizado) = 9, $\overline{X} = 18.89$, $S = 13.205$

$F = 0.156$, $P = 0.697$

$t = 0.395$, $P = 0.697$

Tampoco existe diferencia estadísticamente significativa.

11.5 Excluyendo los puntajes positivos contrastar baja susceptibilidad contra alta

n (baja) = 11, $\overline{X} = -12.64$, $S = 12.74$

n (alta) = 13, $\overline{X} = -19.0$, $S = 13.693$

$F = 1.370$, $P = 0.254$

$t = 1.170$, $P = 0.254$

Contrastar no hipnotizado contra hipnotizado.

n (no hipnotizado) = 9, $\overline{X} = –9.44$, $S = 6.821$

n (hipnotizado) = 15, $\overline{X} = – 20.07$ $S = 14.902$

$F = 4.011$, $P = 0.058$

$t = 2.003$, $P = 0.058$

no existe diferencia de medias aplicando Mann-Whitney

$Z = 1.702$. $P = 0.089$

11.6 $F = 0.902$, $P = 0.411$

No existe diferencia estadísticamente significativa.

11.7 $F = 0.620$, $P = 0.542$

Aún aplicando la transformación arcoseno, tampoco existe diferencia estadísticamente significativa.

11.8 $F = 0.883$, $P = 0.485$

La conducta verbal encubierta es la misma para las cinco actividades.

11.9 $F = 0.603$, $P = 0.622$

Y como no existe homoscedasticidad, se aplica Kruskal-Wallis

$H = 3.794$,

$P = 0.285$

Las técnicas de iluminación son iguales.

11.10 $F = 1.099$, $P = 0.384$

Las cinco escuelas son iguales

11.11 $F = 70.266$, $P = 0.0001$

La temperatura recomendada es entre 20 y 30º C

11.12 $F = 22.10$, $P = 0.001$

$t = 4.70$, $P = 0.001$

$F = t^2$

Como no existe homogeneidad de varianzas, se aplica:

∪ de Mann-Whitney

$Z = 3.047$, $P = 0.002$

11.13 Comparando respuestas en general, aciertos, errores o no contestaron:
respecto de susceptibilidad

n (baja) = 16, $\overline{X} = –6.56$, $S = 14.2$ $F = 1.022$, $P = 0.320$

n (alta) = 16, $\overline{X} = –12.56$, $S = 18.98$ $t = 1.011$, $P = 0.320$

Respecto de hipnotizados:
n (hipnotizados) = 16, $\bar{X} = -18.75$, $S = 15.33$
n (no hipnotizados) = 16, $\bar{X} = -0.38$, $S = 12.956$
$F = 13.410$, $P = 0.001$
$t = 3.662$, $P = 0.001$

En alta susceptibilidad
Hipnotizado *vs*. No hipnotizados
$\bar{X}$ hip = -23.25, $S = 15.48$
$\bar{X}$ no hip = -1.88, $S = 16.47$
$F = 7.154$, $P = 0.018$
$t = 2.675$, $P = 0.018$

En baja susceptibilidad
$\bar{X}$ hip = -14.25, $S = 14.753$
$\bar{X}$ no hip = 1.13, $S = 9.125$
$F = 6.285$ $P = 0.025$
$t = 2.507$ $P = 0.025$

Capítulo 12

12.1

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	3	8.9167	2.9722	**5.3500**	3.9299%
Entre bloques (*B*)	2	32.6667	16.3333	**29.4000**	0.0794%
Error de muestreo (*E*)	6	3.3333	0.5556		
Total (*T*)	11	44.9167			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 3.9299\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0794\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0393$
Para bloques, $\rho = 0.0008$

12.2

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	105.5000	52.7500	**22.8795**	0.1558%
Entre bloques (*B*)	3	8.9167	2.9722	**1.2892**	36.0712%
Error de muestreo (*E*)	6	13.8333	2.3056		
Total (*T*)	11	128.2500			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.1558\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 36.0712\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0016$
Para bloques, $\rho = 0.3607$

12.3

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	1183.5238	591.7619	**0.0979**	90.7492%
Entre bloques (*B*)	6	196528.9524	32754.8254	**5.4167**	0.6377%
Error de muestreo (*E*)	12	72564.4762	6047.0397		
Total (*T*)	20	270276.9524			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 90.7492\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.6377\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.9075$
Para bloques, $\rho = 0.0064$

12.4

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	52.3080	26.1540	**18.1122**	0.1071%
Entre bloques (*B*)	4	745.4640	186.3660	**129.0623**	<0.0001%
Error de muestreo (*E*)	8	11.5520	1.4440		
Total (*T*)	14	809.3240			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.1071\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0001\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0011$
Para bloques, $\rho < 0.0001$

12.5

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	3	33.5000	11.1667	**5.5833**	1.9273%
Entre bloques (*B*)	3	46.5000	15.5000	**7.7500**	0.7279%
Error de muestreo (*E*)	9	18.0000	2.0000		
Total (*T*)	15	98.0000			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 1.9273\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.7279\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0193$
Para bloques, $\rho = 0.0073$

12.6

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	1111.3928	555.6964	**2.2679**	18.4692%
Entre bloques (*B*)	1	346.5800	346.5800	**1.4145**	27.9244%
Interacción entre *A* y *B*	2	146.4181	73.2090	**0.2988**	75.2148%
Error de muestreo (*E*)	6	1470.1535	245.0256		
Total (*T*)	11	3074.5444			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 18.4692\%$

Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 27.9244\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 75.2148\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.1847$
Para bloques, $\rho = 0.2792$
Para la interacción, $\rho = 0.7521$

12.7

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	8	76.7803	9.5975	**2.6687**	2.6707%
Entre bloques (*B*)	2	56.6741	28.3371	**7.8794**	0.2016%
Interacción entre *A* y *B*	16	69.8448	4.3653	**1.2138**	31.8944%
Error de muestreo (*E*)	27	97.1017	3.5964		
Total (*T*)	53	300.4009			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 2.6707\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.2016\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 31.8944\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0267$
Para bloques, $\rho = 0.0020$
Para la interacción, $\rho = 0.2198$

12.8

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	3	85942.6667	28647.5556	**0.5555**	65.1864%
Entre bloques (*B*)	1	25090.6667	25090.6667	**0.4866**	49.5477%
Interacción entre *A* y *B*	3	2536668.000	84556.0000	**1.6397**	21.9822%
Error de muestreo (*E*)	16	825074.6667	51567.1667		
Total (*T*)	23	1189776.0000			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 65.1864\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 49.5477\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 21.9822\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.6519$
Para bloques, $\rho = 0.4955$
Para la interacción, $\rho = 0.2198$

12.9

Fuente de	**Grados de libertad variación**	**Suma de cuadrados (*gl*)**	**Cuadrados medios (*SC*)**	**(*CM*)**	***F*** ***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	3	175.7000	58.5667	**4.4879**	0.9722%
Entre bloques (*B*)	1	48.4000	48.4000	**3.7088**	6.3050%
Interacción entre *A* y *B*	3	3.4000	1.1333	**0.0868**	96.6744%
Error de muestreo (*E*)	32	417.6000	13.0500		
Total (*T*)	39	645.1000			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.9722\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 6.3050\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 96.6744\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0097$
Para bloques, $\rho = 0.0631$
Para la interacción, $\rho = 0.9667$

12.10

Fuente de	**Grados de libertad variación**	**Suma de cuadrados (*gl*)**	**Cuadrados medios (*SC*)**	**(*CM*)**	***F*** ***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	9.0000	4.5000	**5.0625**	1.8014%
Entre bloques (*B*)	1	2.6667	2.6667	**3.0000**	10.0366%
Interacción entre *A* y *B*	2	50.3333	25.1667	**28.3125**	0.0003%
Error de muestreo (*E*)	18	16.0000	0.8889		
Total (*T*)	23	78.0000			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 1.8014\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 10.0366\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0003\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0180$
Para bloques, $\rho = 0.1004$
Para la interacción, $\rho = 0.0001$

12.11

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	3	71.7292	23.9097	**43.5823**	<0.0001%
Entre bloques (*B*)	2	65.3750	32.6875	**59.5823**	<0.0001%
Interacción entre *A* y *B*	6	27.9583	4.6597	**8.4937**	0.0009%
Error de muestreo (*E*)	36	19.7500	0.5486		
Total (*T*)	47	184.8125			

Para tratamientos (A), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0001\%$
Para bloques (B), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0001\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0009\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0001$
Para bloques, $\rho = 0.0001$
Para la interacción, $\rho = 0.0001$

12.12

Fuente de	Grados de libertad variación	Suma de cuadrados (*gl*)	Cuadrados medios (*SC*)	(*CM*)	*F* *P*
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	33.2500	16.6250	**3.0381**	7.2974%
Entre bloques (*B*)	1	13.5000	13.5000	**2.4670**	13.3671%
Interacción entre *A* y *B*	2	0.7500	0.3750	**0.0685**	93.4010%
Error de muestreo (*E*)	18	98.5000	5.4722		
Total (*T*)	23	146.0000			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 7.2974\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 13.3671\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 93.4010\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0730$
Para bloques, $\rho = 0.1337$
Para la interacción, $\rho = 0.9340$

12.13

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	2	1927.6333	963.8167	**103.9467**	<0.0001%
Entre bloques (*B*)	4	60.8333	15.2083	**1.6402**	18.0722%
Interacción entre *A* y *B*	8	62.8667	7.8583	**0.8475**	56.6655%
Error de muestreo (*E*)	45	417.2500	9.2722		
Total (*T*)	59	2468.5833			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0001\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha >18.0722\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 56.6655\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0001$
Para bloques, $\rho = 0.1807$
Para la interacción, $\rho = 0.5667$

12.14

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (A)	1	78.1250	78.1250	**4.9351**	<3.4575%
Entre bloques (B)	1	4.5000	4.5000	**0.2843**	59.8127%
Interacción entre A y B	1	0.1250	0.1250	**0.0079**	92.9825%
Error de muestreo (E)	28	443.2500	15.8304		
Total (T)	31	526.0000			

Para tratamientos (A), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 3.4575\%$
Para bloques (B), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 59.8127\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 92.9825\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.0346$
Para bloques, $\rho = 0.5981$
Para la interacción, $\rho = 0.9298$

12.15

Fuente de variación	**Grados de libertad (*gl*)**	**Suma de cuadrados (*SC*)**	**Cuadrados medios (*CM*)**	***F***	***P***
Entre grupos de tratamiento (*A*)	1	0.3333	0.3333	**0.3333**	58.4700%
Entre bloques (*B*)	2	99.5000	49.7500	**49.7500**	0.0184%
Interacción entre *A* y *B*	2	4.1667	2.0833	**2.0833**	20.5550%
Error de muestreo (*E*)	6	6.0000	1.0000		
Total (*T*)	11	110.0000			

Para tratamientos (*A*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 58.4700\%$
Para bloques (*B*), H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0184\%$
Para la interacción, H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 20.5550\%$

Para tratamientos, $\rho = 0.5847$
Para bloques, $\rho = 0.0002$
Para la interacción, $\rho = 0.2056$

Capitulo 13

13.1

a	***b***	**Ecuación**
0.4301	–0.0743	**$Y = 0.4301 - 0.0743\,X$**

r	**r^2**	**Razón *t* de ß**
–0.9432	0.8897	–8.0332 (P = 0.0021%)
		$F = 64.53$, $P < 0.0001$

Error estándar de la estimación: 0.0375

Razón t de a: 18.8977 (P = 0.0000%)

σ***a***: 0.0228

σ***b***: 0.0093

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

13.2

a	***b***	**Ecuación**
–1.2123	0.0377	**$Y = -1.2123 + 0.0377\,X$**

r	**r^2**	**Razón *t* de ß**
0.8901	0.7923	4.7847 (P = 0.1524%)
		$F = 22893$, $P < 0.003$

Error estándar de la estimación: 0.1932

Razón t de a: –1.9382 (P = 5.0344%)

σ***a***: 06255

σ***b***: 0.0079

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha >$ P

13.3

a	***b***	**Ecuación**
279.0716	94.0064	**$Y = 279.0716 + 94.0064\,X$**

r	**r^2**	**Razón *t* de ß**
0.8894	0.7910	5.5022 (P = 0.0286%)
		$F = 30.2745$, $P = 0.0006$

Error estándar de la estimación: 21.8747

Razón t de a: 5.6452 (P = 0.0242%)

σ***a***: 49.4353

σ***b***: 17.0852

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

13.4 Considerando el modelo exponencial

a	***b***	**Ecuación**
3.9795	0.3390	**Y = 3.9795 + EXP(0.3390 X)**
r	***r^2***	**Razón *t* de ß**
0.8809	0.7759	4.9233 (P = 0.0854%)
		F = 24.2385, P = 0.0017

Error estándar de la estimación: 0.7199

razón t de a: 11.6541 (P = 0.0004%)

σ***a***: 0.3415

σ***b***: 0.0689

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

Considerando el modelo lineal

a	***b***	**Ecuación**
1.9209	6.6366	**Y = 1.9209 + 6.6366 X**
r	***r^2***	**Razón *t* de ß**
0.9982	0.9963	43.6299 (P = 0.0000%)
		F = 1903.5696, P < 0.0001

Error estándar de la estimación: 1.5903

razón t de a: 2.5466 (P = 1.9146%)

σ***a***: 0.7543

σ***b***: 0.1521

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

13.5

a	***b***	**Ecuación**
115.7110	–15.9628	**Y = 115.7110 – 15.9628 X**
r	***r^2***	**Razón *t* de ß**
–0.8607	0.7408	–6.3248 (P = 0.0009%)
		F = 40.0035, P < 0.0001

Error estándar de la estimación: 6.1908

razón t de a: 41.6623 (P = 0.0000%)

σ***a***: 2.7774

σ***b***: 2.5238

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

13.6 $\mathbf{Y = 8.8678 + 0.0131\ X_1 + 0.9053\ X_2 + 0.1813\ X_3}$

$Y = Y$ estimada

$\mathbf{r^2 = 0.7608}$

$\mathbf{r = 0.8722}$

Fuente de variación	***gl***	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	***F***	***p***
Regresión	3	2002.2728	667.4243	95.7459	< 0.0001%
Residual		18	125.4742	6.9708	

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0001\%$

$p < 0.0001$

13.7 **Ecuación de regresión:**

Clic para interpolar

$\mathbf{Y = 190.7859 - 0.2011\ X_1 - 1.0250\ X_2 - 2.2612\ X_3 - 0.5707\ X_4}$

$Y = Y$ estimada

$\mathbf{r^2 = 0.7126}$

$\mathbf{r = 0.8442}$

Fuente de variación	***gl***	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	***F***	***p***
Regresión	4	9307.4767	2326.8692	0.8792	50.1044%
Residual	14	37050.3479	2646.4534		

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 50.1044\%$

$p = 0.5010$ no se rechaza H_0

13.8 **Para atletas resistencia**

a	***b***	**Ecuación**
30.7057	0.2887	$\mathbf{Y = 30.7057 + 0.2887\ X}$
r	$\mathbf{r^2}$	**Razón *t***
0.4243	0.1800	1.1477 ($P = 14.7386\%$) $F = 1.3173$, $P = 0.2948$ H_0 no se rechaza

Error estándar de la estimación: 17.3762

razón t de a: 0.8728 ($P = 20.8160\%$)

σ***a***: 35.1799

σ***b***: 0.2516

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

Para atletas de potencia

a	***b***	**Ecuación**
–1.4353	0.2019	$\mathbf{Y = -1.4353 + 0.2019\,X}$

r	$\mathbf{r^2}$	**Razón *t***
0.6500	0.4224	2.0949 (P = 4.0523%)
		F = 4.3887, P = 0.0810
		Se rechaza H_0 para $\alpha = 0.08$

Error estándar de la estimación: 11.3626

razón *t* de α: –0.0663 (P = 47.4650%)

σ***a***: 21.6526

σ***b***: 0.0964

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > P$

13.9 $\mathbf{Y = 0.6525 + 1.6879\,X_1 - 0.0638\,X_2}$

$Y = Y$ estimada

$\mathbf{r^2 = 0.9056}$

$\mathbf{r = 0.9516}$

Fuente de variación	***gl***	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	***F***	***p***
Regresión	2	230.7389	115.3695	77.1341	1.2799%
Residual	2	2.9914	1.4957		

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 1.2799\%$

$p = 0.0128$ H_0 se rechaza

13.10

$\mathbf{Y = 0.4977 + 0.7298\,X_1 + 0.0851\,X_2}$

$Y = Y$ estimada

$\mathbf{r^2 = 0.7573}$

$\mathbf{r = 0.8702}$

Fuente de variación	***gl***	**Suma de cuadrados**	**Cuadrados medios**	***F***	***p***
Regresión	2	273.0406	136.5203	21.6318	0.0593%
Residual	8	50.4888	6.3111		

H_0 se rechaza para cualquier $\alpha > 0.0593\%$

$p = 0.0006$ H_0 se rechaza

Capítulo 14

14.1

$Z = 2.431$, $P = 0.015$, $\overline{X}_1 = 3.34$, $S_1 = 0.4851$

$t = 2.967$, $P = 0.00$, $\overline{X}_2 = 4.078$, $S_2 = 0.5608$

14.2

$Z = 1.498$, $P = 0.134$ no significativa

14.3

problema 1	$\overline{X} = 11.040$,	$S = 4.90$
problema 2	$\overline{X} = 11.340$,	$S = 3.35$
problema 3	$\overline{X} = 18.300$,	$S = 7.52$
problema 4	$\overline{X} = 21.680$,	$S = 6.48$

$\chi_f^2 = 10.92$, P = 0.012

14.4 $r_s = 0.967$, $P = 0.001$

14.5 $H = 13.333$, $P = 0.02$

14.6 $\chi^2 = 13.333$, $P = 0.02$

14.7 $\chi_f^2 = 8.051$, $P = 0.018$

14.8 $\chi_f^2 = 9.38$, $P = 0.025$

14.9 $K = 0.29$ $P_o = 0.48$

$P_e = 0.264$

La congruencia entre las dos observaciones *A* y *B* es pobre.

14.10 $K = 0.19$ $P_o = 0.44$

$P_e = 0.3072$

No hay congruencia entre las dos observaciones.

14.11 $K = 0.13$

Muy pobre la concordancia entre las dos observaciones.

14.12 $K = 0.42$

La congruencia es buena entre la observación *A* y la *B*.

Capítulo 15

15.1 $\chi^2 = 1.969$, $P = 0.5788$

15.2 $\chi^2 = 40.919$, $P = 0.0001$

15.3 a) utilizando la corrección de Yates.
$\chi^2 = 8.766$, $P = 0.003$
b) sin utilizar la corrección de Yates.
$\chi^2 = 9.07$, $P = 0.0026$

15.4 $\chi^2 = 383.062$, $P = 0.001$

15.5 $\chi^2 = 7.46$, $P = 0.006$
utilizando la corrección de Yates

Presentamos la tercera edición de esta obra, que en la actualidad se considera consulta obligada entre los alumnos de las carreras de psicología, odontología, sociología, trabajo social, medicina, ciencias de la comunicación, administración, y otras. Aquí el autor explica con mucha claridad y sencillez los elementos teóricos de la estadística necesarios para un curso de este nivel. El libro incluye un cd con el software MacStat, versión 3.0, el cual fue creado a fin de que el estudiante de esta disciplina cuente con una herramienta que haga las operaciones y así ahorre mucho tiempo para que pueda comprender el uso del modelo y su aplicación.

Características

- Incluye nuevos ejercicios.
- Fue escrito con la colaboración de expertos en diversos capítulos.
- Glosario de términos.
- Apéndice que indica cómo presentar reportes científicos.
- Presenta ejemplos con aplicaciones.

CENGAGE
Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481345-6
ISBN-10: 607481345-0

9 786074 813456